Exercice 2.1.

(1) Vérifier que le groupe unitaire spécial de $\mathbb{C}^2$, noté SU(2), est difféomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$.

(2) Montrer que l'espace tangent à l'élément neutre de SU(2) est donné par le sous-espace vectoriel $\mathfrak{h} \subset M(2,\mathbb{C})$ formé par les matrices antihermitiennes de trace nulle. L'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^3$ via l'isomorphisme

$$\Phi\colon (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix}$$

(3) Montrer que SU(2) agit sur $\mathfrak{h}$ par $(g,H) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathfrak{h} \mapsto gHg^{-1} \in \mathfrak{h}$.

(4) Vérifier que $\det \Phi(w) = \| w \|^2$, pour tout $w \in \mathbb{R}^3$. En déduire un homomorphisme $p\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.

(5) Montrer que le morphisme p est surjectif et que $\ker p = \pm I$, où I dénote l'élément neutre de SU(2).

(6) Conclure que p est un revêtement à deux feuillets de SO(3) et que SO(3) est difféomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Solution.

(1) Le groupe SU(2) est le sous-groupe de GL(2,$\mathbb{C}$) des matrices unitaires de déterminant égal à 1, c'est à dire des matrices A satisfaisant les identités

$$A^\dagger A = I, \quad \det A = 1. \tag{2.1}$$

où $A^\dagger$ dénote la matrice conjuguée et transposée de la matrice A. L'identité $A^\dagger A = I$ est équivalente à l'identité .... Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $\det A = 1$, le calcul suivant ... montre que

$$\gamma = -\bar\beta, \quad \delta = \bar\alpha$$

et donc

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \mid A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}. \tag{2.2}$$

Soit $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $M(2,\mathbb{C})$ défini par

$$\mathbb{H} = \left\{ A \in M(2,\mathbb{C}) \mid A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}, \alpha,\beta \in \mathbb{C} \right\}. \tag{2.3}$$

L'application $\phi\colon \mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2 \to \mathbb{H}$ définie par $\phi(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$ est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire (et donc un difféomorphisme C^∞) de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{H}$. L'identité (2.2) montre que SU(2) est l'image par l'isomorphisme ϕ de la sphère unité de $\mathbb{R}^4$. On conclut que SU(2) est une sous-variété différentiable de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$ (et donc de $M(2,\mathbb{R})$) difféomorphe par l'application ϕ à la sphère unité $\mathbb{S}^3$.

(2) La conclusion de la partie (1) est que SU(2) est la sous-variété de $M(2,\mathbb{R})$ définie par les équations (2.1). Le calcul suivant ... montre que la différentielle DF de l'application $F\colon A \in M(2,\mathbb{C}) \mapsto (A^\dagger A, \det A) \in \mathscr{H} \times \mathbb{C}$ est donnée au point $A \in M(2,\mathbb{C})$ par

$$DF_A(H) = (A^\dagger H + H^\dagger A, \mathrm{trace}(A^\dagger H)), \quad \forall H \in M(2,\mathbb{R})$$

En particulier pour $A = I$ on obtient

$$DF_I(H) = (H + H^\dagger, \mathrm{trace}(H))$$

Le noyau de DF_I est donc l'espace vectoriel des matrices antihermitiennes de trace nulle, autrement dit l'espace $\mathfrak{h}$. Toute matrice de $\mathfrak{h}$ peut s'écrire, de façon unique,

 2

sous la forme $\begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix}$ car .... L'application Φ est évidemment linéaire et donc un isomorphisme.

(3) (Première solution) Pour tout $g \in \mathrm{SU}(2)$, considérons la conjugaison $C_g\colon h \in \mathrm{SU}(2) \mapsto ghg^{-1} \in \mathrm{SU}(2)$. Comme $C_{g_1} \circ C_{g_2} = C_{g_1 g_2}$, le groupe SU(2) agit sur lui-même par $(g,h) \mapsto C_g(h)$ (action par conjugaison).

