Black-Scholes pour les nuls

S. De Bièvre*
Laboratoire Paul Painlevé, CNRS, UMR 8524 et UFR de Mathématiques
Université des Sciences et Technologies de Lille
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.
Equipe-Projet SIMPAF
Centre de Recherche INRIA Futurs
Parc Scientifique de la Haute Borne, 40, avenue Halley B.P. 70478
F-59658 Villeneuve d'Ascq cedex, France.

22 juin 2010

« La prévision est très difficile, particulièrement au sujet du futur. »
N. Bohr, physicien danois, 1885-1962

1 Introduction

On peut lire ci et là dans la presse que la crise financière et économique actuelle, déclenchée en 2008, est en partie dûe à l'utilisation de nouvelles techniques mathématiques sophistiquées notamment pour déterminer les prix (le « pricing ») de certains produits financiers, comme les options et pour l'évaluation des risques associées à leur commerce [references]. Selon cette idée, la machinerie mathématique complexe utilisée pour élaborer des modèles certes sophistiqués, mais néanmoins basés sur des hypothèses trop simplistes concernant le fonctionnement des marchés aurait empêché une appréciation correcte, et surtout prudente, des risques. Les modèles sous-estimeraient notamment les événements rares et les risques qui leur sont associés ce qui aurait, en fin de compte, contribué à déclencher la crise que nous connaissons. Il est important de comprendre si cette analyse est bien fondée : si c'est le cas, il conviendrait d'éviter les mêmes errements dans le futur. Bien évidemment, ce ne serait possible si une réelle volonté politique dans ce sens existe réellement, ce qui est tout sauf clair. Il faut en effet se souvenir qu'avant la crise actuelle, il était au contraire de bon ton d'acclamer l'essor des marchés financiers, créateur de richesses, comme étant partiellement le résultat justement de l'utilisation plus intense de moyens de calcul performants et de modèles mathématiques poussés. Le livre de Bouleau [B1]

*Stephan.De-Bievre@math.univ-lille1.fr

est un exemple type d'un discours triomphaliste et enthusiaste qui va dans ce sens.

Il est vrai que le monde financier a connu des transformations importantes dans les trente dernières années. L'utilisation d'ordinateurs toujours plus performants, et le développement d'internet a notamment permis d'augmenter à la fois le volume et la rapidité des transactions, et de les globaliser : il est aujourd'hui facile de faire des transactions sur la bourse de Tokyo, assis devant son écran d'ordinateur à Lille, ce n'était pas le cas il y a trente ans. Les ordinateurs permettent également de stocker un grand nombre de données sur l'évolution des marchés, de les traiter par des méthodes statistiques et ainsi d'ajuster des stratégies d'achat et de vente ; ce n'était pas possible à la même échelle tant que les calculs devaient se faire « à la main », ou à l'aide de calculatrices peu performantes. Finalement, les ordinateurs permettent d'utiliser des modèles mathématiques plus complexes pour décrire, analyser et tenter de *prédire* l'évolution des marchés. Ces trois transformations – qui sont distinctes – du fonctionnement des marchés financiers suite à l'introduction massive des ordinateurs les ont durablement changés : analyser en quelle mesure elles sont collectivement ou séparément co-responsables de la crise actuelle n'est forcément pas un chose facile. Il faut par exemple se souvenir que le monde économique a toujours été traversé de crises, et il faudrait d'abord clairement identifier en quoi celle-ci est fondamentalement différente des précédentes. Vaste sujet, sur lequel les économistes, qui ont tendance à ne pas être d'accords entre eux sur grand chose, n'ont sûrement pas encore dit leur dernier mot. Néanmoins, il est peut-être possible de se faire une idée du rôle des mathématiques dans cette problématique complexe, et c'est à cela que ces quelques pages veulent aider.

On pourrait penser qu'il est impossible de faire une telle analyse sans des connaissances considérables à la fois en mathématiques et en finance. J'espère démontrer que c'est largement exagéré. Les difficultés d'une telle analyse sont plus de nature conceptuelle que technique. Il est vrai qu'on ne peut pas se faire une idée du sujet sans un réel effort, et une certaine curiosité intellectuelle. Mais une maîtrise de mathématiques avancées est parfaitement superflue.

Le but de ce texte est donc tout d'abord d'expliquer en termes simples le plus célèbre des modèles mathématiques introduits dans le marchés des options il y a trente ans, et qui a connu un succès et par conséquent un impact considérables. Il s'agit de la théorie développée dans les années soixante-dix par Black, Scholes et Merton pour déterminer le prix d'une option[1] par une nouvelle méthode, dite par « portefeuille de couverture ». Elle a révolutionné le monde financier et le fonctionnement des marchés des options qui a connu un essor considérable grâce à son introduction. Signe de reconnaissance évidente, leur nouvelle approche, utilisée quotidiennement sur les marchés

[1]Toute la terminologie nécessaire pour comprendre le texte sera expliquée ci-dessous.

des options, a valu à Merton et Scholes le prix Nobel de l'économie en 1997. Elle est souvent présentée comme reposant sur des méthodes mathématiques pointues et sophistiquées, et donc difficile à comprendre sans une maîtrise poussée des probabilités notamment. Mais cela est très exagéré : la théorie de Black-Scholes-Merton est au contraire basée sur quelques hypothèses très simples concernant le fonctionnement des marchés financiers qui peuvent facilement être expliquées avec les outils mathématiques enseignés au lycée. C'est ce que nous nous proposons de faire dans ces pages. Cela nous permettra d'abord d'expliquer simplement comment déterminer le prix d'une option d'achat européenne par la méthode dite « de couverture de portefeuille »(voir les sections 2-3, et 5. Ensuite, nous analyserons dans la section 7 comment elle permet en principe aux opérateurs de limiter les risques liées au commerce des options. Finalement, l'analyse présentée ici permettra de jeter un oeil critique sur les hypothèses qui sous-tendent la théorie et donc de faire une analyse des reproches qui lui sont faites.
Avertissement : Ce texte n'a pas encore trouvée sa forme finale. N'hésitez pas à me signaler des erreurs, ni à me faire des remarques ou à me suggérer des améliorations.

2 Un marché financier très simple

Nous allons étudier un marché financier fictif et très simplifié, dans lequel il n'existe qu'un nombre très limité de produits financiers (quatre, pour être précis), dont la description suit.

Le premier est une action A. Le prix de l'action à un instant t quelconque sera désigné par S_t. On supposera en outre que les variations dans le prix de l'action sont régies par la règle suivante. Étant donné le prix S_t à l'instant t, le prix à l'instant $t+1$ ne peut prendre que deux valeurs distinctes, à savoir

$$S_{t+1} = hS_t, \text{ ou } S_{t+1} = bS_t,$$

où $0 \leq b \leq h$ sont deux paramètres que l'on suppose connus. C'est une hypothèse très forte et très criticable parce que peu réaliste : nous verrons dans la section 4 comment s'y prendre pour déterminer b et h et nous analyserons un peu les limites d'une telle hypothèse. Notons que b fait référence à « bas » et h à « haut »[2]. Par exemple, on pourrait avoir $b = 0.9$ et $h = 1.2$. L'action peut alors perdre un dixième de sa valeur, ou augmenter de 20% entre t et $t+1$. Notons encore que S_t et S_{t+1} sont exprimés en euros, ou en dollars ou en livres sterling ou en une monnaie quelconque, et par conséquent b et h sont des paramètres sans dimension.

Nous travaillerons toujours avec un temps discret. L'unité de temps peut-être un jour, un mois, une année ou une heure, selon la situation étudié. Bien

[2]On dit que le modèle est « binômial ». Le lien avec le binôme de Newton et la loi binômiale en probabilités deviendra clair plus tard

évidemment, les valeurs réalistes de b et de h dépendent de l'unité de temps choisie. Si on suppose qu'une action spécifique peut augmenter de cinquante pour cent en un mois, il n'augmentera typiquement pas de cinquante pour cent en un jour !

