Polynomialité de l'homologie des groupes de congruence

Aurélien DJAMENT

CNRS, Laboratoire Paul Painlevé, Lille

3 octobre 2018

Exposé à la journée 2018 de la fédération de recherche mathématique du Nord-Pas-de-Calais

https ://math.univ-lille1.fr/~djament/fede-rentree2018.pdf

Homologie et cohomologie des groupes

Groupes de congruence

Foncteurs polynomiaux

Résultat principal

Introduite vers les années 1930, l'*homologie* d'un groupe G à coefficients dans un groupe abélien M, notée $H_*(G; M)$, est l'homologie singulière de l'*espace classifiant* BG *de* G, à coefficients dans M. L'espace BG est un espace topologique pointé caractérisé (à équivalence d'homotopie faible près) par le fait qu'il est connexe, que son groupe fondamental est isomorphe à G et que ses groupes d'homotopie supérieurs sont nuls (c'est-à-dire que toute application continue pointée d'une sphère de dimension au moins 2 vers BG est homotope à l'application constante).
On peut remplacer partout dans ce qui précède *homologie* par *cohomologie*, obtenant un groupe abélien gradué $H^*(G; M)$.
On notera parfois simplement $H_*(G)$ et $H^*(G)$ l'homologie et la cohomologie à coefficients dans $M = \mathbb{Z}$.

L'homologie $H_*(G;M)$ (ou la cohomologie $H^*(G;M)$) est définie plus généralement lorsque M est une *représentation* de G :

$$H_0(G;M) \simeq M/ < g.x - x \,|\, (g,x) \in G \times M > ;$$

$$H^0(G;M) \simeq \{x \in M \,|\, \forall g \in G \quad g.x = x\}$$

et les H_i (resp. H^i) supérieurs sont les foncteurs dérivés à gauche (resp. droite) de ces foncteurs.
Ces généralisations sont très importantes dans la *démonstration* des résultats dont nous parlerons mais ne sont pas nécessaires pour les énoncer.

Les groupes $H_i(G;M)$ ou $H^i(G;M)$ sont en général très difficiles à calculer (par exemple, le calcul complet des $H_*(GL_n(\mathbb{Z});\mathbb{Z})$ ou des $H_*(GL_n(\mathbb{F}_p);\mathbb{F}_p)$ est hors de portée). Seul le cas $i \leq 2$ possède une interprétation « concrète » :

$$H_1(G;\mathbb{Z}) \simeq G_{ab} \ ;$$

$H^2(G;M)$ classifie les *extensions centrales* de G par M, c'est-à-dire les classes d'isomorphisme de suites exactes de groupes

$$0 \to M \to K \to G \to 1$$

pour lesquelles M est inclus dans le centre de K.

L'homologie et la cohomologie à coefficients dans un groupe abélien M définissent des *foncteurs* sur la catégorie des groupes : tout morphisme de groupes $f : G \to K$ induit des morphismes de groupes abéliens $H_i(f) : H_i(G; M) \to H_i(K; M)$ et $H^i(f) : H^i(K; M) \to H^i(G; M)$ de manière compatible aux identités et à la composition. Il existe également une fonctorialité en les coefficients.

Une propriété simple mais importante est qu'un automorphisme *intérieur* d'un groupe induit l'identité sur son homologie et sa cohomologie.

Soient A un anneau, I un idéal bilatère de A et n un entier naturel. On note $\Gamma_n(I)$ le n-ème *groupe de congruence* associé à I, défini par

$$\Gamma_n(I) := \mathrm{Ker}\left(GL_n(A) \to GL_n(A/I)\right)$$

(morphisme induit par la réduction modulo I). Ces groupes ne dépendent pas de A, mais seulement de la structure d'anneau sans unité de I.
Ces groupes sont étroitement liés à des questions d'arithmétique et de K-théorie algébrique. Ils sont généralement plus difficiles à étudier que les groupes linéaires eux-mêmes.

L'un des cas les plus classiques est celui des idéaux de $\mathbb{Z}$. Si $p > 2$ est un nombre premier, il n'est pas difficile de voir que $\Gamma_n(p\mathbb{Z})$ est un sous-groupe distingué, d'indice fini et *sans torsion* de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Notre but est d'énoncer un théorème qui généralise (par des méthodes indépendantes) le résultat suivant.