L'application C_g est la restriction à SU(2) de l'application $\hat{C}_g$ de $M(2,\mathbb{R})$ dans lui-même définie par la même formule. Cette dernière application est un isomorphisme linéaire et donc un difféomorphisme C^∞. Cela nous dit que C_g est une application différentiable C^∞ de SU(2) dans $M(2,\mathbb{R})$ car ... ; c'est même un difféomorphisme C^∞ de SU(2) sur lui-même car son inverse est donné par $C_{g^{-1}}$. L'action par conjugaison de SU(2) sur lui-même est donc une action par des difféomorphismes.

Comme pour tout $g \in \mathrm{SU}(2)$, on a $C_g(I) = I$ la différentielle de l'application C_g au point I est une application linéaire de l'espace tangent en I à SU(2) dans lui-même : autrement dit $(DC_g)_I\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$. Comme $C_{g_1} \circ C_{g_2} = C_{g_1 g_2}$, on a aussi $(DC_{g_1})_I \circ (DC_{g_2})_I = (DC_{g_1 g_2})_I$ ce qui implique que le groupe SU(2) agit par applications (automorphismes) linéaires sur $\mathfrak{h}$.

Il est facile de vérifier que $(DC_g)_I(H) = gHg^{-1}$; en effet, la différentielle $(DC_g)_I$ coïncide (!) avec la restriction à $\mathfrak{h}$ de la différentielle en I de l'application $\hat{C}_g$; cette dernière se calcule sans soucis car l'application $\hat{C}_g$ est linéaire. On pose par la suite $p_g : H \in \mathfrak{h} \mapsto gHg^{-1} \in \mathfrak{h}$.

(Solition 2, alternative) Vérifions que l'espace $\mathfrak{h}$ est stable par conjugaison par éléments de SU(2) ; pour tout $H \in \mathfrak{h}$ et $g \in \mathrm{SU}(2)$ nous avons

$$(gHg^{-1})^\dagger = (g^{-1})^\dagger H^\dagger g^\dagger = gH^\dagger g^{-1} = -gHg^{-1}$$

et

$$\mathrm{trace}(gHg^{-1}) = \mathrm{trace}(g^{-1}gH) = \mathrm{trace}(H) = 0.g^{-1} = -gHg^{-1}$$

donc gHg^{-1} appartient à $\mathfrak{h}$. On pose $p_g : H \in \mathfrak{h} \mapsto gHg^{-1} \in \mathfrak{h}$. Comme $p_{g_1} \circ p_{g_2} = p_{g_1 g_2}$, le groupe SU(2) agit sur $\mathfrak{h}$.

(4) Pour $w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\Phi(w) = H$ le calcul suivant

$$\det H = \det \Phi(w) = x^2 + y^2 + z^2 = \| w \|^2$$

démontre la première assertion. On muni $\mathfrak{h}$ du produit scalaire image par l'isomorphisme Φ du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Rappelons qu'on a posé $p_g : H \in \mathfrak{h} \mapsto gHg^{-1} \in \mathfrak{h}$ et que cela définit une action de SU(2) sur $\mathfrak{h}$ par automorphismes linéaires. Puisque

$$\| p_g(H) \|^2 = \det p_g(H) = \det gHg^{-1} = \det H = \| H \|^2$$

on a alors $\| p_g(H) \| = \| H \|$ pour tout $g \in \mathrm{SU}(2)$ et $H \in \mathfrak{h}$. Cela implique que l'application p_g preserve le produit scalaire de $\mathfrak{h}$. Autrement dit l'application p_g est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $\mathfrak{h}$. Nous obtenons ainsi un morphisme $p\colon g \in \mathrm{SU}(2) \to p_g \in \mathrm{O}(\mathfrak{h})$ de SU(2) dans le groupe des application orthogonales de l'espace euclidien $\mathfrak{h}$. Remarquons que les trois matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

forment une base orthonormée de $\mathfrak{h}$. Au moyen de cette base nous pouvons identifier tout p_g avec un élément de O(3). Le morphisme p s'identifie alors à un morphisme $p\colon g \in \mathrm{SU}(2) \to p_g \in \mathrm{O}(3)$.

