

# MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## 1 Motivation

### 1.1 Quelques exemples de problèmes différentiels

#### Modèle malthusien de croissance de population

##### Modélisation de l'évolution d'une population "fermée"

- $P(t)$  : taille de la population à l'instant  $t$
- $P'(t)$  : variations de la taille de la population
- On suppose que les nombres de naissances et de décès sont proportionnels à la taille de la population, avec un taux de natalité  $\alpha$  et un taux de mortalité  $\beta$ .

$$P'(t) = \alpha P(t) - \beta P(t) = (\alpha - \beta)P(t)$$

- Taille initiale de la population :  $P(t_0) = P_0$

##### Solution

$$P(t) = P_0 \exp((\alpha - \beta)(t - t_0)).$$

#### Modèle dit "de croissance logistique"

##### Ajout d'un terme de compétition entre les individus

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t) - bP(t)^2 \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

→ Equation différentielle non linéaire

##### Calcul de la solution par séparation des variables

$$\frac{P'(t)}{aP(t) - bP(t)^2} = 1$$

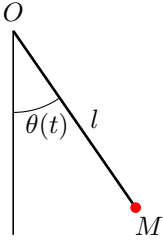
$$\frac{1}{aP - bP^2} = \frac{1/a}{P} + \frac{b/a}{a - bP} \implies \frac{P'}{aP - bP^2} = \frac{1}{a} \left( \frac{P'}{P} + \frac{bP'}{a - bP} \right)$$

$$\int \frac{P'}{P} = [\ln |P|] \text{ et } \int \frac{bP'}{a - bP} = [-\ln |a - bP|]$$

##### Solution obtenue

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

### Pendule pesant non amorti



- Pendule de masse  $m$ , suspendu en  $O$
- Fil ( $OM$ ) non pesant et de longueur  $l$ .

$\theta(t)$  : position par rapport à la position d'équilibre (angle signé).

Mouvement du pendule gouverné par la loi fondamentale de la dynamique.

#### Equation du mouvement :

$\theta(t)$  est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0 \text{ (par exemple)} \end{cases}$$

⇒ équation différentielle d'ordre 2 non linéaire

### Pendule pesant non amorti : transformation

$\theta(t)$  est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} \theta''(t) = -\omega^2 \sin(\theta(t)) \\ \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0 \text{ par exemple} \end{cases}$$

Posons :  $x(t) = \theta(t)$ ,  $y(t) = \theta'(t)$  et  $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ .

On a alors

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ \theta''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ -\omega^2 \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ -\omega^2 \sin(x(t)) \end{pmatrix}.$$

### Pendule pesant non amorti : transformation

$Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$  est solution du problème différentiel :

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

avec

$$F\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 \sin(x) \end{pmatrix}$$

et

$$Y_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Forme générale d'une équation différentielle

### Equation différentielle, problème de Cauchy

- On s'intéresse aux équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

avec  $F : I \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  ( $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ ) une fonction continue.

- Si  $p > 1$ , il s'agit en pratique d'un système différentiel.
- Le problème avec condition initiale est appelé **problème de Cauchy** :

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

### Notion de solution

#### Problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

#### Solution

Une **solution du problème de Cauchy** est la donnée d'un intervalle  $\tilde{I}$  et d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\tilde{I}, \mathbb{R}^p)$  tels que

- $t_0 \in \tilde{I}, \tilde{I} \subset I$ ,
- $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t)) \forall t \in \tilde{I}$ ,
- $\varphi(t_0) = y_0$ .

#### Remarque

On utilise souvent la même notation pour l'inconnue dans l'équation  $y$  et la solution  $\varphi$ , notée  $y$ ...

## 1.3 Un résultat théorique fondamental

### Le théorème de Cauchy-Lipschitz

#### Théorème

Considérons le problème de Cauchy :

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

avec  $F : (t, y) \in I \times \mathbb{R}^p \rightarrow F(t, y) \in \mathbb{R}^p$ . Supposons que

- $F$  est continue sur  $I \times \mathbb{R}^p$ ,
- $F$  est lipschitzienne en  $y$ , uniformément en  $t$  :  
il existe  $L > 0$  telle que

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^p}(y_0) \quad \|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Alors, le problème de Cauchy  $(*)$  possède une unique solution. Cette solution est définie sur un intervalle contenant  $t_0$ .

