Exposants d'approximation diophantienne

Yann Bugeaud

K. Mahler a proposé en 1932 de classifier les nombres réels au moyen des fonctions w_n définies comme suit. Soient $n \geq 1$ un entier et ξ un nombre réel.On désigne par $w_n(\xi)$ le supremum des nombres reels w pour lesquels il existe une infinité d'entiers H tels que l'inégalité

$$0 << |P(\xi)| \leq H^{-w} \tag{$*$}$$

possède une solution $P(X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré majoré par n et de hauteur majorée par H (la hauteur d'un polynome $P(X)$ est le maximum des modules de ses coefficients). En requerant que l'inégalité (*) soit soluble non plus pour une infinité d'entiers H, mais pour tout H suffisamment grand, nous définissons de la meme manière une autre fonction, notee $\hat{w}_n$. Nous pouvons également considérer les propriétés d'approximation de ξ par des nombres algébriques de degré au plus n, ainsi que l'approximation simultanée de $\xi, \xi^2, \ldots, \xi^n$ par des nombres rationnels de même dénominateur. Ce sont alors au total six exposants d'approximation diophantienne qui apparaissent naturellement.

Dans ce mini-cours, nous faisons le tour d'horizon des différents resultats connus sur ces six exposants, et plus particulierement sur leurs spectres. Alors que le spectre des fonctions w_n est connu depuis 1983 (V. I. Bernik a établi qu'il s'agit de la reunion de l'intervalle $[n, +\infty]$ et des entiers $0, 1, \ldots, n-1$), nous ignorons celui de $\hat{w}_2$. Toutefois, D.Roy a récemment montré que la plus grande valeur prise par la fonction $\hat{w}_2$ est $(3+\sqrt{5})/2 = 2.618\ldots$ .Les techniques utilisées sont très variées et incluent des constructions explicites ainsi que des calculs de dimensions de Hausdorff.