Le groupe SU(2) est connexe car homéomorphe à $\mathbb{S}^3$ et l'application p est continue. L'image de $p(\mathrm{SU}(2))$ est donc un sous-groupe connexe de O(3), autrement dit un sous-groupe connexe de SO(3).

(5) Vérifions que $\ker p = \{\pm I\}$. Évidemment $\{\pm I\} < \ker p$. Si $g \in \ker p$ alors $gHg^{-1} = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, car .... Or, cela est équivaut à dire que g commute avec tout élément $H \in \mathfrak{h}$; en particulier g commute avec les trois matrices σ_i. Pour $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, le calcul suivant ... montre que

$$\alpha = \pm 1, \quad \beta = 0,$$

c'est-à-dire $g = \pm I$.

Montrons que l'application p est surjective.

(SOLUTION A) il suffit de démontrer que l'image de p contient un voisinage de $I \in \mathrm{SO}(\mathfrak{h}) \approx \mathrm{SO}(3)$. En effet, la connexité du groupe SO(3) implique que tout voisinage de I engendre SO(3).

Le groupe SO(3) est une sous-variété de $M(3,\mathbb{R})$ de dimension 3, car ...[1]. Le groupe SU(2) est aussi une sous-variété de $M(3,\mathbb{C})$ de dimension 3. Pour montrer que l'image de p contient un voisinage de $I \in \mathrm{SO}(\mathfrak{h})$, il suffit alors de démontrer que la différentielle Dp_I de l'application p en $I \in \mathrm{SU}(2)$ est injective. De cela s'ensuit que Dp_I est un isomorphisme local et par le théorème d'inversion local et la définition de sous-variété que p est un difféomorphisme d'un voisinage de $I \in \mathrm{SU}(2)$ sur un voisinage de $I \in \mathrm{SO}(\mathfrak{h})$.

Calculons la différentielle de l'application $p\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ en $I \in \mathrm{SU}(2)$, c'est à dire de l'application

$$p\colon g \in \mathrm{SU}(2) \mapsto (H \in \mathfrak{h} \mapsto gHg^{-1} \in \mathfrak{h})$$

On obtient

$$(Dp)_I\colon K \in \mathfrak{h} \mapsto (H \in \mathfrak{h} \mapsto KH - HK \in \mathfrak{h})$$

car $(Dp)_I$ est la restriction à l'espace tangent en I à SU(2), (à savoir $\mathfrak{h}$), de l'application ... définie sur l'ouvert $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$ dont la différentielle est donnée par ....

Soit $K \in \mathfrak{h}$. On a $K \in \ker(Dp)_I$ si et seulement si $KH = HK$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$. En particulier K commute avec le trois matrices σ_i. Le calcul suivant ... montre alors que $K = 0$. Par la discussion précédente, conclut la preuve de la surjectivité de p.

(SOLUTION B). Montrons que si $g = g_{x,y,z} := \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ (ce qui équivaut à dire $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) alors l'application linéaire $p_g \in SO(\mathfrak{h})$ est égale à l'identité sur la droite engendrée par $w = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$ et est égale à la symétrie $v \mapsto -v$ sur le sous-espace de $\mathfrak{h}$ orthogonal à w. Cela découle du calcul suivant ....

Pour montrer la surjectivité de p il suffit alors de montrer que les applications $p_{g_{x,y,z}}$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ engendrent $\mathrm{SO}(\mathfrak{h})$. Ces applications sont connues sous le nom de *retournements*. On montre que la composition de deux retournements $p_{g_{x,y,z}}$ et $p_{g_{x',y',z'}}$ est une rotation, dont on déterminera l'axe de rotation et l'angle de rotation.

(6) On a montré que $0 \to \{\pm I\} \to \mathrm{SU}(2) \xrightarrow{p} \mathrm{SO}(3) \to 0$ est une suite exacte de morphismes (différentiables). Le groupe $\{\pm I\}$ agit librement sur SU(2) et donc $p\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ est un revêtement (Théorème 2.2.38 du cours) à deux feuillets car l'application p est 2 à 1. Lorsque on identifie SU(2) à $\mathbb{S}^3$ les orbites du sous-groupe $\{\pm I\}$ sont les ensembles formés de paires de points antipodaux. L'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ étant difféomorphe $\mathbb{S}^3 / \pm I$, on obtient que SO(3) et $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sont difféomorphes.