Il faut remarquer qu'il est assez naturel de supposer que la valeur de l'action augmente ou diminue d'un certain pourcentage, ce qui explique pourquoi on a représenté le changement de son prix par un facteur multiplicatif. On aurait pu faire l'hypothèse que l'action augmente ou diminue d'une somme fixe, et prend donc deux valeurs $S_t + m$ et $S_t + M$, avec $m < M$ deux valeurs réelles. Mais c'est moins parlant. Si $m = -10$ et $M = 25$, le changement induit sur le prix n'a pas la même signification lorsque $S_t = 100$ que lorsque $S_t = 10.000$. Finalement, si on préfère penser toujours en pourcentage de changement, on peut écrire

$$b = 1 + r_-, \qquad h = 1 + r_+,$$

avec $-1 \leq r_- \leq r_+$ des réels. Ils représentent le pourcentage de changement que subit le prix de l'action :

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = r_- \quad \text{ou} \quad \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = r_+.$$

On remarquera qu'ils peuvent être négatifs. Dans l'exemple ci-dessus, on a $r_- = -0.1$ et $r_+ = 0.2$. Les valeurs négatives de r_+, r_- correspondent à des valeurs de b et h inférieures à 1 et donc à des baisses. Pareillement, des valeurs positives de r_-, r_+ correspondent à des valeurs de b et de h plus grande que 1 et donc à des hausses du prix de l'action.

Remarquons encore que, selon l'hypothèse faite sur les prix de l'action, on ne sait pas lequel de ces deux prix l'action aura, mais on sait qu'elle aura un de ces deux prix et on suppose connaître leurs valeurs. C'est une hypothèse très forte et pas très réaliste, pour deux raisons. D'abord, il n'est pas raisonnable de penser qu'une action dont on connaît le prix à un instant donné, ne peut atteindre que deux prix différents une unité de temps plus tard. Par ailleurs, il est étonnant de prétendre qu'on en sache assez sur l'action pour connaître les valeurs possibles qu'elle peut avoir *à l'avenir*. On reviendra sur l'impact de ces hypothèses simplificatrices sur la pertinence de l'analyse par la suite. Pour le moment, tâchons de progresser.

Le deuxième instrument financier dans notre marché est le compte d'épargne. On suppose qu'on peut mettre de l'argent dans un tel compte et qu'il rapportera un intérêt r sur une période $\tau = 1$. Donc si vous y mettez un capital de C_t euros à l'instant t, vous disposerez de

$$C_{t+1} = C_t + rC_t = (1 + r)C_t$$

euros à l'instant $t + 1$. Et à $t + 2$ votre épargne sera de $(1 + r)^2 C_t$. On supposera par ailleurs qu'il est possible d'emprunter de l'argent, au même taux d'intérêt. C'est à dire, vous pouvez emprunter D_t euros à t, et vous devrez alors à votre créancier $D_{t+1} = (1 + r)D_t$ euros à l'instant $t + 1$: ici, j'utilise la lettre « D » pour « dette ». Puisque le taux d'épargne et d'emprunt sont les mêmes, nous pourrons considérer qu'une dette est tout simplement une épargne négative. L'hypothèse que le taux d'emprunt est égal au taux d'épargne n'est pas du tout réaliste. Il y a souvent une différence de deux points ou plus entre les deux. En outre, le taux d'emprunt dépend d'un certain nombre d'autres facteurs, comme la somme empruntée, et la durée de l'emprunt : plus elles sont grandes, plus le taux sera élevée. Et il y a en outre des assurances, souvent obligatoires, à ajouter à ces taux : assurance décès, assurance chômage, etc. Les banques n'aiment (en principe) pas prendre de risques et l'idée que vous quitteriez ce monde avant d'avoir remboursé votre dette leur déplaît au plus haut point.

L'option d'achat européen de sous-jacent A est le troisième instrument financier de notre modèle de marché financier, et il en est l'acteur principal. Une telle option d'achat est un contrat conclu entre un client et une institution financière qui donne au client le droit, mais pas l'obligation, d'acheter à une date fixée T, appelée l'échéance, une action A, à un prix K convenu d'avance, qu'on appelle le « strike ». Il existe des options d'échéance divers : un mois, trois mois, six mois, un an, ... L'option en question a un prix qu'on appelle sa « prime ». C'est ce que l'acheteur doit payer au vendeur au moment de conclure le contrat, pour obtenir l'option. On désigne ce prix par V_0. Ici la lettre V fait référence à « valeur ». L'idée étant que le prix d'une chose est égale à sa valeur. Attention, il ne faut pas confondre le prix S_0 de l'action avec celui de l'option ! Le premier est connu à l'instant $t = 0$. Mais la question qui nous occupera dans les sections suivantes est de savoir comment déterminer la prime V_0 d'une option de strike K et d'échéance T connus. La réponse n'est pas évidente : imaginer que quelqu'un vient vous demander le droit (mais pas l'obligation !) d'acheter de vous, dans trois mois, pour 18 euros, une action qui vaut 20 euros aujourd'hui. Quel prix vous allez lui faire payer pour ce privilège ? Supposons que vous lui demandez 2 euros : donc $V_0 = 2$. Si l'action monte à 23 euros, vous perdrez 3 euros. En effet, il exercera l'option, et vous donnera 18 euros (le strike). Avec les deux de la prime, ça en fait vingt. Mais l'action, que vous acheterez à échéance, vous en coute 23, et vous en êtes donc pour trois euros de votre poche[3]. Si par contre l'action baisse sous les 18 euros, votre client n'exercera pas son option et vous empocherez la prime de 2 euros qu'il vous a payé au départ. C'est lui qui y perd alors. Comme personne ne peut savoir comment le prix de l'action évoluera exactement, les deux acteurs ont la possibilité de gagner de l'argent, mais prennent aussi le risque d'en perdre. La question est donc d'évaluer ce risque et de lui attribuer un prix. Vous, le vendeur, auriez pu demander à l'ache-

[3]Comme on le verra, ce calcul n'est pas tout à fait correct, il ne tient pas compte des intérêts, mais il nous suffit pour le moment

FIG. 1 – Le graphe de V_T en fonction de S_T, à K fixé.

teur trois ou quatre ou un euros au départ : il s'agit donnc de développer une méthode systématique et rationnelle pour déterminer un juste prix ou, tout au moins, un prix intelligent. C'est précisément cela qu'ont fait Merton, Black et Scholes. Comme on le verra, leur méthode prétend éliminer le risque pour le vendeur ! Il conviendra d'analyser cette affirmation avec un oeil critique, évidemment. D'autant plus que la notion de « risque » n'est pas simple à définir précisément et à modéliser mathématiquement.

Plus généralement, on désignera par V_t le prix de l'option à l'instant t ; t prend toutes les valeurs intermédiaires entre $t = 0$ et $t = T$. Celui qui détient l'option peut vouloir le revendre, ce qu'il fera alors au prix V_t. La première étape dans la détermination de V_0 est la simple mais étonnante remarque qu'il est facile de déterminer la valeur de l'option à son échéance T dans le futur en fonction de la valeur future S_T de l'action sous-jacente. En effet, si $S_T \leq K$, l'option n'a aucune valeur, c'est à dire que $V_T = 0$: il serait bête d'exercer l'option en payant son strike K, afin d'obtenir l'action A, puisqu'on peut acheter cette dernière sur le marché pour le prix S_T qui est inférieur à K. Par contre, lorsque S_T est supérieur à K, il est intéressant d'exercer l'option, puisqu'on peut alors immédiatement revendre l'action et réaliser un profit $S_T - K$. Si vous detenez dans ces circonstances, à l'instant T, une option sur l'action A, vous direz qu'elle vaut précisément $S_T - K$. Sa valeur est dans ce cas égale à $S_T - K$. On peut résumer ceci en affirmant que V_T vaut $\max\{S_T - K, 0\}$; V_T est donc connu comme *fonction de* S_T, dans le sens que le mot *fonction* a dans les cours de mathématiques : si vous connaissez la valeur de S_T, vous pouvez calculez celle de V_T.