### Et le calcul effectif de la solution ?

- Modèle malthusien : OK  
équa diff linéaire d'ordre 1 à coeffs constants
- Modèle de croissance logistique : OK  
équa diff d'ordre 1, non linéaire mais à variables séparables
- Pendule pesant ?

$$\begin{cases} Y'(t) = F(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad F(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 \sin(x) \end{pmatrix},$$

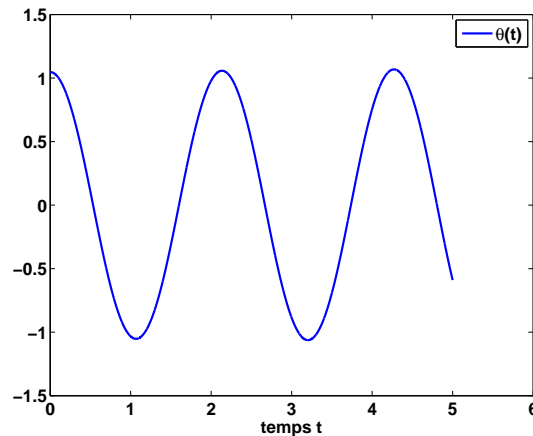
- ⇒ Il s'agit d'un système différentiel  $2 \times 2$ .
- ⇒ Le système est bien d'ordre 1... mais il est non linéaire.

### Calcul numérique d'une solution approchée

Pas d'expression explicite de la solution

↓

Calcul numérique d'une solution approchée



## 2 Mise au point de méthodes numériques et convergence

### 2.1 Principe

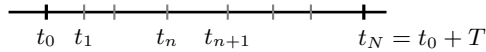
But

On suppose que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}^p, \end{cases}$$

admet une unique solution  $y$  définie sur  $I = [t_0, t_0 + T]$ .

## Subdivision de l'intervalle de temps



$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n, \quad \Delta t = \max_{0 \leq n \leq N} \Delta t_n.$$

L'objectif est de calculer des valeurs  $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ , qui soient de "bonnes" approximations de  $(y(t_n))_{0 \leq n \leq N}$ .

### Lien avec l'intégration numérique

#### Intégration de l'équation

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt \\ y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

#### Approximation

$$\begin{aligned} - y(t_{n+1}) - y(t_n) &\rightsquigarrow Y_{n+1} - Y_n \\ - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt &\rightsquigarrow \text{Formule de quadrature :} \end{aligned}$$

$$\text{RAG} \approx (t_{n+1} - t_n) F(t_n, y(t_n))$$

$$\text{RAD} \approx (t_{n+1} - t_n) F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$\text{Trapèzes} \approx (t_{n+1} - t_n) \frac{F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$$

### Méthodes numériques correspondantes

#### Méthode d'Euler explicite

→ schéma explicite

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + (t_{n+1} - t_n) F(t_n, Y_n) \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

#### Méthode d'Euler implicite

→ schéma implicite

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + (t_{n+1} - t_n) F(t_{n+1}, Y_{n+1}) \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

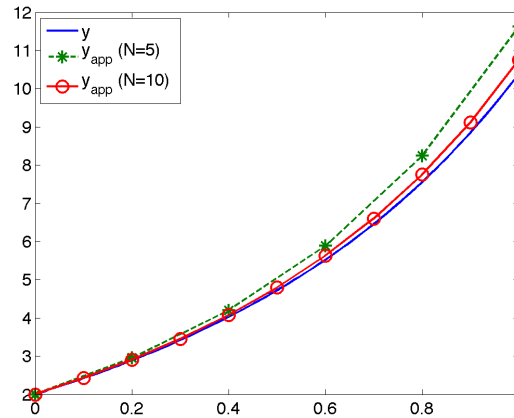
#### Méthode de Crank-Nicolson

→ schéma implicite

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + (t_{n+1} - t_n) \frac{F(t_n, Y_n) + F(t_{n+1}, Y_{n+1})}{2} \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