1. Rappel du cours/TD de Calcul différentiel : Considérer l'application de $M(3,\mathbb{R})$ dans l'espace des matrices symétriques 3×3 définie par $A \mapsto {}^TAA$. La différentielle de cette application est surjective en tout point. Donc l'espace des matrices orthogonales est une sous-variété de $M(3,\mathbb{R})$. L'espace vectoriel $M(3,\mathbb{R})$ est de dimension 9 et l'espace vectoriel des matrices symétriques 3×3 est de dimension 6. Donc la sous-variété formée par les matrices orthogonales a dimension $3 (= 9 - 6)$.

Exercice 2.2. Soit $\mathbb{H}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 formé par les matrices

$$q = q(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$

muni de la norme euclidienne $\| q(\alpha,\beta) \|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Rappelons que le groupe SU(2) s'identifie à la sphère unité $\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \| q \| = 1\}$. Pour $(q_1, q_2) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ soit

$$\phi(q_1, q_2) : q \in \mathbb{H} \mapsto q_1 q q_2^{-1} \in \mathbb{H}$$

(1) Montrer que $\phi(q_1, q_2)$ est une isomorphisme linéaire orthogonal de $\mathbb{H}$ préservant l'orientation, autrement dit un élément de $\mathrm{SO}(\mathbb{H}) \approx \mathrm{SO}(4)$.

(2) En déduire que $\phi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ est un homomorphisme de groupes et que $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ agit par isométries directes sur la sphère $\mathbb{S}^3$.

(3) Montrer que SO(4) est difféomorphe à $\big(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)\big)/\{\pm(I,I)\}$.

Solution.

(1) L'application $\phi(q_1, q_2)$ est évidemment linéaire. Puisque $\| q \|^2 = \det q$ pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $\| \phi(q_1, q_2) q \|^2 = \det q_1 q q_2^{-1} = \det q_1 \det q \det q_2^{-1} = \det q = \| q \|^2$. Donc l'application linéaire $\phi(q_1, q_2)$ préserve la norme et par polarisation le produit scalaire de $\mathbb{H}$. Cela montre que $\phi(q_1, q_2) \in \mathrm{O}(\mathbb{H})$. L'application $\phi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \mapsto \phi(q_1, q_2) \in \mathrm{O}(\mathbb{H})$ est continue. Comme $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \approx \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, l'image de ϕ est connexe donc contenue dans $\mathrm{SO}(\mathbb{H})$.

(2) Il est immédiate de vérifier que $\phi(q_1, q_2) \circ \phi(q_3, q_4) = \phi(q_1 q_3, q_2 q_4)$. Donc $\phi : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \mapsto \phi(q_1, q_2) \in \mathrm{SO}(\mathbb{H})$ est un morphisme de groupes. L'action de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{H}$ étant isométrique, elle induit, par restriction, une action isométrique sur la sphère unité de $\mathbb{H}$, à savoir sur $\mathbb{S}^3$.

(3) Si $\phi(q_1, q_2)$ est l'application identique de $\mathbb{H}$ alors $q_1 q q_2^{-1} = q$ pour tout $q \in \mathbb{H}$. Cela implique $q_1 q = q q_2$ pour tout $q \in \mathbb{H}$. En particulier pour $q = I$ in a $q_1 = q_2$. On montre ensuite que $q_1 = q_2 = \pm I$, (exercice 2.1, question 5). On conclut que $\ker \phi = \pm(I, I)$.

