Einführung in die generische Darstellungstheorie

Vorbereitende Noten eines Minikurses zu den Doktoranden der Universität Paderborn bestimmt

Aurélien DJAMENT

März 2007

Ich danke dem Leser, dass er die Sprachenirrtümer dieses Textes verzeiht.

Alle Bemerkungen sind willkommen ; sie können an die Anschrift djament@math.univ-paris13.fr geschickt werden.

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Einleitung und Motivationen

In seinem Artikel [Mit72] über die *Ringe mit mehreren Objeckten* erklärt B. Mitchell, dass die linearen Kategorien $\mathcal{A}$ (d.h. deren Morphismenmengen mit einer natürlichen Struktur von abelscher Gruppe versehen sind) als eine natürliche Verallgemeinerung der Ringe betrachtet werden können. Man sieht also die additiven Funktoren (i.e. die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildungen zwischen den Morphismenmengen induzieren) von $\mathcal{A}$ nach der Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen als "Moduln" über dem Ring mit mehreren Objekten $\mathcal{A}$.

In dieser Perspektive besteht unseres Ziel darin, gewisse Funktorkategorien und ihren Verbindungen mit klassischer Darstellungstheorie zu studieren, indem wir die spezifischen Methoden der funktoriellen Ernährung betonen. Das Wort von *generischen Darstellungen* wurde von N. Kuhn in seinen drei Artikeln [Kuh94a], [Kuh94b] und [Kuh95] eingeführt, wo er besonders für die linearen Gruppen und für die Kategorien von Funktoren zwischen Vektorräumen interessiert (es wird auch der hauptsächliche Fall in diesen Vorträgen sein).

Genau ist unser Rahmen der folgende. Seien k ein endlicher Körper und $\mathcal{C}$ eine kleine (oder wesentlich kleine) Kategorie, wir wollen die Kategorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}, k) = \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_k)$ der Funktoren von $\mathcal{C}$ nach der Kategorie $\mathcal{E}_k$ der k-Vektorräume, besonders ihre einfachen Objeckte und ihre homologischen Eigenschaften studieren. Wir setzen oft voraus, dass die Morphismenmengen in $\mathcal{C}$ *endlich* sind : wie wir keine topologische Bedingung aufzwingen, geschehen "Pathologien" ohne diese Voraussetztung, wie in klassischer Darstellungstheorie, wenn wir mit unendlichen Gruppen arbeiten. Wir betrachten hier alle Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{E}_k$, aber wir können zu der additiven Lage von Mitchell zurückgehen, indem wir die Kategorie $\mathcal{C}$ linearisieren.

Einer aus den reichsten Fällen ist derjenige von $\mathcal{F}(k) = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_k^f; k)$, wo $\mathcal{E}_k^f$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{E}_k$ der Räume endlicher Dimension bezeichnet, wo k ein *endlicher* Körper ist.

1 Darstellungen der endlichen Monoiden, globale Eigenschaften der Darstellungen endlicher Familien endlicher Gruppen und Funktorkategorien

Ein erster Beispiel ist das folgende : setzen wir voraus, dass $\mathcal{C}$ nur ein Objekt hat. Diese Kategorie ist dann von ihrem Endomorphismenmonoid M bestimmt — wir notieren $\mathcal{C} = \underline{M}$ — und $\mathcal{F}(\underline{M}; k)$ identifiziert sich mit der Kategorie $k[M] - \mathbf{mod}$ der $k[M]$-Linksmoduln, wo $k[M]$ die Algebra des Monoids M bezeichnet. Wir sehen oft dieses Beispiel als einen elementaren Ziegelstein, zu dem wir suchen, den allgemeinen Fall zurückzubringen. Aber für viele Lagen in den Monoidendarstellungen besitzen die funktoriellen Methoden ein eigenes Interesse.

Beispiel 1.1 (grundsätzlich). Die Darstellungen über k von dem Matrizenmonoid $\mathcal{M}_n(k)$ werden aus den k-Darstellungen der linearen Gruppen $GL_i(k)$ für $i \leq n$ erhalten. Nach Kuhn werden wir die Verbindung mit der Kategorie $\mathcal{F}(k)$ studieren.

Auch um gewisse Fragen über die Darstellungen endlicher *Gruppen* zu studieren, zeigten die funktoriellen Methoden ihre Wirksamkeit. Nehmen wir an, dass wir für die *globalen* (ou *generischen*) Eigenschaften unendlicher Familien von Gruppen wie die linearen oder symetrischen Gruppen uns interessieren. Es ist oft nützlich, über eine einzelne Kategorie zu verfügen, die erlauben, solche Eigenschaften aller dieser Gruppen auszudrücken. Die Funktorkategorien sind daran oft sehr angepasst.

2 Übersicht einiger grundlegenden Ergebnisse

Ein erstes Beispiel ist die folgende Stabilisierungseigenschaft, in [Dwy80] bewiesen.

Wir bemerken, dass $F(k^n)$ für $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}(k)$ natürlich ein $k[GL_n(k)]$-Modul ist ; die offensichtliche Pfeile $k^n \hookrightarrow k^{n+1}$ und $k^{n+1} \twoheadrightarrow k^n$ verleiten lineare Abbildungen $F(k^n) \to F(k^{n+1})$ und $F(k^{n+1}) \to F(k^n)$, die $GL_n(k)$-äquivariant sind. Die Pfeile des folgenden Satzes kommen daraus.

Theorem 2.1 (Dwyer, 1980)**.** *Setzen wir voraus, dass F und G polynomische Objekte von $\mathcal{F}(k)$* [1] *sind (was verifiziert ist, wenn F und G endlicher Länge sind und k endlich ist). So stabilisiert für jede natürliche Zahl i das System*

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^i_{k[GL_{n+1}(k)]}(F(k^{n+1}), G(k^{n+1})) \to \operatorname{Ext}^i_{k[GL_n(k)]}(F(k^n), G(k^n)) \to \cdots \tag{1}$$

Für den folgenden Satz notieren wir, dass die Kategorie $\mathcal{F}(k)$ abelsch ist, und dass homologische Algebra darin gemacht werden kann (wir werden darüber wiederkommen).