## 2.2 Notion de convergence

### Introduction des notions d'erreur locale/erreur globale

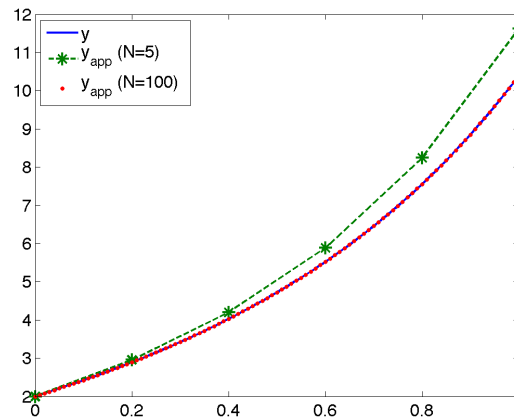


- $y(t)$  solution exacte de l'équation différentielle,
- $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$  valeurs données par le schéma numérique  
→  $y_{app}$  reconstruction d'une solution approchée affine par mx

**Erreur locale**  $e_n = y(t_n) - Y_n$

**Erreur globale**  $\mathcal{E}(\Delta t) = \max_{0 \leq n \leq N} |e_n|$  ( $\Delta$  :  $N$  dépend de  $\Delta t$ )

### Définition de la convergence



La méthode numérique est dite **convergente** si

$$\mathcal{E}(\Delta t) = \max_{0 \leq n \leq N} |e_n| \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

## 2.3 Convergence de la méthode d'Euler explicite

### Erreur de consistance

Problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

⇒ solution exacte :  $y$

Méthode d'Euler explicite

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \Delta t F(t_n, Y_n) \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

⇒ schéma numérique :  $(Y_n)$

### Définition

L'**erreur de consistance (locale)** à l'instant  $n$  est définie comme l'erreur commise par la solution exacte dans le schéma numérique :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t F(t_n, y(t_n)).$$

### Estimation de l'erreur de consistance

Problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

⇒ on suppose que la solution exacte vérifie  $y \in \mathcal{C}^2(\underbrace{[t_0, t_0 + T]}_I, \mathbb{R})$

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t F(t_n, y(t_n))$$

Mais,

$$\begin{aligned} - y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} y''(\xi_n) \\ - y'(t_n) &= F(t_n, y(t_n)) \end{aligned}$$

D'où,

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta t^2}{2} y''(\xi_n).$$

### Majoration de l'erreur de consistance

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta t^2}{2} y''(\xi_n).$$

### Majoration

$$M_2 = \sup_{[t_0, t_0 + T]} |y''(t)| \implies |\varepsilon_n| \leq \frac{M_2}{2} \Delta t^2.$$

### Remarque : lien entre $y''$ and $F$

$$\begin{aligned} y'(t) &= F(t, y(t)), \\ y''(t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y(t)) y'(t) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, y(t)) F(t, y(t)). \end{aligned}$$

### Erreur due au schéma numérique

- La solution exacte et le schéma numérique vérifient :

$$\begin{aligned}y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t F(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n \\Y_{n+1} &= Y_n + \Delta t F(t_n, Y_n)\end{aligned}$$

- Alors, comme  $e_n = y(t_n) - Y_n$ , on obtient

$$e_{n+1} = e_n + \Delta t (F(t_n, y(t_n)) - F(t_n, Y_n)) + \varepsilon_n.$$

- Si  $F$  est localement lipschitzienne en  $y$  uniformément en  $t$  (hypothèse du thm de Cauchy-Lipschitz), on a

$$\left| F(t_n, y(t_n)) - F(t_n, Y_n) \right| \leq L |e_n|$$

et

$$|e_{n+1}| \leq |e_n|(1 + L\Delta t) + |\varepsilon_n|.$$

### Deux lemmes intermédiaires

#### Lemme 1

Soit  $(\theta_n)_{n \geq 0}$  une suite positive vérifiant

$$\forall 0 \leq n \leq N, \theta_{n+1} \leq a\theta_n + \alpha, \text{ avec } a \geq 0 \text{ et } \alpha \geq 0.$$

Alors,  $\forall 1 \leq n \leq N + 1$ ,

$$\theta_n \leq a^n \theta_0 + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a^i = a^n \theta_0 + \alpha \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

