K-théorie et opérateurs de Fredholm

Notes d'exposé du groupe de travail sur l'invariant de Bauer-Furuta

Aurélien DJAMENT

Mars 2012

Table des matières

1 Rappel de la définition classique de la K-théorie (réelle, topologique, de degré 0) 1

2 Lien avec les opérateurs de Fredholm 2

3 Applications de Fredholm fibrées, espaces de Thom 4

4 Homotopie stable équivariante, spectres de Thom 5

5 Applications de Fredholm fibrées et homotopie stable équivariante 5

1 Rappel de la définition classique de la K-théorie (réelle, topologique, de degré 0)

(Une référence classique pour ces rappels est le livre [Ati67] d'Atiyah.)

On ne rappelle pas ici la définition d'un fibré vectoriel, ni les opérations usuelles sur iceux : $\oplus$, $\otimes$, **Hom** (qui existent aussi bien de façon interne — sur une même base — qu'externe), la fonctorialité contravariante (image inverse). Il y a une notion de morphisme de fibrés vectoriels *dont les images, noyaux, conoyaux* (toujours définis au sens faisceautique, ou d'applications au-dessus de la base) *ne sont des fibrés vectoriels que si le rang est localement constant.*

Remarque 1.1. Pour nous, tous les fibrés vectoriels seront *réels.* On peut bien sûr faire des choses complètement analogues en complexe voire en quaternionique.

Dans cette section, on ne s'intéressera qu'à des fibrés vectoriels dont les fibres sont de dimension finie (ce qui n'est bien sûr pas la seule situation intéressante, comme on le verra ensuite).

Pour que les fibrés vectoriels sur un espace topologique X se comportent comme on l'attend, il faut en général supposer que X est *compact*, et éventuellement pas trop méchant d'un point de vue homotopique (localement contractile, ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe...), mais cette dernière restriction n'est en général même pas nécessaire.

Proposition 1.2. *Soit X un espace topologique* compact.

- *Pour tout fibré vectoriel de rang fini η sur X, il existe un fibré vectoriel ξ de rang fini sur X tel que le fibré $\eta \oplus \xi$ soit trivial.*
- *Le foncteur de la catégorie des fibrés vectoriels de rang fini sur X vers la catégorie des modules projectifs de type fini sur la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues (ou lisses) de X vers $\mathbb{R}$ associant à un fibré ses sections globales est une équivalence de catégories.*

Le groupe abélien $K^0(X)$ (foncteur contravariant en l'espace compact X) est le groupe de Grothendieck de la catégorie des fibrés vectoriels de rang fini sur X.

Proposition 1.3. *Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues, X étant un espace compact, et η un fibré vectoriel sur Y. Si f et g sont homotopes, alors les fibrés vectoriels $f^*\eta$ et $g^*\eta$ sur X sont isomorphes.*

Cela permet de donner une description fonctorielle de $K^0(X)$ par classes d'homotopie.

Structures euclidiennes On peut aussi considérer des fibrés munis d'une structure plus riche : des fibrés euclidiens (ou hilbertiens si l'on ne se restreint pas à la dimension finie). Cela ne change essentiellement rien : tout fibré vectoriel de dimension finie peut être muni d'une structure euclidienne (tout cela est étroitement relié à ce que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inclusion de $O_n(\mathbb{R})$, sous-groupe compact maximal, dans $GL_n(\mathbb{R})$, est une équivalence d'homotopie), et deux fibrés euclidiens sont isomorphes si et seulement si les fibrés vectoriels sous-jacents sont isomorphes.

Remarque 1.4. On n'a défini que K^0, alors que les K^n existent pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (on n'en a pas besoin pour Bauer-Furuta) ; c'est la périodicité de Bott qui permet de définir commodément ce foncteur cohomologique sur les espaces compacts.

Situation équivariante Soit G un groupe topologique (dans [BF04], ce sera un groupe de Lie compact). On peut étendre les considérations précédentes au cas d'espaces munis d'une action (continue) de G : un G-fibré vectoriel sur un G-espace X est un fibré vectoriel $p : E \to X$ tel que E est muni d'une action de G rendant p équivariant et que, pour tous $g \in G$ et $x \in X$, l'action de G induise une application *linéaire* $p^{-1}(x) \to p^{-1}(g.x)$. On a alors une notion de K-théorie G-équivariante $K^0_G(X)$ qui, au moins si la théorie des représentations de G est sympathique (par exemple, si G est un groupe de Lie compact), se comporte de façon analogue à $K(X)$.