On dit donc que la valeur V_T d'une option à son échéance T est une fonction du prix de son sous-jacent, S_T, ou encore, qu'il en dépend, et on écrit :

$$V_T(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}. \tag{2.1}$$

Ici, la notation $\max\{x, y\}$ signifie « le plus grand parmi x et y ». Par exemple, $\max\{3, 5\} = 5$, $\max\{-3, -5\} = -3$, $\max\{-2, 0\} = 0$, $\max\{4, 0\} = 4$ et ainsi de suite. On peut tracer son graphe, comme dans les cours de mathématiques : on met V_T sur l'axe des ordonnées et S_T sur l'axe des abscisses. La fonction en question est très simple : elle est nulle lorsque $S_t \leq K$ et affine lorsque $S_t \geq K$: on obtient le graph de la figure 1. Une dernière remarque : lorsque je dis qu'on connaît le prix V_T de l'option à échéance, je veux dire que je le connais en fonction de S_T. Bien évidemment, comme je ne connais pas, à $t = 0$, la valeur S_T de l'action à l'instant T, je ne peux pas déterminer la valeur qu'aura effectivement l'option à échéance. La situation avec V_0 est différente : je connais, à $t = 0$, la valeur S_0 de l'action A, mais je ne sais pas pour autant déterminer V_0 !

Le quatrième et dernier instrument financier dont nous avons besoin dans notre modèle de marché, est le « short sale », ou « la vente à découvert ». Il s'agit de la possibilité de vendre une action qu'on ne possède pas ! En d'autres termes, on peut emprunter une action A, en promettant de la restituer à son créancier à une date ultérieure, fixée d'avance. Attention, ce n'est pas la même chose que d'emprunter une somme d'argent égale à la valeur de l'action. En effet, pour prendre l'exemple de notre action A, elle a un prix S_0. Si j'emprunte une somme d'argent $D_0 = S_0$, je dois à mon créancier la somme de $(1+r)S_0$ à $t = 1$. Tandis que, dans une vente à découvert avec échéance à $t = 1$, je lui dois une action A, ce qui est équivalent à lui devoir S_1 ! Or, la valeur de S_1 est inconnue à l'instant $t = 0$: dans notre modèle simple, elle peut prendre deux valeurs bS_0 ou hS_0, en général différentes de $(1+r)S_0$. Nous allons supposer que la vente à découvert n'a pas de coût. Cela paraît un peu douteux comme hypothèse : évidemment, il s'agit d'un service pour lequel il faut payer. Après tout, celui qui vous donne l'action, prend un risque : si l'action baisse, il perd de l'argent. Il va donc vous faire payer des frais en échange du service qu'il vous rend. Il me semble étonnant qu'on néglige ce coût dans les modèles binômiaux, comme celui que nous allons traiter dans les sections suivantes : ce ne serait justifié que s'il était très faible, or il me semble qu'il pourrait être du même niveau que la prime de l'option de vente qu'on s'apprête à calculer. Dans ces circonstances, il faudrait un argument pour justifier que l'on le néglige. La vente à découvert jouera dans la suite un rôle uniquement théorique, dans un certain nombre d'arguments utilisant le principe de non-arbitrage, expliquée dans la section 3.

Dans ce qui suit, nous ne tiendrons pas compte des diverses subtilités indiquées ci-dessus. Pour évaluer la pertinence du modèle simplifiée que nous allons traiter, il faudrait étudier comment les résultats obtenus seraient affectés si on les prenait en compte. On peut espérer que les économistes et autres spécialistes des marchés financiers ont fait ces analyses, même si on n'en trouve pas trace dans les livres de base sur les mathématiques financières, comme par exemple [Hi]. Et même des cours plus avancés, destinés à des étudiants de master financiers, comme par exemple [Hu].

Lorsque vous avez de l'argent, vous pouvez l'investir dans notre marché simplifié en achetant une combinaison des instruments financiers décrits : quelques actions, quelques options, un peu d'épargne. Une telle combinaison est appelé un portefeuille. Nous n'aurons besoin que de portefeuilles très simples, composés de a actions et d'une épargne (qui peut être négative) c. Si l'on constitue un tel portefeuille à l'instant t, il vaut

$$X_t = aS_t + c. \tag{2.2}$$

euros. Attention, la valeur de ce portefeuille évoluera dans le temps. Par exemple, à $t+1$, il vaudra

$$X_{t+1} = aS_{t+1} + (1+r)c.$$

Pour terminer, notons que notre modèle de marché financier contient cinq paramètres : S_0, b, h, r, K, en termes desquels on souhaite déterminer V_0. Un élément central de l'analyse est le principe de non-arbitrage, vers lequel nous nous tournons maintenant.

3 Le principe de non-arbitrage

Le principe de non-arbitrage est une hypothèse sur le fonctionnement des marchés financiers consistant à dire qu'il est impossible de faire une série de transactions financières, sans investissement initial, et qui ont comme résultat qu'on réalise, à coup sûr, un profit. Ici, « à coup sûr » doit être interprété comme signifiant « quelque soit l'évolution des marchés pendant la période concernée ». Le terme « à coup sûr » est souvent remplacé par « sans risque », mais, pour des raisons expliquées ci-dessous, cela me paraît un peu moins clair comme formulation. En tout cas, le principe de non-arbitrage ne peut être compris que si l'on l'applique à un certain nombres d'exemples, ce que je ne tarderai pas à faire. On verra aussi qu'il est subtile et contestable, et qu'il n'est vraisemblablement que très approximativement vérifié dans les marchés financiers. En tout cas, on le supposera satisfait dans le *modèle* très simple de ces marchés que nous manipulerons ici. Et il est utilisé par ailleurs dans toutes les dérivations de la formule de pricing de Black-Scholes. [enfin, je pense !]

Nous allons d'abord utiliser le principe de non-arbitrage pour établir certaines relations entre les paramètres de notre modèle. Les premières sont les deux inégalités suivantes :

$$b \leq (1 + r) \leq h.$$

Rappelons que nous avons supposé que notre action ne pouvait prendre que deux valeurs : $S_1 = bS_0$ ou $S_1 = hS_0$. Les inégalités ci-dessus signifient donc que le prix le plus élevé de l'action, hS_0, doit correspondre à une augmentation de son prix, avec un pourcentage d'augmentation plus élevé que le taux d'intérêt fourni par un compte d'épargne. Par ailleurs, le prix le plus bas de l'action doit être plus bas. Il peut correspondre à une baisse ou à une hausse, mais cette dernière est forcément inférieure à celle obtenue avec un compte d'épargne. En d'autres termes, si on détient l'action A sur une période, on subit un risque : le risque de moins gagner d'argent que si on avait laissé son argent dans un compte en banque, voire d'en perdre. Mais, en compensation, la possibilité existe qu'on gagne plus, si d'aventure le prix S_1 vaut bien hS_0.

On démontrera les inégalités ci-dessus par un raisonnement par l'absurde. Commençons par démontrer que $b \leq (1 + r)$. Pour cela, supposons qu'au contraire, $1 + r < b$ et donc $1 + r < b < h$. On va montrer que c'est en contradiction avec le principe de non-arbitrage, donc impossible.

Si $b > (1 + r)$, on sait d'avance que le prix S_1 de l'action sera au moins de $bS_0 > (1 + r)S_0$, et on peut faire les transactions financières suivantes. D'abord, à $t = 0$, on emprunte S_0 euros et on achète une action A. Puis, à $t = 1$, on vend cette action, ce qui rapporte au moins bS_0 euros. On rembourse l'emprunt à son créancier, ce qui coûte $(1 + r)S_0$ euros. Il vous reste $bS_0 - (1 + r)S_0 > 0$ euros. Or, vous n'avez rien investi et vous avez fait un profit, sans prendre le moindre risque. Selon l'hypothèse de non-arbitrage, cela n'est pas possible, donc il n'est pas possible que $b > (1 + r)$. Montrons maintenant qu'il n'est pas possible que $h < (1+r)$. Cette fois-ci, la stratégie vous permettant de faire de l'argent sans investissement et sans risque est plus astucieuse, elle repose sur l'utilisation d'une vente à découvert. Vous faites une vente à découvert de l'action, ce qui signifie qu'à l'instant $t = 0$, vous empruntez une action A. Vous la vendez tout de suite, récupérant S_0 euros, que vous mettez dans un compte épargne. À l'instant $t = 1$, vous disposez de $(1+r)S_0$ euros. Puisque $(1+r) > h$, cela vous permet d'acheter une action A, puisque cela vous vous coûte au plus hS_0. Vous rendez l'action à celui qui vous l'a pretée, et vous empochez la différence :

$$(1 + r)S_0 - S_1 \geq (1 + r)S_0 - hS_0 > 0.$$

Vous avez donc fait un profit, sans investissement initial et sans risque. Comme cela contredit le principe de non-arbitrage, on conclut qu'il n'est pas possible que $h > (1 + r)$. On pourrait critiquer cet argument en disant qu'il devrait être impossible d'emprunter une action lorsque le prêteur sait que $h < 1+r$: en effet, il est alors sûr qu'il ferait mieux de vendre son action et de mettre l'argent dans un compte d'épargne lui-même ! En même temps, il aurait beaucoup de mal à vendre son action, puisque tout le monde serait conscient du fait que son détenteur fait forcément une mauvaise affaire. Maisd tous ces raisonnements tendent à démontrer que des actions pour lesquelles $h < (1+r)$ ne peuvent pas exister et sont des variantes du Principe de Non-Arbitrage.