Theorem 2.2 (Betley, Suslin, 1999)**.** *Setzen wir voraus, dass k ein endlicher Körper ist, und dass F und G Objekte endlicher Länge von $\mathcal{F}(k)$ sind. So ist der Limes des Systems (1) natürlich zu $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(F, G)$ isomorphisch.*

Dieses merkwürdige Ergebnis ist einige Kommentare wert.

Bemerkung 2.3.

1. Im Theorem 2.1 kommen die Funktorkategorien fast nur dazwischen, um das Resultat zu formulieren. Im Gegenteil benützt Suslin wesentlich ein Kohomologievernichtungsargument in Funktorkategorien, um das Theorem 2.2 zu beweisen (siehe den Anhang von [FFSS99]) ; dieses Argument bringt sich zu keinem analogen Ergebnis in klassischer Darstellungstheorie zurück.

   Betleys Annäherung (siehe [Bet99]) ist unabhängig von Suslins Annäherung und benützt eher die *strikt polynomischen* Funktoren, die wir ein wenig später erwähnen.

2. Das Theorem 2.2 war erfolgreich in Form von “THH (topologische Hochschild Homologie)=stabile K-Theorie”. Nämlich kann der Limes des Systems (1) als eine Gruppe stabiler K-Theorie von k interpretiert werden, während die Gruppen $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(F, G)$ zu THH-Gruppen isomorphisch nach einem Ergebnis von Pirashvili und Walhausen (siehe [PW92]) sind. Diese Idenfizierung blieb lange eine Vermutung.

3. Scorichenko verallgemeinerte den Isomorphismus zwischen stabiler K-Theorie und funktorieller Kohomologie, den das Theorem 2.2 gibt, für irgendein Ring.

4. Das Theorem 2.1 ist bedeutend interessant, um die stabilisierte Kohomologie der linearen Gruppen über den endlichen Körpern (Limes des Systems (1)) zu berechnen, was direkt äussert stark ist. Tatsächlich werden wir sehen, dass zahlreiche Werkzeuge verfügbar sind, um Rechnungen von Ext-Gruppen in $\mathcal{F}(k)$ zu tun.

[1] Diesen Begriff werden wir später definieren.

Die Identifizierung der Funktorkohomologie zu verschiedenen Kohomologietheorien, die in anderen Rahmen erscheinen, beschränkt sich nicht auf den schon erwähnten Fällen der stabilen K-Theorie und von THH.

Das erste Beispiel war die *Mac Lane Kohomologie*, eine Kohomologietheorie für die Ringe, die Mac Lane in den Jahren 1950 aus topologischen Betrachtungen einführte. Diese Theorie wurde wenig studiert, bis Jibladze und Pirashvili identifizierten sie in 1991 (siehe [JP91]) als besonderen Fall der Funktorkohomologie, viel leichter zu studieren.

Die Γ-*Moduln* sind ein anderer wichtiger Fall ; sie sind die Objekte der Kategorie $\mathcal{F}(\mathbf{Menge}_*^e, k)$, wo $\mathbf{Menge}_*^e$ die Kategorie der endlichen punktierten Mengen ist. Die Γ-Moduln sind an verschiedenen Kohomologietheorien gebunden, wie Hoschchilds Kohomologie (siehe [PR02]) und die Kohomologie von André-Quillen (siehe. [Pir03]).

Weisen wir nun das grundlegende Interesse der *strikt polynomischen Funktoren* hin. Sie sind die Objekte einer Funktorkategorie $\mathcal{P}(k)$, die $\mathcal{F}(k)$ ziemlich ähnleln aber, die *genau* zur Darstellungstheorie sich zurückbringt : sie zerlegt sich als die direkte Summe von Modulnkategorien über *Schur Algebren.* Doch benützen die Kohomologierechnungsmethoden in $\mathcal{P}(k)$ sehr ähnlich denjenieden von $\mathcal{F}(k)$ so nicht im Rahmen der klassischen Darstellungstheorie.

Die strikt polynomische Funktoren wurden von Friedlander und Suslin in Artikel [FS97] eingeführt, der einen Isomorphismus zwischen die Ext-Gruppen in $\mathcal{P}(k)$ und Gruppen von *rationneller Kohomologie* [2] des Gruppenschemas GL_n. Das hauptsächliche Ergebnis dieses Artikel ist, dass die rationnelle Komologie $H^*(G, k)$ eines endlichen Gruppenschemas G mit Koeffizienten in k eine endlich generierte k-Algebra ist und, dass die rationnelle Kohomologie von G mit Koeffizienten in einem rationnellen G-Modul endlicher Dimension eine endlich generierte Algebra über $H^*(G, k)$ ist.

Wir hoffen, dass die Zuhörer vom Interesse der Funktorkohomologie überzeugt sind. Weisen wir einige grundsätzliche Resultate darin hin. Das erste wurde in [FLS94] bewiesen, wo es in einer genaueren Form gegeben wird (die multiplikative Struktur wird bestimmt).

Theorem 2.4 (Franjou, Lannes, Schwartz, 1994)**.** *Setzen wir voraus, dass k ein endlicher Körper ist, und notieren wir* I *der Inklusionsfunktor $\mathcal{E}_k^f \to \mathcal{E}_k$.*

Der Vektorraum $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}(k)}(\mathrm{I}, \mathrm{I})$ *ist von Dimension* 1*, wenn i eine gerade natürliche Zahl ist, und ist null, wenn i ungerade ist.*

Im Artikel [FFSS99] machen Franjou, Friedlander, Scorichenko und Suslin Rechnungen, die noch ausgeklügelter sind, gebenb z.B. eine völlige Beschreibung der Ext-Gruppen zwischen zwei äusseren Potenzen oder zwei symetrischen Potenzen. Das Ergebnis ist ziemlich technisch, so geben wir es nicht (die berechnete Objekte sind als drei-graduierte Hopf Algebren ausgedrückt) und wir geben uns zufrieden mit einem viel elementareren Fall, von Franjou in [Fra96] ein wenig früher erhält, den wir am Ende dieses Mini-Kurses beweisen, wenn die Zeit es erlaubt.