2 Lien avec les opérateurs de Fredholm

Les fibrés vectoriels de dimension infinie se comportent de façon tout à fait différente de ceux de dimension finie, comme l'illustre le théorème profond suivant :

Théorème 2.1 (Kuiper). *Tout fibré vectoriel dont les fibres sont des espaces de Hilbert de dimension infinie et séparables et dont la base est un espace compact raisonnable (CW-complexe fini) est trivial.*

Comme [BF04] ne s'intéresse qu'à des fibrés hilbertiens, on voit que la considération des seuls fibrés vectoriels n'est pas suffisante pour obtenir quelque chose d'intéressant.

En revanche, les *morphismes* entre fibrés hilbertiens seront adaptés à la K-théorie. Bauer et Furuta nomment *cocyle* sur un espace compact X (qu'ils supposent même être un CW-complexe fini, mais la compacité suffit — voir l'appendice de [Ati67]) tout morphisme entre deux fibrés vectoriels hilbertiens sur X — ici fibré hilbertien signifie que les fibres sont des espaces de Hilbert de dimension infinie et séparables. (Noter que, bien que ces deux fibrés soient nécessairement triviaux d'après le théorème susmentionné, et en particulièrement isomorphes entre eux, aucune donnée d'isomorphisme ou de trivialisation n'est incluse dans la définition.) Les opérations usuelles sont disponibles sur les fibrés hilbertiens et leurs cocyles.

Une variante consiste à considérer, plutôt que seulement des morphismes entre fibrés hilbertiens sur X, des complexes finis de tels fibrés. C'est l'approche de Segal dans [Seg70].

Remarque 2.2. Comme l'indique Segal à la fin de [Seg70], l'un des intérêts de la définition de la K-théorie à l'aide de complexes de Fredholm réside dans la généralisation commode au cas d'une base non compacte. Nous n'en aurons néanmoins pas usage pour l'invariant de Bauer-Furuta.

L'espace compact X étant fixé, on dit que :
- deux cocycles λ et μ sur X sont homotopes s'il existe un cocycle ξ sur $X \times [0,1]$ tel que $i_0^*\xi \simeq \lambda$ et $i_1^*\xi \simeq \mu$;
- un cocyle sur X est trivial si c'est un isomorphisme de fibrés hilbertiens ;
- deux cocyles λ et μ sur X sont équivalents s'il existe un cocyle trivial τ sur X tel que $\lambda \oplus \tau$ et $\mu \oplus \tau$ soient isomorphes.

Le monoïde commutatif $k(X)$ des classes d'équivalence de cocycles sur X (muni de l'opération induite par la somme directe) est en fait un groupe, canoniquement isomorphe à $K^0(X)$ (on suppose toujours X compact). Sans le démontrer, on va expliquer sommairement comment on procède pour construire un morphisme naturel de ce monoïde vers $K^0(X)$ qui sera un isomorphisme.

De plus, ce monoïde commutatif s'identifie canoniquement aux classes d'homotopie d'applications continues de X dans le sous-monoïde $\mathcal{F}$ des opérateurs de Fredholm du monoïde multiplicatif des applications linéaires continues $H \to H$, où H est un espace de Hilbert (de dimension infinie, séparable) fixé (muni de la topologie de la norme : c'est un sous-monoïde topologique de $End(H)$).

L'isomorphisme $k(X) \to K(X)$ s'obtient moralement en associant à un cocyle λ le fibré virtuel donné par son indice (fibre à fibre), i.e. la classe $[Ker\,\lambda] - [Coker\,\lambda]$ dans $K^0(X)$. *Le problème est que ce n'est pas toujours défini : si le rang de λ n'est pas localement constant, noyau et conoyau ne sont pas des fibrés vectoriels.* On peut toutefois contourner cette difficulté, grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.3. *1. Soient $T \in \mathcal{F}$ et V un sous-espace fermé de codimension finie de H tel que $V \cap Ker\,T = 0$. Il existe un voisinage U de T dans $End(H)$ tel que $V \cap Ker\,S = 0$ pour tout $S \in U$ et que la restriction à U du morphisme de fibrés hilbertiens triviaux tautologique $\phi : V \times \mathcal{F} \hookrightarrow H \times \mathcal{F} \to H \times \mathcal{F}$ ait pour quotient un fibré vectoriel trivial.*

2. Soit $T : X \to \mathcal{F}$ une application continue de source X compacte. Il existe un sous-espace V fermé de H de codimension finie tel que $V \cap KerT(x) = 0$

pour tout $x \in X$ et que le morphisme de fibrés vectoriels triviaux sur X

$$V \times X \hookrightarrow H \times X \to H \times X$$

où la deuxième flèche correspond canoniquement à T via l'adjonction exponentielle ait un conoyau qui soit encore un fibré vectoriel sur X.