Comme dans l'exercice 2.1, notons par $\mathfrak{h}$ l'espace tangent à SU(2) en I. L'espace tangent à $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ en (I, I) est alors $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$. La différentielle de l'application ϕ au point $(I, I) \in SU(2) \times \mathrm{SU}(2)$ est égale à

$$(D\phi_{(I,I)} : (K_1, K_2) \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \mapsto (q \in \mathbb{H} \mapsto K_1 q - q K_2 \in \mathbb{H})$$

Si $(D\phi_{(I,I)})(K_1, K_2) = 0$ on a $K_1 q - q K_2 = 0$ pour tout $q \in \mathbb{H}$. Pour $q = q(1,0) = I$, on obtient $K_1 = K_2$. On montre ensuite que $K_1 = K_2 = 0$ (Exercice 2.1, question 5). En conclusion $(D\phi_{(I,I)})$ est injective. Comme $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ est une sous-variété de $M(2,\mathbb{C}) \times M(2,\mathbb{C})$ de dimension 6 et SO(4) est une sous-variété de $M(4,\mathbb{R})$ de dimension 6 (pourquoi ?), l'application $(D\phi_{(I,I)})$ est un isomorphisme linéaire de l'espace $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ tangent à $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ en (I, I) sur l'espace tangent à SO(4) en I. Nous concluons que l'application $\phi_{(I,I)}$ est un difféomorphisme d'un voisinage de (I, I) dans $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ sur un voisinage de I dans SO(4).

Exercice 2.3. Rappelons de l'exercice 2.1 que le groupe SU(2) s'identifie à la sphère unité $\mathbb{S}^3 \approx \{q \in \mathbb{H} \mid \| q \| = 1\}$, (où $\mathbb{H}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 défini par la formule (2.3)) ; que nous avons un morphisme surjectif $p\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ de noyau $\{\pm I\}$; que cela établit une identification de SO(3) avec $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I\}$ et donc de SO(3) avec l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^3/\{\pm I\}$.

Rappelons de l'exercice 2.2 que $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ opère sur la sphère unité $\mathbb{S}^3 \approx \{q \in \mathbb{H} \mid \| q \| = 1\}$ par $((g_1, g_2), q) \mapsto g_1 q g_2^{-1}$; que nous avons un morphisme surjectif $p\colon \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ de noyau $\{\pm(I, I)\}$.

(1) Montrer que tout sous-groupe $\Gamma < O(4)$ opérant librement sur $\mathbb{S}^3$ est contenu dans $SO(4)$

(2) Montrer que l'unique élément d'ordre 2 de $O(4)$ opérant librement sur $\mathbb{S}^3$ est l'élément $-I$.

(3) Soient Γ un sous-groupe de $SU(2)\times SU(2)$ et Γ' son image dans $SO(3)\times SO(3)$ par le morphisme $p\times p$. Montrer que l'action de Γ sur $\mathbb{S}^3$ induit, par passage au quotient, une action de Γ' sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que l'action de $\Gamma < SO(3)\times SO(3)$ sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \approx SO(3)$ donnée en formules par

$$((g_1,g_2),A) \in \Gamma' \times SO(3) \mapsto g_1 A g_2^{-1} \in SO(3) \tag{2.5}$$

est libre si et seulement si l'identité est l'unique élément $(\gamma_1,\gamma_2) \in \Gamma$ tel que γ_1 soit conjugué à γ_2 dans $SO(3)$.

(5) Montrer que si Γ est un un sous-groupe fini de $SO(3)$ le sous-groupe Γ opère librement sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \approx SO(3)$ et que le quotient $M_\Gamma = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})/\Gamma$ est une variété différentiable de dimension 3. Le groupe fondamentale de la variété M_Γ est égal au groupe $\tilde{\Gamma} = p^{-1}(\Gamma)$ préimage de Γ par le morphisme $p\colon SU(2) \to SO(3)$ établi dans l'exercice 2.1. En particulier, lorsque Γ est le groupe d'isométries de l'icosaèdre, la variété quotient M_Γ est une variété de dimensions 3 avec un groupe fondamentale d'ordre 120 (le groupe binaire icosaédrique), connue sur le nom *sphère d'homologie Poincaré.*

Solution.

(1) Soit $A \in O(4)$ avec $\det A = -1$. Par la Proposition 4.3.4 du cours la matrice A possède une ou trois valeurs propres égales à -1. Par conséquent au moins une valeur propre de A est égal à 1. Cela implique que A fixe un point sur la sphère $\mathbb{S}^3$.