Remarquons que l'utilisation du principe d'arbitrage est assez subtile. En occurrence, on suppose que tout le monde connaît les valeurs bS_0 et hS_0 des deux prix *possibles* de l'action à $t = 1$. Sinon, les possibilités d'arbitrage disparaissent. Si, par exemple, il est vrai que l'action ne peut prendre que deux valeurs et que la plus basse satisfait $b > (1+r)$, mais qu'on ne connaît pas la valeur de b à $t = 0$, on prend un risque en détenant l'action A ! ! La possibilité d'arbitrage disparaît donc, et ceci en dépit du fait que $b > 1 + r$.

Remarquons finalement que ces raisonnements reposent sur l'hypothèse que *tout le monde* dispose des mêmes informations concernant le marché. Sinon, des opportunités d'arbitrage apparaîtront inévitablement pour certaines personnes. Le principe de non-arbitrage n'est alors jamais satisfait. Si par exemple une seule personne sait que l'action augmentera son prix, à coup sûr, elle peut en tirer un profit évident par une vente à découvert.

C'est d'ailleurs ce qui se passe dans le délit d'initié, où certains acteurs exploitent une information privilégiée qu'ils sont seuls à détenir, par exemple grâce à leur fonction dans le monde financier ou économique. Exploiter de telles informations est illégal, parce que cela fausse le jeu !

Toujours en utilisant le principe de non-arbitrage, on peut obtenir une information sur le strike K : si l'on suppose que la prime V_0 est strictement positive, alors,

$$K \leq hS_0.$$

Cela paraît évident. Si vous savez que le prix futur de l'action ne sera jamais supérieur à hS_0, vous n'achèterez jamais un call sur cette action dont le strike K dépasse hS_0. En effet, vous n'aurez jamais l'occasion de faire un profit en exerçant l'option, et comme vous payez une prime pour achetez le call, vous y perdez. On peut comprendre ceci différemment en soulignant qu'une telle option garantirait à son vendeur un profit (il encaisse la prime V_0 !) à la fois sans risque, et sans investissement, et est donc contraire au principe de non-arbitrage. Bien évidemment, ce raisonnement n'est correct que si la prime est strictement positive. Si l'option est gratuite, le vendeur ne fait plus de profit. Nous retrouverons ce résultat sous une autre forme ci-dessous.

résultat général : si $X_T = Y_T$, alors $X_0 = Y_0$.

4 Analyser et modéliser l'évolution du prix d'une action

Pour évaluer le prix d'une option, on a besoin de modéliser l'évolution du prix de l'action sous-jacent. Dans le modèle de marché très simple étudié ici, il s'agit de déterminer b et h, qui sont essentiels dans la détermination de la prime de l'option, comme on l'a vu.

En pratique, cela est fait à partir d'une analyse statistique de l'évolution *passée* de l'action. On continuera à désigner par S_t le prix de l'action à l'instant t. On observe ce prix à un grand nombre n d'instants $t_1 < t_2 < \dots t_n$. Par exemple, on pourrait observer ce prix à la clôture de la bourse, tous les jours ouvrables d'une année, ou même toutes les heures ou toutes les secondes. Dans la figuer untel, on voit ainsi l'évolution de l'action d'IBM (recuperer de [Hi], p47). On calcule alors, pour chaque t_i, la variation relative du prix, donnée par

$$r_{t_i} = \frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_i}}{S_{t_i}}.$$

Pour certains instants t_i, r_{t_i} sera positif, pour d'autres il sera négatif, comme on le voit dans la deuxième colonne du tableau (Tableau 4). On constate que l'hypothèse faite dans la description du modèle simplifié de la section 2 selon laquelle r_{t_i} ne prend que deux valeurs n'est pas du tout satisfaite pour la série présentée, mais les variations qu'on observe ne sont pas trop grandes, ce qui aide à justifier une telle l'hypothèse simplificatrice. On définit alors tout d'abord la moyenne empirique des r_{t_i} :

$$\mu = \frac{1}{n}\left[r_{t_1} + r_{t_2} + \cdots + r_{t_n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_{t_i}.$$

Si l'action a tendance à monter dans la période d'observation, on trouvera $\mu > 0$, dans le cas contraire on trouve $\mu < 0$. Si en moyenne le prix est stable, on aura $\mu = 0$. [terme francais pour mu, voir bouleau].

Fluctuations mesurées par la variance σ :

$$\sigma = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_{t_i} - \mu)^2\right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

expliquer pourquoi, illustrer.

On pose alors

$$b = 1 + \mu - \sigma, \qquad h = 1 + \mu + \sigma. \tag{4.2}$$

Les méthodes de calcul effectivement effectués dans les instituts financiers sont bien évidemment plus compliquées et basées sur des techniques mathématiques plus sophistiquées : analyse de données, statistiques, etc. Néanmoins, le principe reste le même : à partir d'observations passées de l'action, on détermine b et h et donc la volatilité $h - b = r_+ - r_- = 2\sigma$.

5 Black-Scholes pour un call européen : une période

Nous allons dans cette section déterminer la prime d'une option d'achat de strike K et de sous-jacent A de prix S_0 sous l'hypothèse simplificatrice supplémentaire que l'échéance T vaut 1 : $T = 1$. Cela signifie qu'il n'y a qu'une période de transactions entre l'achat de l'option et son échéance. C'est bien évidemment une hypothèse complètement irréaliste qu'on s'empressera dans la section suivante d'abandonner, mais qui permet déjà de comprendre l'essentiel du raisonnement de fixation de prix propre à la théorie de Black-Scholes et qui nous préparera bien pour la section suivante, où nous traiterons le cas général avec T quelconque.

Puisque $T = 1$, le temps t ne prend que deux valeurs : soit $t = 0$, soit $t = 1$. Considérons alors un portefeuille constitué à $t = 0$ de a_0 actions A et d'une somme de c_0 euros dans un compte d'épargne. Ce portefeuille a la valeur X_t à l'instant t, et on a :

$$X_0 = a_0 S_0 + c_0 \quad \text{et} \quad X_1 = a_0 S_1 + (1 + r)c_0.$$

Ici a_0 et c_0 peuvent a priori être négatifs. Un c_0 négatif correspond à une dette. Si a_0 est négatif, cela signifie qu'on doit a_0 actions à un créancier, ce qui correspond à une vente à découvert. Ce type de portefeuille sera utilisée de deux façons : dans cette section et la suivante, nous l'utiliserons afin de calculer la prime d'une option d'achat européen sur l'action A, et dans la section 7 comme instrument de couverture de risque.

Pour déterminer la prime V_0 d'une option d'achat sur A de strike K et d'échéance $T = 1$, nous procéderons en deux étapes. D'abord, nous verrons qu'on peut déterminer les valeurs de a_0 et de c_0 de façon unique en imposant que $X_1 = V_1$. Ensuite, le principe de non-arbitrage nous permet d'affirmer que $V_0 = X_0 = a_0 S_0 + c_0$: et comme nous connaissons a_0 et c_0, nous aurons ainsi établi la prime de l'option. C'est tout simple !

Voyons comment cela fonctionne. On pose

$$X_1 = V_1(S_1). \tag{5.1}$$

Cela signifie que, si $S_1 = hS_0$, on a

$$a_0 S_1 + (1+r)c_0 = V_1(hS_0)$$

et que, si $S_1 = bS_0$, on a

$$a_0 S_1 + (1+r)c_0 = V_1(bS_0).$$

En résolvant ce système de deux équations en deux inconnues, on trouve

$$a_0 = \frac{V_1(hS_0) - V_1(bS_0)}{(h-b)S_0}, \quad c_0 = \frac{bV_1(hS_0) - hV_1(bS_0)}{b-h} \frac{1}{1+r}.$$

Remarquons que a_0 est toujours positif, tandis que c_0 peut être négative. Le portefeuille ainsi obtenue est appelée « portefeuille de couverture » pour des raisons qui seront explicitées dans la section 7.