L'indice de l'application continue T est par définition la classe du fibré trivial sur X de fibré H/V moins celle du fibré précédent dans $K^0(X)$. Bien sûr, il faut vérifier que cela ne dépend pas du choix de V, puis que c'est invariant par équivalence et compatible à la somme de Whitney. La démonstration que le morphisme $[X, \mathcal{F}] \to K^0(X)$ ainsi obtenu est un isomorphisme n'est pas difficile en utilisant le théorème de Kuiper susmentionné. On renvoie à l'appendice de [Ati67] pour tout cela.

Situation équivariante On peut ajouter partout des actions d'un groupe de Lie compact G : il faut alors choisir un espace de Hilbert G muni d'une action telle que toute représentation irréductible de G soit incluse une infinité de fois dans H. En fait, Bauer et Furuta supposent seulement que toute représentation irréductible de G qui est incluse dans H y apparaisse une infinité de fois, et que la représentation triviale apparaisse dedans. Cela revient simplement à ne regarder qu'un morceau de la K-théorie G-équivariante. Ils nomment *univers* un tel G-espace de Hilbert.

3 Applications de Fredholm fibrées, espaces de Thom

Soit X un espace compact. Une *application de Fredholm fibrée au-dessus de* X est un morphisme $f = l + c : E' \to E$ au-dessus de X, où E et E' sont des fibrés hilbertiens sur X (i.e. on demande la compatibilité avec la projection sur X, que f soit continue, mais pas nécessairement linéaire entre les fibres), où l est un cocycle (i.e. la même chose, mais avec linéarité entre les fibres en plus) et c est *compacte au sens fibré* (ou au-dessus de X), en ce sens qu'elle envoie tout fibré en boules fermées sur E' sur une partie (relativement ?) compacte de E.

Espace de Thom d'un fibré vectoriel Soit E un fibré vectoriel hilbertien sur un espace X. On peut appliquer de façon fibrée le foncteur envoyant un espace de Hilbert H sur l'espace topologique pointé H^+ obtenu par adjonction d'un point à l'infini dont les voisinages sont les complémentaires des parties bornées, obtenant un fibré $\tilde{E}$ sur X (avec une section infinie, dont le complémentaire est exactement E). On peut ensuite identifier tous les points de la section à l'infini, obtenant un espace topologique pointé $Th(E)$ appelé *espace de Thom* du fibré E (noter que cet espace n'a pas d'application continue naturelle vers X).

Supposons que $f = l + c : E' \to E$ est une application de Fredholm au-dessus de X, comme avant. Trivialisons le fibré $E \simeq X \times H$. Alors la composée de f et de la projection sur H s'étend en une application continue pointée $Th(E') \to H^+$.

4 Homotopie stable équivariante, spectres de Thom

On rappelle que le *produit contracté* de deux espaces topologiques pointés X et Y est l'espace topologique pointé $X \wedge Y$ quotient de $X \times Y$ par la relation écrasant sur un point la partie $X \times \{*_Y\} \cup \{*_X\} \times Y$. C'est un produit tensoriel pour le Hom interne usuel sur les espaces topologiques pointés. Noter qu'il peut se passer des choses un peu désagréables du point de vue de la topologie générale : on pourra supposer, au besoin, que certains espaces sont des CW-complexes (même finis), ou alors changer un peu les topologies...

Noter qu'on dispose d'homéomorphismes naturels $V^+ \wedge W^+ \simeq (V \times W)^+$.

La *suspension* d'un espace pointé est son produit contracté avec le cercle (attention, cette construction n'est PAS la même que celle pour les espaces non pointés, mais elle donne un résultat homotopiquement équivalent, au moins si l'on écarte quelques pathologies de topologie générale).

Dans le cadre G-équivariant, il faut regarder les V^+, où V est une représentation (de dimension finie) de G. Une catégorie naïve de spectres G-équivariants est la suivante : les objets sont les familles $(X(V))$ de G-espaces pointés, où V parcourt l'ensemble des sous-représentations de dimension finie de notre univers H, munis d'applications (continues, pointées et G-équivariantes) $W'^+ \wedge X(V) \to X(W)$ pour $V \subset W$, où W' désigne l'orthogonal de V dans W. Les morphismes qui nous intéressent entre deux tels objets X et Y sont la colimite sur V des classes d'homotopie G-équivariantes (pointées) d'applications $X(V) \to Y(V)$.