(2) Si $A \in O(4)$ est d'ordre 2 ses valeurs propres sont ± 1. Si une valeur propre de A est égal à 1 la matrice A fixe un point sur la sphère $\mathbb{S}^3$.

(3) Les éléments $\pm I \in SU(2)$ commutent avec tout élément de $SU(2)$. Donc si $(g_1,g_2) \in \Gamma$ et $g \in SU(2)$ on a

$$g_1\{g,-g\}g_2^{-1} = \{g_1 g g_2^{-1}, g_1(-g)g_2^{-1}\} = \{g_1 g g_2^{-1}, -g_1 g g_2^{-1}\}.$$

Donc l'action de Γ sur $\mathbb{S}^3 \approx SU(2)$ passe au quotient et donne une action de Γ sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \approx SU(2)/\{\pm I\}$. On a aussi

$$(-g_1)\{g,-g\}g_2^{-1} = \{(-g_1)g g_2^{-1}, (-g_1)(-g)g_2^{-1}\} = \{g_1 g g_2^{-1}, -g_1 g g_2^{-1}\} = g_1\{g,-g\}g_2^{-1}$$

et l'identité analogue obtenue en changeant de signe à g_2. Donc pour tout $(g_1,g_2) \in \Gamma$ les quatre éléments $(\pm g_1, \pm g_2)$ ont la même action sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. On conclut que L'action de Γ sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, induit une action de $\Gamma' < SO(3)\times SO(3)$ sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \approx SO(3)$ donnée en formules par

$$((g_1,g_2),A) \in \Gamma' \times SO(3) \mapsto g_1 A g_2^{-1} \in SO(3)$$

(4) Soit $(g_1,g_2) \in \Gamma < SO(3)\times SO(3)$ tel que $g_2 = h g_1 h^{-1}$ avec $h \in SO(3)$, on a $g_1 h^{-1} g_2^{-1} = h^{-1}$ et donc h^{-1} est un point fixe de (g_1,g_2). Réciproquement s'il existe $h \in SO(3)$ tel que $g_1 h g_2^{-1} = h$, on a $g_2 = h^{-1} g_1 h$.

(5) Tout sous-groupe H d'un groupe G opère librement sur G par translation (à gauche), car .... Par conséquent un groupe fini $\Gamma < SO(3)$ opère librement par par translation à gauche sur $SO(3)$. Soit $\tilde{\Gamma}$ la préimage du groupe $\Gamma \times \{I\} < SO(3)\times SO(3)$ par le morphisme $p \times p$. La projection de $\tilde{\Gamma}$ dans $SO(3)\times SO(3)$ est le groupe $\Gamma\times\{I\}$. Par la partie (3) de cet exercice l'action de $\tilde{\Gamma}$ par isométries sur $\mathbb{S}^3$ définie dans le texte de l'exercice passe au quotient donne une action par difféomorphismes de $\Gamma\times\{I\}$ sur $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \approx SO(3)$. Par la formule (2.5), cette action est exactement l'action à gauche de

Γ sur SO(3). On conclut que le quotient $M_\Gamma = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})/\Gamma$ est une variété différentielle (de dimension 3 car $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ est de dimension 3).

Exercice 2.4. Soient p, q deux entiers positifs premiers entre eux et soit ω une racine primitive p-ième de l'unité (par exemple $\omega = \exp(2\pi i/p)$). On note $\mathbb{S}^3$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Posons

$$j.(z_1, z_2) = (\omega^j z_1, \omega^{jq} z_2), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

(1) Vérifier que l'application $(j, (z_1, z_2)) \mapsto j.(z_1, z_2)$ définit, par passage au quotient, une action du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^3$.

(2) Montrer que l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^3$ ainsi définie est libre. En déduire que le quotient de $\mathbb{S}^3$ par l'action ci-dessus définie est une variété différentielle C^∞, dite *espace lenticulaire* $L(p, q)$.