Theorem 2.5 (Franjou, 1996)**.** *Die Ext-Gruppen* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}$ *zwischen zwei äusseren Potenzen sind so gegeben :* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^j) \simeq \mathbb{F}_2$ *wenn* $|i - j| = 1$ *und* $i, j > 0$*, und* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^i, \Lambda^j) = 0$ *sonst.*

Erwähnen wir abscliessend, dass der Artikel [FFSS99] genaue Verbindungen zwischen $\mathcal{F}(k)$ und $\mathcal{P}(k)$ erstellt und Ergebnisse in Wörter zugleich von gewöhnlichen Funktoren und strikt polynomischen Funktoren gibt. Wir werden im letzten Teil dieses Vortrags von den Methoden sprechen, die benutzt werden, um diese Rechnungen zu machen.

3 Verbindungen mit algebraischer Topologie

Die anfängliche Motivation für das systematische Studium der Kateorie $\mathcal{F}(k)$ ist die Arbeiten von Henn, Lannes und Schwartz am Anfang der Jahre 1990 (siehe [HLS93]), die eine grundlegende Verbindung zwischen $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ (wo p ist eine Primzahl) und die Kategorie der *unstabilen Moduln über der*

[2] Die Definition dieses Worts übertrifft den Rahmen dieses Kurses.

Steenrod Algebra modulo p. Ohne diese Ergebnisse zu detaillieren, holen wir wieder, dass die Kohomologie mod. p eines topologischen Raums natürlich ein graduierter Modul (sogar eine graduierte Algebra) über der Steenrod Algebra $\mathcal{A}_p$ ist ; dieser Modul besitzt eine zusätliche Eigenschaft : er ist *unstabil*. Die Arbeiten von Lannes (siehe [Lan92]) zeigten, dass das algebraische Studium der Kategorie $\mathcal{U}_p$ der unstabilen Moduln über $\mathcal{A}_p$ tiefe topologische Anwendungen hat.

Der rein algebraische Aspekt der Ergebnisse von Henn, Lannes und Schwartz wurde von Kuhn überarbeitet (cf. [Kuh94a] : man baut $\mathcal{A}_p$ und $\mathcal{U}_p$ nur aus $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$). Powell verallgemeinerte diese Betrachtungen in [Pow05] und berechnete neulich das Endomorphismenring in der Kategorie $\mathcal{U}_2$ der Kohomologie der Eilenberg-Mac Lane Räume, die an die Gruppen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ verbunden sind. Er benutzte dafür die Arbeit von [HLS93] und feinsinnige Rechnungen in der Kategorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$.

Teil II
Formale Eigenschaften der Funktorkategorien

In diesem Teil werden einige allgemeine Eigenschaften der Funktorkategorien des Typs $\mathcal{F}(\mathcal{C}, k)$ gegeben, die von allgemeinen Resultaten der Kategorientheorie gefolgert werden. Man kann die Literaturhinweise [ML71], [Bor94], [Gro57], [Gab62] oder [Pop73] nachsehen.

Voraussetzung 3.1. In der ganzen Folge dieses Vortrags ist $\mathcal{C}$ eine (wesentlich) kleine Kategorie.

Die Kleinheitshypothese erlaubt, zu versichern, dass die Morphismenklassen in $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ Mengen sind.

4 Erste Eingenschaften

Die elementaren folgenden Resultate liegen z.B. in [ML71].

Satz 4.1. *Sei $\mathcal{D}$ eine Kategorie. Wenn $\mathcal{D}$ Summen, Produkte, Limites oder Kolimites besitzt, gilt es auch für $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ und sie werden am Ziel berechnet : für die Produkte z.B. hat man*

$$\Big(\prod_{i\in I} F_i\Big)(E) = \prod_{i\in I} F_i(E)$$

für jedes $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Wir erinnern, dass eine additive Kategorie eine Kategorie mit endlichen Summen und Produkten, die übereinstimmen, ist.

Korollar 4.2. *Wenn $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie ist, ist dann $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ eine additive Kategorie.*

Satz 4.3. *Wenn $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie ist, ist dann $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ eine abelsche Kategorie ; ausserdem testet die Exaktheit sich am Ziel : eine Folge $F \to G \to H$ von Funktoren ist exakt, wenn und nur wenn die Folge $F(E) \to G(E) \to H(E)$ für jedes $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ exakt ist.*

Korollar 4.4. *Die Kategorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ ist eine abelsche Kategorie, die Limites und Kolimites besitzt ; ausserdem sind die filtrierenden Kolimites darin exakt.*

Andere Struktur in $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, die am Ziel berechnet wird : das Tensorprodukt $\otimes$. Wie dasjenige von $\mathcal{E}_k$ definiert es eine symetrische monoidale Struktur über $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$; dieser Bifunktor ist exakt in jeder Variable.

Notierung 4.5.
- Für jeden Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bezeichnet $F_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ der Nachverknüpfungsfunktor mit F, so dass $F_*(G) = F \circ G$.

- Für jeden Funktor$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (mit $\mathcal{D}$ wesentlich klein) und jede Kategorie $\mathcal{A}$ bezeichnet $F^*\mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ der Vorverknüpfungsfunktor mit $F : F^*(G) = G \circ F$.

Bemerkung 4.6. 1. Intuitiv erbt der Nachverknüpfungsfunktor mit F von den Regelmässigkeitseigenschaften von F aber nicht mehr. Wenn z.B. F exakt ist, ist dann F_* exakt.

2. Anderseits sind die Vorverknüpfungsfunktoren immer sehr regelmässig : der Satz 4.1 zeigt, dass sie immer zu Limites und Kolimites kommutieren, und der Satz 4.3 zeigt, dass sie immer exakt sind (wenn das Ziel abelsch ist). In $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ kommutieren sie auch zum Tensorprodukt.