Finalement, grâce au principe de non-arbitrage, on sait que

$$V_0 = X_0,$$

ce qui exprime l'inconnue V_0 en termes de X_0, qu'on connaît puisqu'on connaît a_0 et c_0. On trouve donc V_0 :

$$V_0 = \frac{V_1(hS_0) - V_1(bS_0)}{h-b} + \frac{bV_1(hS_0) - hV_1(bS_0)}{b-h} \frac{1}{1+r}. \tag{5.2}$$

Nous avons ainsi déterminé la valeur de l'option à $t = 0$, c'est à dire sa prime.

La formule (5.2) pour la fixation du prix d'une option est d'apparence très simple et a été obtenu en quelques lignes avec des outils mathématiques pour le moins rudimentaires. On peut néanmoins déjà l'appeler la formule de Black-Scholes, puisqu'elle a été déduit avec les arguments de base servant à obtenir la formule plus générale que l'on voit d'habitude dans la littérature, et qui contient un tas de notations mathématiques sophistiquées et impressionnantes, obscurcissant quelque peu sa simplicité fondamentale.

Pour bien comprendre la formule, et pour se préparer à ses généralisations, il est utile de la regarder de plus près, et de plusieurs façons différentes. Comme il est souvent le cas lorsqu'on construit des modèles mathématiques de phénomènes divers, les difficultés et les subtilités de l'interprétation des résultats sont bien plus complexes que les mathématiques utilisées pour les obtenir.

Afin de se rendre compte que nous avons bien déterminé très explicitement V_0, il faut détailler un peu plus la formule (5.2), en utilisant (2.1). Cela permettra aussi de voir comment V_0 dépend du strike K. On peut penser que V_0 devrait être une fonction décroissante du strike : en effet, plus celui-ci est élevée, moins on peut espérer tirer un profit de l'option. Elle devrait donc être moins chère. Vérifions si cette intuition est confirmée par la formule obtenue. Considérons d'abord le cas où $K < bS_0$. On trouve pour le portefeuille

$$a_0 = 1, c_0 = -K/(1+r).$$

Le portefeuille de couverture consiste dans ce cas en une action A et une dette de $K/(1+r)$. Et on trouve pour la prime V_0 la valeur

$$V_0 = S_0 - K/(1+r) \quad \text{si} \quad K < bS_0.$$

Dans le cas où $bS_0 \leq K \leq hS_0$, on trouve

$$V_0 = \frac{hS_0 - K}{h-b}\left[1 - \frac{b}{1+r}\right], \quad \text{si} \quad bS_0 \leq K \leq hS_0.$$

Avec ces informations, on peut tracer le graphe de V_0 en fonction de K. Il s'agit d'une simple fonction affine par morceaux : voir la figure 2. On peut

FIG. 2 – Le graphe de la prime en fonction du strike : option d'achat européen, une période de transaction.

remarquer que, lorsque $K = hS_0$, la prime tombe à $V_0 = 0$. Et il résulte de (5.2) qu'elle reste nulle lorsque $K \geq hS_0$, comme on l'avait anticipée dans la section 3 : en effet, on avait remarqué qu'une valeur strictement positive de V_0 était incompatible avec le principe de non-arbitrage.

Aussi, a strike fixé, on voit que la prime est d'autant plus élevée que la volatilité, exprimée par $h-b$ est petite. C'est normal aussi : l'acheteur prend moins de risque, si la volatilité est plus petite. (CHECK!) Elle est grande quand la possibilite de gain est grande : $hS_0 - K$ grand! On voit aussi que la prime est positive et plus petite que le prix de l'action à $t = 0$.

FIX Comment déterminer le strike ?

Deuxième question : pourquoi acheter une option ? Quel est l'interet de ces instruments. Probabilité de gain, de perte ? Risque. il faudrait alors établir notamment le gain moyen, le gain maximal, la perte maximal etc. introduire les probabilites donc ! On peut alors etudier ces quantités en fonction de K. faire dans une autre section ?

Est-il correct de dire que le but est de ne faire de l'argent que sur les primes et charges divers, et de ne pas spéculer ? ? oui, selon Bouleau.

un mot sur le calibrage ? ? ?

V_0 a été obtenue sans hypothèse sur la probabilité avec laquelle les deux valeurs possibles de S_1 se réalisent,

ENDFIX

Pour terminer la discussion, mettons le doigt sur une caractéristique fondamentale de la formule (5.2). Pour calculer V_0, on a besoin de deux types d'informations. D'abord, des informations indiscutablement disponibles à $t = 0$: le prix S_0 du sous-jacent A (que l'on peut lire dans le journal), la valeur K du strike (que le vendeur de l'option fixe lui-même), et le taux d'intérêt r (disponible aussi). Puis, une information concernant l'avenir, à savoir les valeurs h et b, qui déterminent les évolutions futures possibles du prix S_t de l'action. Dans le modèle traitée ici, comme dans celui, plus sophistiquée, de Black-Scholes dans toute sa généralité, on prétend connaître ces valeurs à l'instant $t = 0$. Dans le modèle traitée dans cette section, on pourrait les obtenir en observant le passé de l'action : on en déduirait facilement les valeurs de h et de b. Dans ce sens, on peut prétendre qu'il ne s'agit pas d'une information sur l'avenir : mais c'est faux ! En effet, supposer que les valeurs passées de h et de b seront aussi leurs valeurs futures, est bel et bien une prévision sur l'avenir, et donc sujet à caution[4]. Les affirmations, étudiées en plus de détail ci-dessous, que la fixation de prix par « portefeuille de couverture » est une méthode qui permet d'éliminer les risques sont donc à prendre avec des pincettes ! Elles supposent que la nature de l'évolution du sous-jacent ne change pas, ce qui n'est pas garanti, bien sûr, particulièrement dans le monde financier, où les banques ne manquent pas une occasion d'avertir leurs clients que « les performances passées (de leurs produits financiers) ne préjugent en rien de leurs performances futures. » Il s'agit là d'une critique fondamentale sur la formule de Black-Scholes, que nous développerons davantage plus loin. Pour finir, remarquons encore qu'il y a une information sur l'avenir dont la formule ne se sert en effet pas : elle n'a pas besoin qu'on fasse des hypothèses sur les probabilités avec lesquelles l'un ou l'autre des prix bS_0 ou hS_0 seront réalisés à $T = 1$! Mais, j'insiste, il est faux de dire qu'elle ne fait aucune hypothèse sur l'avenir du sous-jacent.

[4] Veuillez relire la citation de N. Bohr au début de ce texte

Pour la suite, il sera utile de réécrire la formule (5.2) différemment :

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[qV_1(hS_0) + (1-q)V_1(bS_0)\right], \tag{5.3}$$

avec

$$0 \le q = \frac{1}{h-b}\left[(1+r) - b\right] \le 1, \quad 0 \le 1-q = \frac{1}{h-b}\left[h - (1+r)\right] \le 1 \tag{5.4}$$

Dans cette formulation, on met en évidence les valeurs futures $V_1(hS_0)$ et $V_1(bS_0)$ de l'option, qui sont multipliées par des constantes qui ne dépendent plus que des paramètres r, b, h qui déterminent le modèle, mais pas du temps, ni de la valeur de l'option, ni du strike.

6 Le cas de plusieurs périodes de transaction

Le modèle binômial avec une seule période de transaction n'est bien sûr pas très réaliste. Si vous achetez une option sur trois mois, et qu'il y a une vingtaine de jours d'ouverture de bourse chaque mois, pendant sept d'heures, on peut effectuer au moins 400 transactions. Et comme il est possible de faire des achats et des ventes à la bourse chaque seconde, le nombre de périodes de transactions est bien supérieur à cela encore. On va voir maintenant comment on peut adapter la méthode de fixation de prix avec un portefeuille de couverture lorsque $T > 1$.