(3) Vérifier que $L(2, 1) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(4) Montrer que $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(5) Montrer que si $q_2 = \pm q_2^{\pm 1}$ modulo p alors les espaces $L(p, q_1)$ et $L(p, q_2)$ sont difféomorphes. (Indication : considérer les applications $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \bar{z}_2)$ et $(z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$).

Solution.

(1) Exercice banal.

(2) Si $j.(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$ alors .... Pour tout $j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'application

$$z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \mapsto (\omega^j z_1, \omega^{jq} z_2) \in \mathbb{S}^3$$

est un difféomorphisme C^∞ de la sphère $\mathbb{S}^3$ sur elle même car .... Par le Théorème ... du cours l'espace quotient de cette action est une variété différentielle C^∞.

(3) Pour $p = 2$ et $q = 1$ on a $\omega = -1$ et l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ est donnée par

$$0.(z_1, z_2) = (z_1, z_2), \quad 1.(z_1, z_2) = (-z_1, -z_2).$$

L'espace quotient de cette action est donc donné par l'identification de points antipodaux de $\mathbb{S}^3$, autrement dit c'est l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(4) La sphère $\mathbb{S}^3$ est simplement connexe, donc ....

(5) Soit $\alpha_{p.q}$ l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^3$ définie par

$$\alpha_{p,q}(j, (z_1, z_2) = (\omega^j z_1, \omega^{jq} z_2)$$

et posons $\alpha^j_{p,q}(z_1, z_2) = \alpha_{p,q}(j, (z_1, z_2))$

Par définition, l'espace lenticulaire $L(p, q)$ est le quotient de $\mathbb{S}^3$ par cette action.

Si $q_2 = q_1 \mod p$ on a $\omega^{jq_1} = \omega^{jq_2}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et donc les action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ données par α_{p,q_1} et α_{p,q_2} coïncident et donc $L(p, q_1) = L(p, q_2)$.

Si $q_2 = -q_1 \mod p$ considérons le difféomorphisme ϕ de $\mathbb{S}^3$ défini par $\phi(z_1, z_2) = (z_1, \bar{z}_2)$. On a

$$\begin{aligned}\alpha^j_{p,q_2}(\phi(z_1, z_2)) &= \alpha^j_{p,q_2}(z_1, \bar{z}_2) = (\omega^j z_1, \omega^{jq_2} \bar{z}_2) = (\omega^j z_1, \omega^{-jq_1} \bar{z}_2) \\ &= \phi(\omega^j z_1, \omega^{jq_1} z_2) = \phi(\alpha^j_{p,q_1}(z_1, z_2))\end{aligned}$$

Cela montre que le difféomorphisme ϕ entrelace les actions α_{p,q_1} et α_{p,q_2}, en envoyant bijectivement l'orbite du point (z_1, z_2) sous l'action α_{p,q_1} sur l'orbite du point $\phi(z_1, z_2)$ sous l'action α_{p,q_2}. Donc l'application ϕ passe aux quotients par ces actions et donne un bijection $\hat{\phi}\colon L(p, q_1) \to L(p, q_2)$. L'application $\hat{\phi}$ est un difféomorphisme, car ....

L'identité $q_2 = q_1^{-1} \mod p$ signifie qu'il existe un entier ℓ tel que $q_1 q_2 + \ell p = 1$; donc, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, si $k = j q_2$, on a $j = k q_1 + j \ell p$ et $j = k q_1 \mod p$.

Considérons le difféomorphisme ϕ de $\mathbb{S}^3$ défini par $\phi(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$. On a

$$\begin{aligned}\alpha^j_{p,q_2}(\phi(z_1, z_2)) &= \alpha^j_{p,q_2}(z_2, z_1) = (\omega^j z_2, \omega^{j q_2} z_1)\\ &= \phi(\omega^{j q_2} z_1, \omega^j z_2) = \phi(\omega^k z_1, \omega^{k q_1} z_2) = \phi(\alpha^k_{p,q_1}(z_1, z_2))\end{aligned}$$

Comme auparavant l'application ϕ passe aux quotients par les actions α_{p,q_1} et α_{p,q_2}, et donne un difféomorphisme $\hat{\phi}\colon L(p, q_1) \to L(p, q_2)$.