Utilisation de systèmes dynamiques en approximation diophantienne

M.Quéffelec

Les systèmes dynamiques et l'approximation diophantienne interviennent conjointement dans de nombreux problèmes; et si l'on tente de les classer, il apparaît grossièrement deux categories d'exemples :

1. Les exemples ou l'approximation diophantienne intervient comme outil auxiliaire lors de l'étude de systèmes dynamiques; ceux-ci en general dépendent d'un paramètre dont la nature arithmétique influe sur les propriétés du système.

2. Les exemples ou le système dynamique est à l'intérieur de la théorie des nombres et ce sont les techniques de système dynamique (par exemple la théorie ergodique) qui fournissent des résultats sur des nombres ou des classes de nombres.

Nous nous proposons, dans cet exposé, de rappeler rapidement certaines situations dans l'un et l'autre cas, avant de nous intéresser plus particulierement à la transcendance de nombres à développement en fraction continue automatique et à la conjecture de Littlewood, exemples qui relèvent tous deux du second cas.

Pour tout couple (α, β) de $[0,1] \times [0,1]$, on a

$$q\|q\alpha\| \cdot \|q\beta\| << 1$$

pour une infinite d'entiers q. Peut-on rendre cette quantité arbitrairement petite ? C'est-à-dire a-t-on, pour un tel couple, la relation ci-dessous ?

$$(*) \qquad \liminf q\|q\alpha\| \cdot \|q\beta\| = 0\,.$$

C'est la conjecture de Littlewood.

Cette conjecture renvoie à un problème d'approximation simultanée. Elle est vraie dès que l'un des deux nombres n'est pas à quotients partiels bornés. Des résultats récents concernent la mesure de l'ensemble des couples satisfaisant ou non la conjecture (Pollington & Velani, Einsiedler, Katok & Lindenstrauss), mais les généralisations naturelles de l'algorithme des fractions continues en dimension 2 ne donnent à ce jour aucun resultat. Par ailleurs, les seuls exemples explicites de couples (tous deux à quotients partiels bornés) satisfaisant $(*)$, ont ete donnés par de Mathan : ce sont des couples de la forme $(\alpha, 1/\alpha)$, où α a un développement automatique en fraction continue. C'est éssentiellement ce que nous établirons.