Théorème [F. Calegari, 2015]. *Soient p un nombre premier et d, i des entiers strictement positifs. Alors*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} H_d(\Gamma_n(p^i\mathbb{Z});\mathbb{F}_p) \underset{n\to\infty}{=} \frac{n^{2d}}{d!} + O(n^{2d-2})$$

Plusieurs auteurs (notamment Church-Miller-Nagpal-Reinhold) ont obtenu des résultats similaires, mais moins précis (ils majorent le degré polynomial sans trouver en général sa valeur optimale), pour de vastes classes d'idéaux, par des méthodes indépendantes de celles de Calegari (et largement indépendantes de celles que j'utilise, quoique reposant également sur l'utilisation d'algèbre homologique dans des catégories de foncteurs).

On dispose sur l'homologie des groupes de congruence de plusieurs structures.

1. **Stabilisation** : les morphismes de groupes

$$\Gamma_n(I) \hookrightarrow \Gamma_{n+1}(I) \qquad M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   induisent en homologie des morphismes $H_*(\Gamma_n(I)) \xrightarrow{st_n} H_*(\Gamma_{n+1}(I))$.
2. **Action de** $GL_n(\mathbb{Z})$: $GL_n(\mathbb{Z})$ opère par conjugaison sur $\Gamma_n(I)$, induisant une action sur $H_*(\Gamma_n(I))$, mais *cette action n'est généralement pas triviale* car il s'agit d'une conjugaison *externe*. C'est la différence fondamentale avec l'homologie des groupes linéaires.

Ces deux structures possèdent une propriété de compatibilité (équivariance des applications st_n) qui fait que $n \mapsto H_*(\Gamma_n(I))$ (et déjà $n \mapsto \Gamma_n(I)$) définit un foncteur sur une catégorie appropriée $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ bien connue en K-théorie algébrique.

Pour généraliser le théorème de Calegari, on a besoin d'introduire une notion de *foncteur polynomial* (qui, dans certains bons cas, équivaut à la polynomialité des dimensions prises par les valeurs du foncteur). On dispose depuis les années 1950 d'une notion simple, générale et efficace due à Eilenberg et Mac Lane, introduite pour l'étude de l'homologie singulière des espaces topologiques qui portent désormais leurs noms (et qui généralisent les espaces classifiants aux groupes d'homotopie supérieurs, pour des groupes *abéliens*), de foncteur polynomial entre catégories de modules. Elle a montré son utilité dans plusieurs parties de la topologie algébrique et de la théorie des représentations. Cette théorie s'étend sans grosse difficulté à des catégories plus générales que des catégories de modules, mais pour les foncteurs sur $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ comme ceux qui nous intéressent, elle ne s'applique pas directement.

Dans un travail récent avec C. Vespa, nous avons défini les notions de foncteur *fortement* ou *faiblement* polynomial depuis une catégorie comme $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ vers la catégorie des groupes abéliens (ou plus généralement une catégorie abélienne raisonnable).
La définition des foncteurs fortement polynomiaux repose sur le *foncteur différence* : en considérant le conoyau des morphismes de stablisation st_n sur un foncteur F défini sur $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$, on obtient un nouveau foncteur $\delta(F)$ sur la même catégorie ; F est dit *fortement polynomial de degré* (fort) *au plus d* si $\delta^{d+1}(F)$ est nul.

Le lien avec les fonctions polynomiales vient de ce qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est polynomiale de degré au plus d si et seulement si $\mathrm{dev}^{d+1}(f) = 0$, où $\mathrm{dev}(f)$ est la *déviation* de f définie par $\mathrm{dev}(f)(n) = f(n+1) - f(n)$.

Cette notion ne se comporte pas si bien : un sous-foncteur d'un foncteur fortement polynomial de degré au plus d n'est plus forcément fortement polynomial (et son degré fort peut croître). On obtient une notion qui évite ces désagréments avec les foncteurs *faiblement polynomiaux* de degré (faible) au plus d, qui forment une sous-catégorie *épaisse* $\mathcal{P}ol_d(\mathbf{S}(\mathbf{ab}))$ de la catégorie des foncteurs de $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ vers les groupes abéliens.