La première chose à comprendre sont les évolutions possibles du prix S_t de l'action sous-jacent à l'option entre $t = 0$ et $t = T$. Sachant que l'action vaut S_0 à $t = 0$, elle vaut

$$bS_0 \quad \text{ou} \quad hS_0$$

à $t = 1$, comme on a déjà vu. Puis

$$h^2S_0, bhS_0 \quad \text{ou} \quad b^2S_0,$$

à $t = 2$. En effet, si elle vaut hS_0 a $t = 1$, elle peut monter, et valoir h^2S_0 à temps $t = 2$, ou baisser et valoir bhS_0. De même, si elle vaut bS_0 à temps $t = 1$, elle peut monter à $hbS_0 = bhS_0$ ou baisser à b^2S_0. En répétant la procédure, on trouve à $t = 3$:

$$b^3S_0, hb^2S_0 \quad \text{ou} \quad h^3S_0.$$

La suite est résumée dans le tableau de la figure 3. Plus généralement, il est facile maintenant de se convaincre qu'à tout instant t, où t est un entier, S_t, le prix de l'action, peut prendre $t + 1$ valeurs différentes, qui sont de la forme

$$b^jh^{t-j}S_0,$$

$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$
					h^5S_0
				h^4S_0	
			h^3S_0		bh^4S_0
		h^2S_0		bh^3S_0	
	hS_0		bh^2S_0		$b^2h^3S_0$
S_0		bhS_0		$b^2h^2S_0$	
	bS_0		b^2hS_0		$b^3h^2S_0$
		b^2S_0		b^3hS_0	
			b^3S_0		b^4hS_0
				b^4S_0	
					b^5S_0

FIG. 3 – Les valeurs possibles de S_t.

où j est un entier compris entre 0 et t. On trouve ces valeurs dans la colonne correspondant du tableau, pour t allant de 0 à 5.

Revenons-en maintenant au calcul de la prime V_0 de l'option d'achat européen, de strike K et de période T. On continuera à désigner par V_t la valeur de l'option à l'instant t, où t se trouve entre 0 et T. Elle dépend, outre de t, de la valeur S_t de l'action à l'instant t, comme on le verra bientôt. Pour l'indiquer, j'écrirai $V_t(S_t)$. A priori, nous nous intéressons qu'à V_0, mais pour déterminer V_0, nous aurons à calculer V_t pour toutes les valeurs de t possibles, à commencer avec $t = T$, et en remontant le temps jusqu'à $t = 0$. Comment cela fonctionne-t-il ?

Rappelons-nous que nous connaissons V_T. En effet, la formule

$$V_T(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}, \tag{6.1}$$

reste valable : c'est tout simplement la valeur de l'option à échéance. Mais alors, le raisonnement de la section 5 permet de calculer V_{T-1} ! En effet, à l'instant $t = T - 1$, *il ne reste plus qu'une période de transaction jusqu'à l'échéance de l'option*, et nous sommes donc bien dans le cas de la section 5. On peut donc écrire, suivant (5.3), en adaptant les notations à la nouvelle situation :

$$V_{T-1}(S_{T-1}) = \frac{1}{1+r}\left[qV_T(hS_{T-1}) + (1-q)V_T(bS_{T-1})\right]. \tag{6.2}$$

Concrètement, regardons le cas $T = 5$. Nous voulons calculer V_4. Le résultat dépend de S_4, c'est à dire de la valeur de l'action sous-jacent à $t = 4$. Supposons que $S_4 = b^2h^2S_0$. Alors $S_5 = b^3h^2S_0 = bS_4$ ou $S_5 = b^2h^3S_0 = hS_4$. Selon la formule ci-dessus, on trouve donc

$$V_4(S_4) = \frac{1}{1+r}\left[qV_5(hS_4) + (1-q)V_5(bS_4)\right].$$

Si vous comparez à (5.3), vous verrez que c'est la même chose : on a juste remplace 0 par 4 et 1 par 5. Le même raisonnement s'applique lorsque S_4 prend une autre valeur, $S_4 = b^3hS_0$, par exemple. Et dans tous les cas, la valeur de V_4 est exprimé en termes de valeurs de $V_5(S_5)$, que nous connaissons.

Une façon imagée de le comprendre est la suivante : vous avez reçu d'un oncle une option pour Noël. Votre oncle l'a acheté au premier décembre, et c'est une option sur trois mois. Vous ne savez absolument ce qu'il a payé d'ailleurs, ce jour-là, et comme vous êtes bien élevé, vous ne le lui demandez pas. Un jour avant son échéance, vous avez besoin d'argent et vous voulez vendre votre option. Vous êtes donc dans la situation de quelqu'un qui veut vendre une option avec $T = 1$. Pour déterminer un prix de vente, et en admettant qu'on ne peut faire qu'une transaction par jour, vous êtes bien dans la situation de la section 5, et vous pouvez donc appliquer (5.2) !

Mais nous voulons calculer V_0, pas V_T, ni V_{T-1}. Il s'avère qu'on peut maintenant remonter le temps progressivement. Par exemple, comment faire pour déterminer V_{T-2}, c'est à dire V_3 lorsque $T = 5$? L'idée supplémentaire dont nous avons besoin est une remarque simple mais astucieuse concernant la dérivation de la formule (5.2) : pour calculer V_0, elle utilise les deux valeurs possibles $V_1(hS_0)$ et $V_1(bS_0)$ que peut avoir l'option à $t = 1$, mais elle ne dépend pas de la forme explicite de V_1 en fonction de S_1 et, surtout, elle n'utilise pas le fait que $T = 1$ est la date d'échéance de l'option ! Il en résulte que, même si $t + 1$ n'est pas la date d'échéance de l'option, on peut faire exactement le même raisonnement avec le portefeuille de couverture pour déterminer la valeur V_t d'une option dont on connaît les deux valeurs possibles $V_{t+1}(hS_t)$ et $V_{t+1}(bS_t)$! On obtient

$$V_t(S_t) = \frac{1}{1+r}\left[qV_{t+1}(hS_t) + (1-q)V_{t+1}(bS_t)\right]. \tag{6.3}$$

On peut notamment appliquer cette formule lorsque $t = T-2$, puisque nous venons de voir que nous pouvons calculer $V_{T-1}(S_{T-1})$! On a ainsi

$$V_{T-2}(S_{T-2}) = \frac{1}{1+r}\left[qV_{T-1}(hS_{T-2}) + (1-q)V_{T-1}(bS_{T-2})\right]. \tag{6.4}$$

En insérant (6.2) et (6.1) into (6.4), on obtient

$$\begin{aligned} V_{T-2}(S_{T-2}) \;&=\; \frac{1}{(1+r)^2}\big[q^2V_T(h^2S_{T-2}) + 2q(1-q)V_T(hbS_{T-2}) \\ &\qquad\qquad + (1-q)^2V_T(b^2S_{T-2})\big] \end{aligned} \tag{6.5}$$

Il est instructif de refaire encore une fois l'opération, en mettant $t = T-3$ dans (6.3), puis en remplaçant $V_{T-2}(S_{T-2})$ par son expression dans (6.5). Cela résulte en

$$\begin{aligned} V_{T-3}(S_{T-3}) \;&=\; \frac{1}{(1+r)^3}\big[q^3V_T(h^3S_{T-3}) + 3q^2(1-q)V_T(h^2bS_{T-3}) \\ &\qquad + 3q(1-q)^2V_T(hb^2S_{T-3}) + (1-q)^3V_T(b^3S_{T-3})\big] \end{aligned} \tag{6.6}$$

En regardant attentivement les formules (6.2), (6.5) et (6.6), on ne peut que constater deux choses. D'abord, qu'elles semblent avoir une certaine élégance et régularité. Deux, qu'elles font furieusement penser à la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)^2 &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2, \\
(\alpha+\beta)^3 &= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3, \\
(\alpha+\beta)^n &= \alpha^n+C_n^1\alpha^{n-1}\beta+C_n^2\alpha^{n-2}\beta^2+\dots \\
&\qquad +C_n^{n-2}\beta^{n-2}\alpha^2+C_n^{n-1}\beta^{n-1}\alpha+\beta^n.
\end{aligned}$$

Je ne donnerai pas plus de détails ici, mais je vous dirai simplement que cette analogie n'est pas fortuite, et qu'une simple récurrence permet de montrer qu'en effet, on peut progressivement calculer V_{T-4}, V_{T-5} pour finir par déterminer V_0 :

$$\begin{aligned}
V_0(S_0) &= \frac{1}{(1+r)^n}\big[q^nV_T(h^nS_0)+C_n^1q^{n-1}(1-q)V_T(h^{n-1}bS_0)+ \\
&\quad +C_n^2q^{n-2}(1-q)^2V_T(h^{n-2}b^2S_0)+\dots+C_n^{n-2}q^2(1-q)^{n-2}V_T(h^2b^{n-2}S_0) \\
&\quad +C_n^{n-1}q(1-q)^{n-1}V_T(hb^{n-1}S_0)+(1-q)^nV_T(b^nS_0)\big] \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

La formule explicite obtenue n'est pas très importante pour nous. Ce qui importe est de constater que les observations de la section précédente restent valables. L'application du principe de non-arbitrage en combinaison avec l'idée du portefeuille de couverture permet de déterminer de façon unique le prix $V_0(S_0)$ d'une option de vente européen. Pour cela, la seule information concernant le futur du marché dont on a besoin est que b et h sont constants. On pourra remarquer que, plus l'échéance T est lointaine, plus cette hypothèse est forte et donc porteuse de risques.