#### Lemme 2

De plus, si  $a = 1 + \rho$  avec  $\rho > 0$ , comme  $(1 + \rho)^n \leq e^{n\rho}$ , on a

$$\theta_n \leq e^{n\rho} \theta_0 + \frac{\alpha}{\rho} (e^{n\rho} - 1), \forall 1 \leq n \leq N + 1.$$

### Fin de la preuve de convergence

- On a, pour tout  $0 \leq n \leq N - 1$

$$\begin{aligned}|e_{n+1}| &\leq |e_n|(1 + L\Delta t) + |\varepsilon_n|, \\ &\leq |e_n|(1 + L\Delta t) + \frac{M_2}{2} \Delta t^2.\end{aligned}$$

- On applique le Lemme 2 avec  $\rho = L\Delta t$  et  $\alpha = \frac{M_2}{2} \Delta t^2$  :

$$|e_n| \leq e^{nL\Delta t} |e_0| + \frac{M_2}{2L} \Delta t (e^{nL\Delta t} - 1), \forall 1 \leq n \leq N.$$

- Mais, pour  $1 \leq n \leq N$ ,  $n\Delta t \leq N\Delta t = T$  et

$$|e_n| \leq e^{LT} |e_0| + \frac{M_2}{2} \frac{e^{LT} - 1}{L} \Delta t, \forall 1 \leq n \leq N.$$

- Ainsi, si  $e_0 = 0$ ,  $\mathcal{E}(\Delta t) \leq \frac{M_2}{2} \frac{e^{LT} - 1}{L} \Delta t$  et

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t) = 0.$$



## Convergence du schéma d'Euler explicite

### Théorème

- Soit  $F \in \mathcal{C}^1(I \times \mathbb{R})$ ,  $t_0, T$  tels que  $[t_0, t_0 + T] \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ .
- On suppose qu'il existe  $L > 0$  tel que

$$|F(t, z_1) - F(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2| \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

- $y$  est la solution exacte du problème de Cauchy et  $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$  la suite obtenue par le schéma d'Euler explicite.

Alors, l'erreur locale définie par  $e_n = y(t_n) - Y_n$  vérifie

$$|e_n| \leq e^{LT}|e_0| + \frac{M_2}{2} \frac{e^{LT} - 1}{L} \Delta t, \quad \forall 1 \leq n \leq N.$$

si  $e_0 = 0$ , le schéma est convergent :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{E}(\Delta t) = 0 \quad (\mathcal{E}(\Delta t) = \max_{0 \leq n \leq N} |e_n|).$$

## 2.4 Cadre général des méthodes à un pas

### Définition

- On limite la présentation au cas où la subdivision  $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$  est régulière :

$$t_n = t_0 + n\Delta t \text{ avec } \Delta t = \frac{T}{N}.$$

- Une **méthode à un pas**, pour l'approximation du problème de Cauchy sur une subdivision régulière, est de la forme :

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \Delta t \Phi_F(t_n, Y_n, \Delta t), & \forall 0 \leq n \leq N-1 \\ Y_0 = y_0 \text{ (ou une valeur approchée } \tilde{y}_0 \text{ de } y_0) \end{cases}$$

avec  $\Phi_F : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \times [0, k^*] \rightarrow \mathbb{R}^p$  une fonction continue.

- Exemple :  $\Phi_F(t, Y, k) = F(t, Y) \mapsto$  méthode d'Euler explicite.

### Notion de consistance

Problème de Cauchy

Méthode à un pas

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \Delta t \Phi_F(t_n, Y_n, \Delta t) \\ Y_0 = y_0 \end{cases}$$

$\mapsto$  hyp :  $y \in \mathcal{C}^2$

$\mapsto$  hypothèse :  $\Phi_F \in \mathcal{C}^1$

L'**erreur de consistance** de la méthode à un pas est définie par

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta t \Phi_F(t_n, y(t_n), \Delta t)$$

La méthode est dite **consistante** si pour toute solution du problème de Cauchy on a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N |\varepsilon_n| = 0.$$

## Consistance et ordre

La méthode est dite **d'ordre  $p$**  si, pour toute solution du problème de Cauchy, il existe un réel  $K$  indépendant de  $\Delta t$  tel que

$$\sum_{n=0}^N |\varepsilon_n| \leq K \Delta t^p.$$

– En pratique, on obtient l'ordre  $p$  en montrant :

$$|\varepsilon_n| \leq K \Delta t^{p+1} \quad \forall 0 \leq n \leq N.$$

–  $p \geq 1 \implies$  consistance.