Satz 4.7. *1. Wenn der Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ist, ist dann $F_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ linksadjungiert zu G_*.*

2. Wenn der Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ linksadjungiert zu $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ist, ist dann $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{A}) \to \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ rechtsadjungiert zu G^*.

Definition 4.8 (Dualität zwischen $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ und $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; k)$)**.** Wir notieren $D_{\mathcal{C},k}$ (oder D, wenn es nicht doppeldeutig ist) der Funktor $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)^{op} \to \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}; k)$ verknüpft von der kanonischen Identifizierung $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)^{op} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op}, (\mathcal{E}_k)^{op})$ und des Nachverknüpfungsfunktor mit dem Dualitätsfunktor $d_k : (\mathcal{E}_k)^{op} \to \mathcal{E}_k \quad V \mapsto V^* = \hom_k(V, k)$.

Das d_k rechtsadjungiert zu $d_k^{op} : \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_k^{op}$ ist, zeigt der Satz 4.7, dass $D_{\mathcal{C},k}$ rechtsadjungiert zu $\mathcal{D}^{op}_{\mathcal{C}^{op},k}$ ist. Die Exaktheit von d_k bringt mit ihr diejenige von $D_{\mathcal{C},k}$.

In der Kategorie $\mathcal{F}(k)$ verfügt man über einen *Selbstdualitätsfunktor* denn der Funktor d_k verleitet eine Kategorienäquivalenz $(\mathcal{E}_k^f)^{op} \to \mathcal{E}_k^f$, die erlaubt, $\mathcal{F}(k)$ und $\mathbf{Fct}((\mathcal{E}_k^f)^{op}, \mathcal{E}_k)$ zu identifizieren. Man erhält so einen Funktor $D_k : \mathcal{F}(k)^{op} \to \mathcal{F}(k)$, so dass $D_k(F)(V) = F(V^*)^*$.

Beispiel 4.9. 1. Sei $T^n \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(k)$ der Funktor n-te Tensorpotenz : $T^n(V) = V^{\otimes n}$. Dann ist T^n selbst-dual : $D(T^n) \simeq T^n$ (tatsächlich ist die Sebstdualität eine ein wenig stärkere Bedingung — siehe [PS98] — aber diese Feinsinnigkeit ist nicht wichtig für uns).

2. Sei S^n der Funktor n-te symetrische Potenz und $\Gamma^n(V)$ der Funktor n-te beteilte Potenz : S^n (bzw. Γ^n) erhählt sich durch den Quotient (bzw. die Invarianten) von T^n unter der natürlichen Handlung der symetrischen Gruppe Σ_n bei Faktorenpermutation. Dann sind S^n und Γ^n dual : $D(S^n) \simeq \Gamma^n$ und $D(\Gamma^n) \simeq S^n$.

3. Sei Λ^n der Funktor n-te äussere Potenz. Dieser Funktor ist selbst-dual : $D(\Lambda^n) \simeq \Lambda^n$.

5 standarde projektive und injektive Funktoren

Für $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ wird définit ein Objekt $P_C^{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ (nur P_C notiert, wenn man in $\mathcal{F}(k)$ ist) als der verknüpfte Funktor

$$P_C^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \xrightarrow{\hom_{\mathcal{C}}(C,-)} \mathbf{Menge} \xrightarrow{k[-]} \mathcal{E}_k$$

definiert.

Hier bezeichnet $k[-]$ der Funktor von *k-Linearisierung* : $k[E] = k^{\oplus E}$; dieser Funktor ist linksadjungiert zum Vergissfunktor $\mathbf{Menge} \to \mathcal{E}_k$. Man notiert auch $[e]$, wenn e ein Element einer Menge E ist, das Element der kanonischen Basis von $k[E]$, das e entspricht.

Satz 5.1 (Yoneda Lemma)**.** • Mengenform *: es gibt eine natürliche Bijektion*

$$\hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Menge})}(\hom_{\mathcal{C}}(C, -), F) \simeq F(C)$$

für alle $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $F \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Menge})$.

- k-lineare Form *: es gibt eine natürliche Bijektion*

$$\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P^{\mathcal{C}}_C, F) \simeq F(C)$$

für alle $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ *und* $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.

Beweis. Für die klassische Mengenform errinert man nur, wie die Bijektion sich erhält :

$$\hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Menge})}(\hom_{\mathcal{C}}(C,-),F) \to F(C) \qquad u \mapsto u_C(id_C)$$

in eine Richtung und

$$F(C) \to \hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Menge})}(\hom_{\mathcal{C}}(C,-),F) \qquad c \mapsto (f \in \hom_{\mathcal{C}}(C,D) \mapsto F(f)(c) \in F(D))_{D\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$$

in die andere.

Der k-linear Fall folgert sich daraus mit einem Adjunktionsargument : da $k[-]$ linksadjungiert zum Vergiss $O : \mathbf{Menge} \to \mathcal{E}_k$ ist, ist die Nachverknüpfung $k[-]_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Menge}) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ linsadjungiert zu O_*. So gibt es natürliche Isomorphismen

$$\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P^{\mathcal{C}}_C, F) = \hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(k[-]_*(\hom_{\mathcal{C}}(C,-)),F) \simeq \hom_{\mathbf{Fct}(\mathcal{C},\mathbf{Menge})}(\hom_{\mathcal{C}}(C,-),O_*(F))$$
$$\simeq O_*(F)(C) = F(C).$$

□

Dieser Satz und sein folgendes Korollar bilden das wichtigste Grundwerkzeug im Studium der Kategorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.

Korollar 5.2. 1. *Für jedes* $C \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ *ist der Funktor* $P^{\mathcal{C}}_C$ *ein projektives Objekt von* $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$.