Cohomotopie stable d'un espace tordue par un élément de sa K-théorie G-équivariante Soient X un G-espace topologique compact (éventuellement gentil — variété), où G est un groupe de Lie compact, et u un élément de $K^0_G(X)$. On se donne également un G-espace de Hilbert séparable H contenant la représentation régulière et tel qu'il contienne, dès lors qu'il contient une représentation irréductible de G, une infinité de copies d'icelle (le choix canonique est de supposer que H contient toutes les représentations irréductibles de G une infinité de fois, auquel cas on pourra omettre toute mention à ce Hilbert). On va définir, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, un groupe abélien $\pi^n_{G,H}(X; u)$, le *n-ème groupe de cohomotopie G-équivariante de X tordue par u.*

Pour cela, on écrit $u = [\eta] - [X \times V]$, où η est un G-fibré vectoriel sur X et V un G-espace vectoriel de dimension finie ($X \times V$ étant vu comme G-fibré trivial sur X). On peut supposer que V est un sous-espace de H. L'espace de Thom $Th(\eta)$ est un G-espace pointé (compact).

5 Applications de Fredholm fibrées et homotopie stable équivariante

Soit $f = l + c : E' \to E$ une application de Fredholm fibrée (avec l et c comme supra) G-équivariante au-dessus d'une G-variété compacte X, où G est un groupe de Lie compact, et H un G-espace de Hilbert séparable comme avant. Le but de la deuxième section de [BF04] est de construire une classe de cohomotopie stable G-équivariante

$$[f] \in \pi^0_{G;H}(X; Ind\, l)$$

que Bauer et Furuta nomment *classe d'Euler* de f (on rappelle que $Ind\,l$ ne dépend pas du choix de l'écriture $f = l + c$; bien sûr il faudra voir que la classe construite ci-après ne dépend elle non plus d'aucun choix).

On suppose donnée une trivialisation $E \simeq X \times H$.

Proposition 5.1. *Il existe un G-sous-espace de dimension finie de H tel que :*

1. *pour tout $x \in X$, $V + Im\,(l_x : E'_x \to H) = H$. En particulier, la restriction $F_0(V)$ de E' à l'image inverse de $X \times V$ est un fibré vectoriel sur X et $Ind(l) = [F_0(V)] - [F_1(V)]$ où $F_1(V)$ est le fibré trivial de fibre V.*
2. *Pour tout sous-G-module W de H contenant V, l'application continue*
$$f(W)^+ := (pr_H \circ f)|^+_{F_0(W)} : Th(F_0(W)) \to H^+$$
évite la sphère unité $S(W^\perp)$.
3. *Les applications $\rho_W f(W)^+$ et $id_{W'} \wedge \rho_V f(V)^+$, où W' est l'orthogonal de V dans W, sont homotopes comme applications continues pointées G-équivariantes*
$$F_0(W)^+ \simeq W'^+ \wedge F_0(V)^+ \to W'^+ \wedge V^+ \simeq W^+.$$

Ce résultat (lemme 2.5 de [BF04]) est la généralisation fibrée du lemme clef de l'exposé de Samuel Tapie ; comme dans icelui, $\rho_W : H^+ \setminus S(W^\perp) \to W^+$ désigne la rétraction de l'inclusion obtenue par une sorte de projection stéréographique.

Les applications $F_0(W)^+ \to W^+$ fournissent donc toutes le même élément de $\pi^0_{G;H}(X; Ind\,l)$, noté $[f]$, ce qui est pour l'instant abusif puisqu'il dépend a priori du choix de la décomposition $f = l + c$.

Théorème 5.2 (Théorème 2.6 de [BF04])**.** *L'élément $[f]$ de $\pi^0_{G;H}(X; Ind\,l)$ est indépendant du choix de la décomposition $f = l + c$.*

Démonstration. Ceci provient d'un principe d'invariance homotopique : les applications de restriction
$$\pi^*_{G;H}(X \times [0,1], \lambda) \to \pi^*_{G;H}(X; \lambda_{|X \times \{t\}})$$
(induites par la projection, où $t \in [0,1]$ est fixé ; λ est un élément de $K^0_G(X \times [0,1]) \simeq K^0_G(X)$) sont des isomorphismes.

Supposons maintenant $f = l + c = l' + c'$: on utilise l'homotopie constante $f = \big((1-t)l + tl'\big) + \big((1-t)c + tc'\big)$ qui donne le résultat. □

Références

[Ati67] M. F. Atiyah – *K-theory*, Lecture notes by D. W. Anderson, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[BF04] S. Bauer & M. Furuta – « A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I », *Invent. Math.* **155** (2004), no. 1, p. 1–19.

[Seg70] G. Segal – « Fredholm complexes », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **21** (1970), p. 385–402.