## Condition nécessaire et suffisante de consistance

### Développement de $\varepsilon_n$ en puissances de $\Delta t$

$$- y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$- y'(t_n) = F(t_n, y(t_n))$$

$$- \Phi_F(t_n, y(t_n), \Delta t) = \Phi_F(t_n, y(t_n), 0) + \Delta t \frac{\partial \Phi_F}{\partial k}(t_n, y(t_n), \zeta)$$

$$\varepsilon_n = \Delta t \left( F(t_n, y(t_n)) - \Phi_F(t_n, y(t_n), 0) \right) + \Delta t^2 \left( \frac{y''(\xi_n)}{2} - \frac{\partial \Phi_F}{\partial k}(t_n, y(t_n), \zeta) \right)$$

### **Théorème**

Une méthode à un pas est consistante si et seulement si

$$\forall (t, z) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \quad \Phi_F(t, z, 0) = F(t, z). \quad (*)$$

En effet, si (\*) est satisfaite, on a  $\varepsilon_n = O(\Delta t^2)$ .

## Erreur due au schéma numérique

– La solution exacte et le schéma numérique vérifient :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t \Phi_F(t_n, y(t_n), \Delta t) + \varepsilon_n$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t \Phi_F(t_n, Y_n, \Delta t)$$

– Alors, comme  $e_n = y(t_n) - Y_n$ , on obtient :

$$e_{n+1} = e_n + \Delta t (\Phi_F(t_n, y(t_n), \Delta t) - \Phi_F(t_n, Y_n, \Delta t)) + \varepsilon_n.$$

– Si on a

$$|\Phi_F(t_n, y(t_n), \Delta t) - \Phi_F(t_n, Y_n, \Delta t)| \leq \Lambda |y(t_n) - Y_n|,$$

alors

$$|e_{n+1}| \leq |e_n|(1 + \Lambda \Delta t) + |\varepsilon_n|.$$

→ idem schéma d'Euler explicite

## Stabilité d'une méthode à un pas

### Définition

S'il existe  $\Lambda > 0$  tel que  $\forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}, \forall k \in [0, k^*]$ ,

$$|\Phi_F(t, z_1, k) - \Phi_F(t, z_2, k)| \leq \Lambda |z_1 - z_2|$$

alors la méthode à un pas est dite **stable**.

Par conséquent,

– si la méthode à un pas est stable, on a

$$|e_{n+1}| \leq |e_n|(1 + \Lambda \Delta t) + |\varepsilon_n|.$$

– si elle est également consistante, on prouve sa convergence de la même façon que pour le schéma d'Euler explicite.

⇒ stabilité + consistance ⇒ convergence

## Ordre et vitesse de convergence

– La stabilité nous donne :

$$|e_{n+1}| \leq |e_n|(1 + \Lambda \Delta t) + |\varepsilon_n|.$$

– Si  $|\varepsilon_n| \leq K \Delta t^{p+1}$ , on obtient grâce au Lemme 2 :

$$|e_n| \leq e^{\Lambda T} |e_0| + K \frac{e^{\Lambda T} - 1}{\Lambda} \Delta t^p \quad \forall 0 \leq n \leq N.$$

– Si  $|e_0| = 0$ , on a donc

$$\mathcal{E}(\Delta t) \leq C \Delta t^p.$$

⇒ la méthode numérique est d'autant plus précise qu'elle est d'ordre élevé.

## 3 Les méthodes de Runge-Kutta

### Premiers exemples

Les **méthodes de Runge-Kutta** sont des méthodes à un pas où la fonction  $F$  est évaluée plusieurs fois par intervalle de la subdivision. L'objectif est bien sûr de gagner en précision (en ordre...).