2. *Wenn* C *ein Skelett* $\operatorname{Skl}(\mathcal{C})$ *von* $\mathcal{C}$ *durchgeht, beschreiben die* $P^{\mathcal{C}}_C$ *eine Menge Generatoren der Kategorie* $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ *; genauer ist für jedes* $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ *der tautologische Morphismus*

$$\bigoplus_{\substack{C\in\operatorname{Skl}(\mathcal{C})\\ c\in F(C)}} P^{\mathcal{C}}_C \to F$$

(deren Komponente $P^{\mathcal{C}}_C \to F$ *von* $c \in F(C)$ *indexiert der Morphismus durch das Yoneda Lemma* c *entsprechend ist) surjektif.*

3. *Die Kategorie* $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ *ist eine* Grothendieck Kategorie*, d.h. eine abelsche Kategorie mit exakten Kolimites und einem Generator.*

Errinert, dass eine Menge projektiver Objekte einer abelschen Kategorie mit Summen $\mathcal{A}$ *generativ* ist, wenn es ein Epimorphismus einer anpassenden direkten Summe Objekte von $\mathcal{E}$ auf jedes Objekt von $\mathcal{A}$ existiert.

Die Funktoren $P^{\mathcal{C}}_C$ werden *standarde projektive* Funktoren von $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ genannt.

Beispiel 5.3 (Tensorprodukt standarder projektiver Funktoren). Setzen wir voraus, dass die Kategorie $\mathcal{C}$ endliche Koprodukte besitzt. So gibt es einen natürlichen Isomorphismus $P^{\mathcal{C}}_{C\coprod D} \simeq P^{\mathcal{C}}_C \otimes P^{\mathcal{C}}_D$ (es gilt besonders in $\mathcal{F}(k)$). Daraus wird leicht gefolgert, dass das Tensorprodukt zwei projektiver Objekte von $\mathcal{F}(\mathcal{C},k)$ noch projektiv ist. Das ist nicht im Allgemeinen, wenn $\mathcal{C}$ keine endliche Koprodukte besitzt (Übung).

Korollar 5.4. *Seien* C *und* D *Objekte von* $\mathcal{C}$.

1. *Der* k*-Vektorraum* $\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P^{\mathcal{C}}_C, P^{\mathcal{C}}_D)$ *ist natürlich isomorphisch zu* $k[\hom_{\mathcal{C}}(D,C)]$.

2. *Die* k*-Algebra* $\operatorname{End}_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(P^{\mathcal{C}}_C)$ *ist natürlich isomorphisch zur dualen Algebra der* k*-Algebra* $k[\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(C)]$ *des Monoids* $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(C)$.

Die letzte Behauptung zeigt, dass das Problem, $P_C^{\mathcal{C}}$ in direkte Summe unzerlegbarer projektiver Funktoren zu zerlegen, sich zurückbringt, die Algebra $k[\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)]$ in direkte Summe unzerlegbarer projektiver $k[\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)]$-Moduln zu zerlegen. *Es ist so rein ein Problem von k-Darstellungen des Monoids* $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(C)$. Wenn dieses Monoid endlich ist (besonders, wenn man voraussitzt, dass die Morphismenmengen in $\mathcal{C}$ endlich sind), hat das Problem eine Lösung ; $P_C^{\mathcal{C}}$ zerlegt sich in endliche direkte Summe unzerlegbarer projektiver Funktoren, die ausserdem einzel bis auf Isomorphismus und Faktorenordnung sind.

Ein Beispiel expliziter projektiver in $\mathcal{F}(k)$. Wir betrachten den Funktor $\mathrm{I}(\simeq \Lambda^1 \simeq T^1 ...)$ der Einleitung. Die Folge

$$k^\times \otimes P_{k^2} \xrightarrow{g} P_k \xrightarrow{f} \mathrm{I} \to 0,$$

wo f dem Element 1 von $k = \mathrm{I}(k) \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(P_k, \mathrm{I})$ und g dem Element $\lambda \mapsto [(\lambda, 1)] - \lambda[(1,0)] - [(0,1)]$ von $k[k^2]^{k^\times} \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(k^\times \otimes P_{k^2}, P_k)$ entspricht, ist exakt.

Explizit hat man $f([v]) = v$ und $g([v,w]) = [\lambda v + w] - \lambda[v] - [w]$ für $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}_k^f$ und $v, w \in V$.

Wenn k ein Primkörper ist, gibt es eine Präsentation

$$P_{k^2} \xrightarrow{g} P_k \xrightarrow{f} \mathrm{I} \to 0$$

(man behält nur $\lambda = 1$).

Die standarden Injektiven Funktoren von $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$. Es handelt sich um die duale Lage der vorigen ; für $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op}$ stellt man

$$I_C^{\mathcal{C}} = D_{\mathcal{C}^{op},k}(P_C^{\mathcal{C}^{op}}).$$

In $\mathcal{F}(k)$ werden diese Funktoren nur I_V notiert.

Explizit hat man

$$I_C^{\mathcal{C}}(A) = k^{\hom_{\mathcal{C}}(A,C)}$$

denn der Dual des Vektorraums $k[E]$ ist kanonische isomorphisch zum Vektorraum k^E der (Mengen)abbildungen von E nach k.

Beispiel 5.5. Wenn die Kategorie $\mathcal{C}$ endliche Produkte besitzt, und wenn ihre Morphismenmengen endlich sind, hat man $I_{C\times D}^{\mathcal{C}} \simeq I_C^{\mathcal{C}} \otimes I_D^{\mathcal{C}}$. Es ist besonders der Fall in $\mathcal{F}(k)$, wenn der Körper k endlich ist.

Aus Adjunktion gibt es natürliche Isomorphismen

$$\hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C};k)}(F, I_C^{\mathcal{C}}) \simeq \hom_{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op};k)}(P_C^{\mathcal{C}^{op}}, D(F)) \simeq D(F)(C) = F(C)^*.$$

Daraus wird gefolgert :

Satz 5.6. *1. Die Funktoren $I_C^{\mathcal{C}}$ sind injektiv in $\mathcal{F}(C; k)$. Sie werden* standarde injektive *von $\mathcal{F}(C; k)$ genannt.*

2. Sie bilden eine Familie Kogeneratoren in $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$, wenn C ein Skelett von $\mathcal{C}$ durchgeht.

