A.Broise (mardi 8 juin 8h45/9h45).

" **Sur les exposants caractéristiques de l'algorithme de Jacobi-Perron** "

En dimension d=2, l'algorithme de Jacobi-Perron permet de construire pour tout couple de réels *(x,y)* compris entre 0 et 1 une suite finie ou infinie d'approximations rationnelles simultanées $(p_n/q_n,\ p_n'/q_n)$ La transformation du carré [0,1]x[0,1] associée à cet algorithme est définie par : $T(x,y)=(\{y/x\},\{1/x\})=(y/x - a,\ 1/x - b)$ pour x non nul.
On a alors:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & b_1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$$

où $(x_1,y_1)=T(x,y)$.

Si les x_k ne sont pas nuls, on peut recommencer, on obtient alors :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & b_1 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a_n \\ 0 & 1 & b_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} & p_n \\ p'_{n-2} & p'_{n-1} & p'_n \\ q_{n-2} & q_{n-1} & q_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x_n \\ y_n \end{vmatrix}$$

On montre alors que $\lim(p_n/q_n\ ,p'_n/q_n)=(x,y)$ et qu'il existe une unique mesure de probabilité $\mu=hm$ invariante par T. (m est la mesure de Lebesgue sur le carré et h est une fonction strictement positive, analytique sur chacun des triangles $\{0<x<y<1\}$ et $\{0<y<x<1\}$ et est discontinue au passage de la diagonale.)
On peut alors naturellement se poser la question de la qualité des approximations obtenues par cet algorithme. Elle est reliée aux relations entre les exposants caractéristiques du produit de matrices précédent.
Dans cet exposé, je définirai ces exposants, je montrerai comment ils donnent des renseignements sur la qualité des approximations simultanées obtenues par cet algorithme. Je donnerai alors des explications et un résumé de la démonstration du théorème (que j'ai obtenu avec Y. Guivarc'h) :

Théorème. *Si on note* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *les trois exposants caractéristiques (rangés du plus grand au plus petit, leur somme est nulle) du produit de matrices précédent, on a:*

$$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3 \text{ et } \lambda_2<0.$$

On en déduit que les approximations obtenues ne sont pas trop mauvaises mais pas les meilleures possibles.

En dimension δ quelconque, on peut faire la même chose, mais le résultat obtenu est moins bon, les inégalités du théorème précédent sont :

$$\lambda_1>\lambda_2>\dots>\lambda_\delta>\lambda_{\delta+1} \text{ et } \lambda_2+\lambda_3+\dots+\lambda_\delta<0.$$