### Avec la méthode des trapèzes

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt \\ &\approx \frac{\Delta t}{2} (F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))) \end{aligned}$$

### Méthode de Heun

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{n,1} = Y_n \\ Y_{n,2} = Y_n + \Delta t F(t_n, Y_{n,1}) \\ Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta t}{2} (F(t_n, Y_{n,1}) + F(t_{n+1}, Y_{n,2})) \end{array} \right.$$

## Premiers exemples

### Avec les rectangles aux points milieux

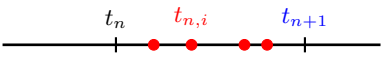
$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt \\ &\approx \Delta t F\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

### Méthode d'Euler modifiée

$$\begin{cases} \begin{cases} Y_{n,1} = Y_n \\ Y_{n,2} = Y_n + \frac{\Delta t}{2} F(t_n, Y_{n,1}) \end{cases} \\ Y_{n+1} = Y_n + \Delta t F\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, Y_{n,2}\right). \end{cases}$$

## Méthodes de Runge-Kutta explicites

### Forme générale



$$\begin{cases} \forall 1 \leq i \leq s, & \begin{cases} t_{n,i} = t_n + c_i \Delta t, \\ Y_{n,i} = Y_n + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} F(t_{n,j}, Y_{n,j}), \end{cases} \\ Y_{n+1} = Y_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i F(t_{n,i}, Y_{n,i}). \end{cases}$$

### Notation avec le tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^s b_j = 1, \\ \sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i, \quad \forall 1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

## Exemples

$s = 1$

Euler explicite

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$s = 2$

$$\begin{array}{c|cc} \text{Heun} & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

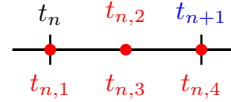
$$\begin{array}{c|cc} \text{Euler modifié} & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & 1 \end{array}$$

Cas général ( $\alpha \in ]0, 1]$ )

0	0	0
$\alpha$	$\alpha$	0
	$1 - \frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2\alpha}$

**Le fameux schéma RK4**

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$



$$\begin{cases} Y_{n,1} = Y_n \\ Y_{n,2} = Y_n + \frac{\Delta t}{2} F(t_{n,1}, Y_{n,1}) \\ Y_{n,3} = Y_n + \frac{\Delta t}{2} F(t_{n,2}, Y_{n,2}) \\ Y_{n,4} = Y_n + \Delta t F(t_{n,3}, Y_{n,3}) \end{cases}$$

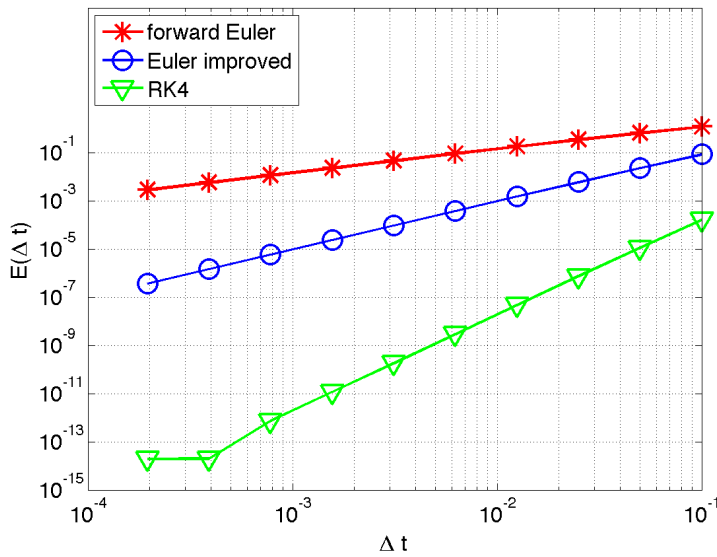
$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\Delta t}{6} \left( F(t_{n,1}, Y_{n,1}) + 2F(t_{n,2}, Y_{n,2}) + 2F(t_{n,3}, Y_{n,3}) + F(t_{n,4}, Y_{n,4}) \right)$$

**Comparaison de méthodes classiques**

Cas test

$$\begin{cases} y' = 2y - 4t \\ y(0) = 2 \end{cases} \implies y(t) = e^{2t} + 2t + 1.$$

Vitesse de convergence



$$\mathcal{E}(\Delta t) = C\Delta t^p.$$

- Euler explicite :  $p = 1$ ,
- Heun :  $p = 2$ ,
- RK4 :  $p = 4$ .