Beispiel 5.7 (grundsätzlich). Betrachten wir den Morphismus $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S^n \to I_k$ von $\mathcal{F}(k)$, deren Komponente $S^n \to I_k$ $1 \in k \simeq S^n(k)^* \simeq \hom_{\mathcal{F}(k)}(S^n, I_k)$ entspricht. Auf einem Vektorraum V wird er von der Abbildung $S^*(V) \to k^{V^*}$ gegben, die einem Element von $S^*(V)$ (d.h. ein Polynom auf V^*), die verleitete polynomische Funktion $V^* \to k$ verbindet (es ist doch ein k-Algebramorphismus). Dieser Morphismus ist injektiv, wenn k unendlich ist, und ist surjketiv, wenn k endlich ist. Wir werden darüber wiederkommen.

6 Theorem von Morita-Freyd

Theorem 6.1. *Seien $\mathcal{A}$ eine k-lineare (d.h. deren Morphismenmengen mit einer natürlichen Struktur k-Vektorräumen kommen) abelsche Kategorie, die (willkürliche) direkte Summen besitzt, und $\mathcal{P}$ eine Menge projektiver Generatoren von $\mathcal{A}$, die* klein *seien, d.h. so das die Funktoren* $\hom_{\mathcal{A}}(P,-)$ *mit (willkürlichen) direkten Summen kommutieren.*

Dann ist $\mathcal{A}$ äquivalent zur Kategorie $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ der k-linearen (d.h. k-lineare Abbildungen zwischen den Morphismenmengen induzierenden) Funktoren von $\mathcal{P}^{op}$ (wo man $\mathcal{P}$ als eine volle Unterkategorie von $\mathcal{A}$ sieht) nach $\mathcal{E}_k$.

Skizze des Beweises. Man definiert einen Funktor $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, indem man einem Objekt A die Beschränkung des Funktors $\hom_{\mathcal{A}}(-,A)$ zuweist. Das Yoneda Lemma und die Tatsache, dass $\mathcal{P}$ eine Menge Generatoren von $\mathcal{A}$ ist, setzt voraus, dass α ein volltreuer Funktor ist.

Die Hypothese, dass die Elemente von $\mathcal{P}$ projektiv und kein sind, setzt voraus, dass der Funktor α zu Kolimites kommutiert. Um zu zeigen, dass α wesentlich surjektiv ist, genügt so, zu beweisen (man weiss schon, dass α volltreu ist), dass er eine Mengen von Generatoren der Zielskategorie $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ erreicht. Dafür stellt man fest, dass die Elemente von $\mathcal{P}$ von α auf die standarden projektiven Generatoren von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ (vom Yoneda Lemma gegeben) geschickt werden. □

Bemerkung 6.2.

- Das klassische Moritas Theorem erhält sich, wenn $\mathcal{A}$ eine Modulnkategorie ist, und $\mathcal{P}$ nur ein Element hat. Die vorige Fassung stammt von Freyd.

- Wenn man für $\mathcal{A}$ die Kategorie $\mathcal{F}(\mathcal{C},k)$ und für $\mathcal{P}$ die Menge der standarden projektiven Generatoren von $\mathcal{C}$ (sich zu einem Skellet beschränken) nimmt, zeigt das Korollar 5.4, dass die k-linearen Funktoren von $\mathcal{P}^{op}$ nach $\mathcal{E}_k$ zur Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{E}_k$ identifizieren.

- Wenn $\mathcal{P}$ ein einzelnes Element P hat, ist di Kategorie $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ äquivalent zur Kategorie der $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$-Rechtsmoduln.

- Wenn $\mathcal{P}$ endlich ist, kann man sich zum Falle eines einzelnen Element zurückbringen, indem man die direkte Summe seiner Elemente betrachtet. Folglich wird mit den standarden projektiven Generatoren gesehen, dass $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ zu einer Modulnkategorie äquivalent ist, wenn $\mathcal{C}$ ein kleines Skelett hat.

Beispiel 6.3 (grundsätzlich). Betrachten wir die≪ verstümmelte ≫ Kategorie $\mathcal{E}_k^{\leq n}$ der k-Vektorräume von Dimension $\leq n$. Sie ist vom kleinen projektiven Funktor $P_{k^n}^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$ generiert — nämlich ist V für $\dim V \leq n$ direkter Faktor von k^n so ist $P_V^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$ direkter Faktor von $P_{k^n}^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$. Da das Endomorphismenring von $P_{k^n}^{\mathcal{E}_k^{\leq n}}$ zu dualem Ring von $k[\mathcal{M}_n(k)]$ isomorphisch ist, wird aus Freyd-Morita Theorem gefolgert, dass $\mathcal{F}(\mathcal{E}_k^{\leq n};k)$ äquivalent zu $k[\mathcal{M}_n(k)]-\mathbf{mod}$ ist.

7 Adjunktionen

Das folgende Resultat ist ein Korollar des Theorems der adjungierten Funktoren von Freyd.

Theorem 7.1. *Seinen $\mathcal{A}$ eine Grothendieck Kategorie und $\mathcal{C}$ eine (willkürlige) Kategorie. Jeder Funktor $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$, der zu Limites (bzw. Kolimites) kommutiert, besitzt einen Linksadjungiert (bzw. Rechtsadjungiert).*

In der Kategorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ wird das folgende nützliche Korollar daraus gefolgert.

Korollar 7.2.

1. *Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor (mit $\mathcal{D}$wesentlich klein). Der Vorwerknüpfungsfunktor $F^* : \mathcal{F}(\mathcal{D};k) \to \mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ ist linksadjungiert und rechtsadjungiert.*

2. *Sei A ein Objekt von $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$. Der Endofunktor $-\otimes A$ von $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ besitzt einen Rechtsadjungiert. Wenn A Werte endlicher Dimension nimmt, besitzt er auch einen Linksadjungiert.*

Wir interessieren uns jetzt für (duale) Fälle, in den ein Vorverknüpfungsfunktor und ein Tensorproduktsfunktor adjungiert sind.

Satz 7.3. *Seien F ein Endofunktor von $\mathcal{C}$ und T ein Objekt von $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathbf{Menge})$, so dass es eine Bijektion gibt, wie folgt :*

$$\hom_{\mathcal{C}}(F(V), W) \simeq \hom_{\mathcal{C}}(V, W) \times T(W)$$

die natürlich in den Objekten V und W von $\mathcal{C}$ ist.