La définition est essentiellement la même que la forte, mais en *négligeant les phénomènes instables* : on demande que $\delta^{d+1}(F)$ soit non plus forcément nul, mais *stablement nul*. Cela signifie que la colimite des valeurs de F pour les morphismes de stabilisation est nulle.

Théorème. *Soient I un anneau sans unité et $d > 0$ un entier. Alors le foncteur $n \mapsto H_d(\Gamma_n(I);\mathbb{Z})$ est faiblement polynomial de degré au plus $2d$ (et de degré exactement $2d$ si l'inclusion $I^2 \subset I$ est stricte). De plus, il est isomorphe dans la catégorie quotient $\mathcal{P}ol_{2d}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}))/\mathcal{P}ol_{2d-2}(\mathbf{S}(\mathbf{ab}))$ à $n \mapsto \Lambda^d\big(\mathfrak{gl}_\mathfrak{n}(I/I^2)\big)$.*

Ici, si V est un groupe abélien, $\mathfrak{gl}_n(V)$ désigne le groupe abélien des matrices $n \times n$ à coefficients dans V, de sorte que $n \mapsto \mathfrak{gl}_n(V)$ définit un foncteur faiblement (et fortement) polynomial de degré au plus 2 (et exactement 2 si V est non nul) ; Λ^d désigne la d-ème puissance extérieure (sur l'anneau des entiers), qui est un foncteur polynomial de degré d (au sens d'Eilenberg-Mac Lane).

Le cas $d = 1$ est le seul qu'on puisse traiter de façon directe et élémentaire dans le théorème précédent ; c'est un exercice classique de K-théorie algébrique élémentaire.
On définit un morphisme de groupes

$$\Gamma_n(I) \to \mathfrak{gl}_n(I/I^2)$$

en associant à une matrice M la classe modulo I^2 de $M - \mathrm{Id}_n$. Celui-ci est compatible à la stabilisation et $GL_n(\mathbb{Z})$-équivariant ; comme son but est un groupe abélien, on en déduit qu'il définit un morphisme fonctoriel (sur $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$)

$$H_1(\Gamma_n(I); \mathbb{Z}) \to \mathfrak{gl}_n(I/I^2).$$

En degré homologique 1, le théorème équivaut à dire que noyau et conoyau de ce morphisme sont *stablement constants*, ce qu'on peut vérifier par des manipulations explicites de matrices élémentaires.

Un cas simple où l'on peut vérifier sans peine le théorème en tout degré homologique est celui où la multiplication est *triviale* (c'est-à-dire nulle) sur I : $\Gamma_n(I)$ est alors abélien, et s'identifie au groupe additif $\mathfrak{gl}_n(I)$. Il est en effet classique que l'homologie en degré d d'un groupe abélien s'identifie à sa d-ème puissance extérieure pour $d \leq 2$; la détermination en degré supérieur constitue un problème difficile en général, mais la formule de Künneth permet facilement de voir que la restriction aux groupes abéliens de H_d définit un foncteur polynomial de degré d isomorphe *modulo les foncteurs polynomiaux de degré* $< d$ à Λ^d.

La démonstration du théorème repose sur les outils suivants :

1. une suite spectrale qui relie l'homologie des groupes $\Gamma_n(I)$ *à coefficients tordus par un foncteur général* à son homologie à coefficients constants et à des outils d'algèbre homologique dans la catégorie des foncteurs de $\mathbf{S}(\mathbf{ab})$ vers $\mathbf{Ab}$;
2. un résultat de comparaison homologique sur des foncteurs polynomiaux inspiré des travaux d'A. Scorichenko ;
3. l'étude, grâce à ce résultat, des foncteurs dérivés qui apparaissent dans la suite spectrale lorsque les coefficients sont polynomiaux ;
4. un argument concret de groupes triangulaires inspiré des travaux de Suslin-Wodzicki sur l'excision en K-théorie algébrique.

Merci pour votre attention !