7 Couverture de risque

Jusqu'ici nous avons utilisé le portefeuille de couverture uniquement comme outil de pensée : il s'agissait d'une construction purement théorique permettant de calculer le prix d'une option. Mais le portefeuille de couverture est utilisé par les institutions financières pour couvrir les risques liés au marché des options. Dans cette section nous expliquerons comment cela fonctionne en principe.

Imaginons que quelqu'un vend, à $t=0$, une option déchéance T, de strike K, et dont on a déterminé la prime V_0 avec la méthode décrite dans les sections précédentes. Le sous-jacent A de l'option prend la valeur S_0. Le vendeur encaisse donc V_0 euros, et l'acheteur rentre chez lui avec son option en poche. L'acheteur connaît assez bien le risque qu'il prend : il ne peut pas perdre plus que V_0 euros, ce qui arrivera si, à échéance $S_T < K$. Qui plus est, V_0 étant typiquement assez petit, comparé au prix de l'action, il ne risque pas une grande somme. Mais le vendeur risque plus gros : si, par malheur, l'action monte à son prix maximal $h^T S_0$, il peut perdre une somme considérable. Il s'avère qu'il existe pour lui un moyen d'éliminer ce risque, de la façon suivante.

Il encaisse les V_0 euros de la prime, et les utilise pour constituer le portefeuille de couverture contenant a_0 actions et une somme c_0 dans un compte en banque, déterminés par (5.1). À $t = 1$, ce portefeuille vaut

$$X_1 = a_0 S_1 + (1 + r)c_0$$

où S_1 est la valeur effectivement prise par l'action A à $t = 1$. Nous savons que $V_1 = X_1$, puisque c'est avec cette égalité que le portefeuille a été constitué. Par ailleurs, et c'est là qu'il y a une idée géniale, nous savons qu'il existe, à ce même instant $t = 1$, un unique portefeuille de a_1 actions A et d'une somme épargnée c_1 tel que, à l'instant $t = 2$,

$$a_1 S_2 + (1 + r)c_1 = V_2(S_2),$$

quelque soit la valeur prise par S_2, c'est à dire $S_2 = bS_1$ ou $S_2 = hS_1$. Qui plus est, ce même portefeuille satisfait, à cause du principe de non-arbitrage, à l'instant $t = 1$,

$$a_1 S_1 + c_1 = V_1. \tag{7.1}$$

Que peut donc faire notre vendeur d'options ? À l'instant $t = 1$, il vend les a_0 actions qu'il a acheté la veille. Il dispose donc de la somme $X_1 = a_0 S_1 + (1+r)c_1$ dont nous savons qu'elle vaut exactement V_1. Mais cela signifie, au vu de (7.1) qu'il peut se constituer un nouveau portefeuille avec a_1 actions et c_1 euros d'épargne. Le lendemain, ce portefeuille vaudra exactement V_2, et il peut recommencer la procédure.

Il constitue ainsi, de jour en jour, des portefeuilles de a_t actions et d'une épargne de c_t euros, sans jamais investir des sommes supplémentaires : il a commencé avec un premier portefeuille, acheté avec la prime V_0, puis il calcule au fur et à mesure que le prix de l'action varie, ses nouveaux portefeuilles, qui valent en permanence exactement autant que l'action qu'il a vendu. En fin de compte, à échéance, il dispose de V_T euros, ce qui est exactement la valeur de l'option. Explicitement, si $S_T < K$, $V_T = 0$, il n'a plus rien : mais ce n'est pas grave, parce que son client n'exercera pas son option. Et si $S_T > K$, le client exercera son option en lui donnant K euros. Il a donc $K + V_T$ euros ; comme $S_T > K$, cela signifie qu'il dispose de

$$K + V_T = K + (S_T - K) = S_T$$

euros. Il peut donc acheter une action A et la donner à son client, honorant son contrat. Et tout cela sans risque !

BEGIN FIX

il reste quelques problemes : pas de risque, mais il ne fait pas d'argent : il fait payer un peu plus. question de l'existence des options etc.

pas de risque : toujours par rapport a l'hypothese de volatilite constante. ca se voit parce qu'on doit connaitre les valeurs futures de l'option pour calculer le portefeuille.

faudrait faire une notation differente pour la valeur effective de l'action et le processus aleatoire.

END FIX

END of section

Un portefeuille à chaque instant t, composé de a_t actions A et d'une somme c_t dans un compte d'épargne. La valeur de ce portefeuille est

$$X_t = a_t S_t + c_t. \tag{7.2}$$

On détermine a_t et c_t via

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{V_{t+1}(hS_t) - V_{t+1}(bS_t)}{(h-b)S_t} && (7.3) \\ c_t &= \frac{bV_{t+1}(hS_t) - hV_{t+1}(bS_t)}{b-h} \frac{1}{1+r}. && (7.4) \\ & && (7.5) \end{aligned}$$

si l'action peut prendre plusieurs valeurs, est-il suffisant de supposer qu'il y a plusieurs periodes de transaction, et d'ajuster a chaque fois le portefeuille ? ca a l'air d'etre une des idees sous-jacentes. mais c'est tout de meme bizarre que le 2 joue un role preponderant comme ca...

le portefeuille de couverture n'est pas vraiment une variable aleatoire ? il depend des valeurs futures possibles, mais pas de leur probabilites. pas clair cette phrase ! dans ce cas simple, ce n'est pas correct. il ne faut pas confondre le portefeuille, qui est le couple a,c avec sa valeur ! ! le couple depend de S_0 et des parametres b, h, qui ne sont pas aleatoires. Comparer avec Bouleau qui voit la valeur du portefeuille de couverture comme une intégrale stochastique par rapport à S_t. Ça paraît louche, dans la mesure où dans le cas discret on utilise la valeur future tout de même. Hmmm

volume relatif des options et des sous-jacents ? peut-on toujours garantir qu'il y en a assez ? ? est-ce un facteur de risque ?

est-ce qu'on peut montrer que a_t est tj plus petit que 1 ? ou au moins borne ? ?

on pourrait integrer des fluctuations dans h et b dans le modele ! !

FIX : Ca pose la question : si l'action prend trois valeurs, ca marche encore ? ? ? ? apparemment pas ! ! comparer méthodes basées sur une edp.

expliquer : pas de proba nullepart ! !

8 Black-Scholes pour les grands

Dans la théorie développée par Black, Scholes et Merton, le temps t est traitée comme une variable continue, plutôt que discrète, comme dans les sections précédentes. La théorie permet le calcul du prix $V_t(S_t)$ d'une option, à l'instant t, qui dépend de la valeur S_t du sous-jacent à ce même instant. La formule de Black-Scholes fournit une expression pour $V_t(S_t)$, et notamment pour $V_0(S_0)$ qui est de même nature que (6.7), mais où la somme est remplacée par une *intégrale stochastique par rapport à un mouvement Brownien*, object mathématique assez sophistiquée. La théorie de Black, Scholes et Merton contient également une *équation aux dérivées partielles* que satisfait $V_t(S_t)$, et qu'on appelle *l'équation de Black-Scholes*. Là aussi, il s'agit d'un objet mathématique relativement avancée. La théorie en temps continue de Black, Scholes et Merton peut être obtenue de celle en temps discret traitée ci-dessus en prenant T très grand. Concrètement, supposons qu'on s'intéresse à une option à un an. Si on considère qu'un jour correspond à une période de transaction, on mettrait $T = 250$ à peu près[5]. Mais si on considère qu'on peut faire une transaction toutes les secondes, on a $T = 250 \times 7 \times 60 \times 60$. Et si c'est toutes les millisecondes, on multiplie encore une fois par mille. De cette façon, en prenant T de plus en plus grand, on s'approche de la situation où le temps est traité comme une variable continue. Le passage d'une théorie en temps discret à une théorie en temps continue demande une certaine technicité mathématique, mais n'apporte rien de fondamentalement différent, ou de conceptuellement nouveau. C'est dans ce sens que je prétends qu'on n'a besoin que des mathématiques du lycée pour comprendre la théorie de Black-Scholes.