Dann ist der Endofunktor F^* von $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ rechtsadjungiert zu $- \otimes k[T]$.

Beweis. Die Hypothese lifert durch Linearisierung einen natürlichen Isomorphismus

$$P_V^{\mathcal{C}} \otimes k[T] \simeq P_{F(V)}^{\mathcal{C}}.$$

Sei G der rechtsadjungierte Funktor zu $- \otimes k[T]$. Für alle $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ hat man natürliche Isomorphismen

$$G(A)(V) \simeq \hom_{\mathcal{F}(C;k)}(P_V^{\mathcal{C}}, G(A)) \simeq \hom_{\mathcal{F}(C;k)}(P_V^{\mathcal{C}} \otimes k[T], A)$$

$$\simeq \hom_{\mathcal{F}(C;k)}(P_{F(V)}^{\mathcal{C}}, A) \simeq A(F(V)) = F^*(A)(V),$$

woraus wird der Satz gefolgert. □

Ein grundlegender Fall dieses Satzes ist derjenige, in dem angenommen wird, dass $\mathcal{C}$ enfliche Koprodukte besitzt : die Funktoren $F = - \coprod C$ und $T = \hom_{\mathcal{C}}(C, -)$ passen für jedes $C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ an.

Der folgende Satz ist die duale Variante des Satzes 7.3 ; sie wird analog bewiesen.

Satz 7.4. *Seien F ein Endofunktor von $\mathcal{C}$ und T ein Objekt von $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Menge}^e)$ (wo $\mathbf{Menge}^e$ désigne die Kategorie der endlichen Mengen bezeichnet), so dass es eine Bijektion gibt, wie folgt :*

$$\hom_{\mathcal{C}}(V, F(W)) \simeq \hom_{\mathcal{C}}(V, W) \times T(V)$$

die natürlich in den Objekten V und W von $\mathcal{C}$ ist.

Dann ist der Endofunktor F^* von $\mathcal{F}(\mathcal{C}; k)$ linksadjungiert zu$- \otimes k^T$.

Ein grundlegendes Beispiel wird erhalten, wenn $\mathcal{C}$ endliche Produkte und endliche Morphismenmengen hat : die Funktoren $F = - \times C$ et $T = \hom_{\mathcal{C}}(-, C)$ passen dann an.

Verschiebunsfunktoren. Setzen wir voraus, dass $\mathcal{C}$ eine *additive* Kategorie ist und, dass ihre Morphismenmengen endlich sind (es ist besonders der Fall in $\mathcal{E}_k^f$, wenn k endlich ist). Definieren wir für jedes Objekt A von $\mathcal{C}$ der *Verschiebunsfunktor* $\Delta_A^{\mathcal{C}}$ (oder nur Δ_A) als die Vorverknüpfung mit $- \oplus A$. Die vorigen Sätze zeigen, dass $\Delta_A^{\mathcal{C}}$ rechtsadjungiert zu $- \otimes P_A^{\mathcal{C}}$ und linksadjungiert zu $- \otimes I_A^{\mathcal{C}}$ ist.

Differenzfunktor. In der vorigen Situation ist die Vereinigung $A \mapsto \Delta_A^{\mathcal{C}}$ funktoriell. Da die Verkettung $0 \to A \to 0$ die Identität ist, erhält man eine Verkettung $id \simeq \Delta \to \Delta_A \to id$ gleich der Identität, d.h. eine Zerlegung $\Delta_A^{\mathcal{C}} \simeq id \oplus \bar{\Delta}_A^{\mathcal{C}}$. Der Funktor $\bar{\Delta}_A^{\mathcal{C}}$ ist rechtsadjungiert zu $- \otimes \bar{P}_A^{\mathcal{C}}$ und linksadjungiert zu $- \otimes \bar{I}_A^{\mathcal{C}}$, wo $\bar{P}_A^{\mathcal{C}}$ und $\bar{I}_A^{\mathcal{C}}$ durch die Zerlegungen $P_A^{\mathcal{C}} \simeq k \oplus \bar{P}_A^{\mathcal{C}}$ und $I_A^{\mathcal{C}} \simeq k \oplus \bar{I}_A^{\mathcal{C}}$ definiert werden.

In $\mathcal{F}(k)$ wird der Funktor $\bar{\Delta}_k$ einfach Δ notiert und *Differenzfunktor* genannt ; das ist eines der grundsätzlichen Werzeuge, um die Kategorie $\mathcal{F}(k)$ zu studieren.

Teil III
Klebensdiagramme, einfache Funktoren und polynomische Funktoren

Das Ziel dieses Teils besteht daraus, einige Methoden zu beschreiben, um die einfachen Objekte einer Funktorkategorie $\mathcal{F}(\mathcal{C};k)$ zu klassifizieren und besonders sie in $\mathcal{F}(k)$ anzuwenden.

8 Wiederholungen über die abelschen Quotientekategorien und die Klebensdiagramm

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Definition 8.1. Eine *dichte Unterkategorie* von $\mathcal{A}$ ist eine volle Unterkategorie $\mathcal{C}$, wenn sie 0 enthält, und wenn die folgende Bedingung erfüllt ist : für jede exakte Sequenz $0 \to B \to A \to C \to 0$ von $\mathcal{A}$ gehört A zu $\mathcal{C}$, wenn und nur wenn B und C zu $\mathcal{C}$ gehören.

Man stellt fest, dass der Kern jedes *exakten* Funktors von $\mathcal{A}$ nach einer anderen abelschen Kategorie (d.h. die volle Unterkategorie der Objkten von $\mathcal{A}$, die auf 0 von diesem Funktor geschickt sind) eine dichte Unterkategorie von $\mathcal{A}$ ist. Das Gegenteil wird vom Begriff abelscher Quotientekategorie gegeben : wenn $\mathcal{C}$ eine dichte Unterkategorie von $\mathcal{A}$ (*lokal klein* anzunehemen, d.h. so dass die Unterobjekte jedes Objekts von $\mathcal{A}$ eine Menge bilden — es gilt für eine Grothendieck Kategorie) ist, hat die Kategorie $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ die selben Objekte wie $\mathcal{A}$ und ihre Morphismen werden wie folgt gegeben :

$$\hom_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}(X,Y) = \operatorname*{colim}_{\substack{X'\subset X, X/X'\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\\ Y'\subset Y, Y'\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}}} \hom_{\mathcal{A}}(X', Y/Y').$$

Die Morphismenverknüpfung in $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ wird von derjenigen von $\mathcal{A}$ in einem angepassten Sinn gefolgert, so dass es einen Funktor $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ gibt, der die Identität über die Objekte und die kanonische Abbildung über die Morphismen gleicht. Dieser Funktor wird *kanonischer Funktor* genannt.

Man zeigt, dass $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie ist, dass der kanonische Funktor exakt ist und $\mathcal{C}$ als Kern hat ; ausserdem faktorisiert sich jeder exakte Funktor von $\mathcal{A}$ nach einer anderen abelschen Kategorie, dessen Kern $\mathcal{C}$ enthält, auf einzige Weise als ein (exakter) Funktor von Quelle $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ durch den kanonischen Funktor.

Definition 8.2 (Klebendiagramme)**.** Ein *Klebendiagramm* ist ein Diagramm der Typ

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "i" description] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e" description] & \mathcal{B} \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"] \end{tikzcd}$$

wo :

- $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ sind abelsche Kategorien.
- Der Funktor l ist linksadgungiert zu e und e ist linksadgungiert zu r (besonders ist e exakt).
- Die Einheit $id_{\mathcal{B}} \to el$ und die Koeinheit $er \to id_{\mathcal{B}}$ sind Isomorphismen.
- Der Funktor q ist linksadgungiert zu i und i ist linksadgungiert zu p (besonders ist i exakt).
- Die Einheit $id_{\mathcal{C}} \to pi$ und die Koeinheit $qi \to id_{\mathcal{C}}$ sind Isomorphismen.
- Der Funktor i ist eine volltreue Einbettung von Bild $ker\, e$ (besonders identifiziert $i\,\mathcal{C}$ zu einer dichten Unterkategorie von $\mathcal{A}$).

Warnung : die folgenden Literaturhinweise erwähnen nur die Hinweisungen, die im Text zietiert werden ; sehr unvollständig versteckt diese Bibliographie nicht alle wichtige Bezüge im Bereich.

Die völlige Bibliographie dieses Minikurzes ist an folgender Seite verfügbar.

http://www.math.univ-paris13.fr/~djament/Biblio-D.html

Literatur

[Bet99] S. Betley – "Stable K-theory of finite fields", *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.

[Bor94] F. Borceux – *Handbook of categorical algebra. 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Basic category theory.

[Dwy80] W. G. Dwyer – "Twisted homological stability for general linear groups", *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.

[FFPS03] V. Franjou, E. M. Friedlander, T. Pirashvili & L. Schwartz – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[FFSS99] V. Franjou, E. M. Friedlander, A. Scorichenko & A. Suslin – "General linear and functor cohomology over finite fields", *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.

[FLS94] V. Franjou, J. Lannes & L. Schwartz – "Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis", *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.

[Fra96] V. Franjou – "Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques", *J. Algebra* **179** (1996), no. 2, p. 501–522.

[FS97] E. M. Friedlander & A. Suslin – "Cohomology of finite group schemes over a field", *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.

[Gab62] P. Gabriel – "Des catégories abéliennes", *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[Gre80] J. A. Green – *Polynomial representations of* GL_n, Lecture Notes in Mathematics, vol. 830, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[Gro57] A. Grothendieck – "Sur quelques points d'algèbre homologique", *Tôhoku Math. J. (2)* **9** (1957), p. 119–221.

[HLS93] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – "The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects", *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.

[Jam78] G. D. James – *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, Berlin, 1978.

[JP91] M. Jibladze & T. Pirashvili – "Cohomology of algebraic theories", *J. Algebra* **137** (1991), no. 2, p. 253–296.

[Kuh94a] N. J. Kuhn – "Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I", *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.

[Kuh94b] — , "Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II", *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.

[Kuh95] — , "Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III", *K-Theory* **9** (1995), no. 3, p. 273–303.

[Kuh02] — , "A stratification of generic representation theory and generalized Schur algebras", *K-Theory* **26** (2002), no. 1, p. 15–49.

[Lan92] J. Lannes – "Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 135–244, avec un appendice de Michel Zisman.

[Mac95] I. G. Macdonald – *Symmetric functions and Hall polynomials*, second éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[Mit72] B. Mitchell – "Rings with several objects", *Advances in Math.* **8** (1972), p. 1–161.

[ML57] S. Mac Lane – "Homologie des anneaux et des modules", in *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, Georges Thone, Liège, 1957, p. 55–80.

[ML71] — , *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[Pir02] T. Pirashvili – "Polynomial functors over finite fields (after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin)", *Astérisque* (2002), no. 276, p. 369–388, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.

[Pir03] — , "André-Quillen homology via functor homology", *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 6, p. 1687–1694 (electronic).

[Pop73] N. Popescu – *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, London, 1973, London Mathematical Society Monographs, No. 3.

[Pow98] G. M. L. Powell – "The structure of indecomposable injectives in generic representation theory", *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.

[Pow05] — , "Unstable modules over the Steenrod algebra revisited", disponible sur http://www.math.univ-paris13.fr/~powell/home/preprints.html, 2005.

[PR02] T. Pirashvili & B. Richter – "Hochschild and cyclic homology via functor homology", *K-Theory* **25** (2002), no. 1, p. 39–49.

[PS98] L. Piriou & L. Schwartz – "Extensions de foncteurs simples", *K-Theory* **15** (1998), no. 3, p. 269–291.

[PW92] T. Pirashvili & F. Waldhausen – "Mac Lane homology and topological Hochschild homology", *J. Pure Appl. Algebra* **82** (1992), no. 1, p. 81–98.