Historiquement, Black, Scholes et Merton ont développé leur théorie en temps continu avant la théorie en temps discret, qui a été introduite par Cox, etc en 1979 [reference]. On peut s'étonner que cela ait pris ce temps-là. Que la théorie des intégrales stochastiques et du mouvement Brownien sont des versions en temps continues d'objets infiniment plus simples, à savoir les *marches aléatoires*, qui utilisent un temps discret, est connu de tout physicien statisticien, et en principe de tout probabiliste. Et que la sophistication mathématique accrue apportée par ces objets n'apporte pas une meilleure compréhension des phénomènes sous-jacents, sera quasi unanimement reconnu par les premiers au moins. S'ajoute à cela que, pour faire des calculs explicites dans des situations réalistes, avec des ordinateurs, on est obligé, d'une façon ou d'autre, à rediscrétiser le temps. Finalement, on peut lire ci et là que pour les calculs concrets, les banques aiment bien utiliser le modèle binômial. Tout cela va donc dans le sens de l'observation faite dans l'introduction : pas besoin de mathématiques sophistiquées pour comprendre, puis analyser et éventuellement critiquer la théorie de fixation de prix de

[5]La bourse est fermée les weekend et jours fériés !

Black-Scholes.

9 Trouvez la faille !

Il serait difficile de nier que les raisonnements des sections 2 à 7 sont élégants, souvent astucieux, à la fois simples et sophistiqués. Qu'il s'agit de l'utilisation du principe de non-arbitrage pour fixer le prix d'une option, ou de la constitution d'un portefeuille de couverture pour éliminer le risque, on ne peut qu'être admiratif de l'intelligence qu'ils trahissent. En même temps, le résultat laisse perplexe, et heurte l'intuition et le bon sens. L'avenir étant incertain, peut-on véritablement éliminer le risque ? Que signifie d'ailleurs le mot « risque » ? Ne sommes-nous pas dans une situation semblable à celle des martingales des joueurs de casino, qui ont toutes une faille, et finissent par ruiner ceux qui y ont cru ? Et, justement, puisqu'on parle de faillite, la crise financière actuelle, ne trouve-t-elle pas ses origines dans une foi trop grande dans les méthodes mathématiques nouvelles introduites ces dernières décennies dans les marchés financiers, et dont la théorie de Black-Scholes est l'exemple le plus connu ?

En d'autres termes, où est la faille, si faille il y a.

modèle trop simpliste, hypothèses pas satisfaites. maths correctes, modèle faux.

oui, mais quelles hypothèses ? et quel est l'impact ?

quelques pistes :

(i) hypotheses sur l'évolution de S_t : volatilite constante (on n'y arrive plus si il y a de l'incertitude sur les b_t, h_t ?), variables gaussiennes a cause du clt. c'est ici que joue l'evaluation des evenements rares ? voir mandelbrot ?

(ii) même si on croit en (i), il y a la détermination de b et h, qui est tout de même une extrapolation dans l'avenir à partir d'observations faites dans le passé. c'est donc risqué. si on se trompe sur b ou h, on est foutu ! on peut lire que le modèle est stable. l'est-il par rapport à ces erreurs-là ? ?

(iii) problemes d'interaction tradeurs et tradeurs-marche. volume des transactions qui influent sur le prix etc. c'est lie a (i)

(iv) je trouve suspect que ca semble se casser la figure si on prend un modele discret avec trois (ou quatre, ou cinq) valeurs de prix ? ! On ne pourrait plus constituer le portefeuille ? ?

On peut supposer que la littérature spécialisée a étudié ces questions. Mais les conclusions éventuelles de ces investigations n'ont pas trouvé le chemin des livres élémentaires de finance, pas même sous forme d'avertissement (CHECK), ni même des textes plus avancés, destinés au masters de finance, par exemple [livre de christodoulos]. Et on n'en trouve pas la moindre trace dans le livre de vulgarisation de Bouleau. Taieb jesticule vaguement, mais c'est du charabia destine a etre vendu au plus grand nombre. Soros prône un nouveau paradigme vague et sans contenu réel, comme s'il commence à craindre le jugement de Dieu dans ses vieux jours.

Les mathématiciens ? Pas très doués pour la modélisation : ils veulent démontrer des théorèmes, pas réfléchir à leur pertinence ! verifier el keraoui.

les banquiers ? si ca marche pendant quelque temps, pourquoi ne pas en profiter. on se fera aider par l'etat apres...

différence entre : étudier le système pour le comprendre (la science) ou pour en tirer profit !

10 Risque et incertitude

lien entre les deux.

risque implique une notion de danger, d'issue défavorable. Mais aussi de psychologie. Si vous traversez un pont piéton en pleine forêt, au dessus d'une falaise, vous prenez un risque. Même s'il existe un filet de sauvetage sous le pont, et que vous ne le savez pas, vous prenez toujours un risque, même si votre copain, qui a vu le filet, sait qu'il n'y a pas de danger et peut donc se moquer de votre peur de tomber. L'hypothèse sur l'accessibilité par tous à l'information est donc cruciale.

peut-on faire un modele ou on voit que ca foire parce qu'il y a de l'interaction entre les acteurs, par exemple ?

traders eux-meme ne maitrisent pas les maths, mais utilisent des logiciels.

11 Réactions de mathématiciens

Le livre de Bouleau, « Martingales et marché's financiers », écrit en 1998, est un véritable éloge, empreigné de triomphalisme, de l'efficacité des mathématiques sophistiquées appliquées aux finances. Bouleau affirme avec force et à plusieurs reprises que des techniques mathématiques récentes et sophistiquées sont utilisées quotidiennement dans le monde financier et dans les marchés notamment (p9-11, 64), et qu'elles y sont indispensables. Il explique que les finances comme discipline ne se sont développées que depuis trente ans à peu près et que les mathématiques y jouent un rôle indispensables : statistiques, probabilités, processus stochastiques et calcul d'Itô, théorie de l'optimisation et du contrôle (p10, chapitres 4 et 5). Il affirme que l'idée du portefeuille de couverture a été une révolution épistémologique (p16, p63) qui a permis d'« abolir le hasard », et donc les risques. Il écrit ainsi (p68) concernant la gestion par portefeuille de couverture que « cette gestion, ..., va permettre [à la banque], non pas de minimiser son risque, *mais de l'annuler* ». Il y ajoute que la méthode de fixation de prix via Black-Scholes est basée sur les connaissances qu'on a sur lévolution passée du sous-jacent et « n'utilise pas de projections sur la montée ou la baisse du cours ». voir aussi p167 sur Barings et Leeson. Le plus étonnant est que Bouleau a republié exactement le même livre, augmentée d'un seul chapitre, mais sous un autre titre, en 2009 : « Mathématiques et risques financiers ». Á croire qu'aucune leçon est à tirer de la crise financière de 2008...

conti

mandelbrot

paris 7

black et scholes on fait faillite voir livre de higins

citer sources

différence entre les maths sont correctes et le modele est correct/pertinent !!!

question : équilibre et efficacité et complétude du marché. Qu'est-ce que c'est et comment c'est lié au principe de non-arbitrage ?

marché complet = marché efficient = marché en équilibre : les prix réflètent à tout moment toute l'information disponible, tout instrument est à son prix. ca doit impliquer ou etre equivalent au non-arbitrage

Références

[B1] N. Bouleau, *Martingales et marchés financiers*, Edile Jacob, 1998.

[B2] N. Bouleau, *Mathématiques et risques financiers*, Edile Jacob, 2009.

[Hi] D. J. Higham, *An introduction to financial option valuation*, Cambridge University Press, 2009.

[Hu] J. C. Hull, *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall, 2000.