Domaine de convergence

Ex1 : Déterminer les domaines de convergence des séries entières données par les termes généraux suivants et étudier la convergence de la série lorsque $z = R$ ou $-R$ dans le cas où R est fini.

1- $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n 2^n}$ 2- $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n^n}$ 3- $u_n(z) = \dfrac{n^n z^n}{n!}$

4- $u_n(z) = (1+in) z^n$ 5- $u_n(z) = \dfrac{z^{2n}}{2^n}$ 6- $u_n(z) = \dfrac{z^n}{(\ln n)^n}$

7- $\dfrac{(n+\ln n) z^n}{n^2+1}$ 8- $u_n(z) = \dfrac{z^n}{n \ln(n+1)}$ 9- $u_n(z) = n\sqrt{n}\, z^n$

10- $u_n(z) = \dfrac{z^n}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$

NB : Pour le 3- nous rappelons la formule de Stirling : Quand n tend vers $+\infty$, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

Ex2 : Soit R le rayon de convergence de la série $u_n(z) = a_n z^n$. Déterminer le rayon de convergence de la série $u_n(z) = a_n^2 z^n$

Ex3 : Soit $(a_n z^n)$ une série entière de rayon de convergence non nul R. Montrer que la série $\left(\dfrac{a_n z^n}{n!}\right)$ a un rayon de convergence infini.

Sommation des séries entières

Ex4 : Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières (ici $x \in \mathbb{R}$)

1- $u_n(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{n x^n}{(n+1)(n+2)}$, $n \geq 0$ 2- $u_n(x) = n^2 x^n$, $n \geq 0$

3- $u_n(x) = (-1)^{n-1} (2n-1) x^{2n-2}$, $n \geq 1$ 4- $u_n(x) = \dfrac{n^2+1}{n!} x^n$, $n \geq 0$

5- $u_n(x) = (2n+1)\, x^n$, $n \geq 0$ 6- $u_n(x) = \dfrac{x^n \operatorname{ch} n\theta}{n}$ $n \geq 1, \theta \in \mathbb{R}$

Ex5: Calculer, à l'aide de séries entières, la somme des séries numériques:

1- $u_n = \dfrac{1}{n\,3^n}$, $n \geq 1$ 2- $u_n = \dfrac{(-1)^n (n+1)}{2^{2n}}$

Développements en série entière

Ex6: Déterminer les développements en série entière des fonctions réelles $y = f(x)$ tout en donnant le domaine de convergen

1- $y = \sin 3x + x \cos 3x$ 2- $y = (x - \tan x) \cos x$

3- $y = \cos(x+a)$ 4- $y = \operatorname{sh} x$

5- $y = \cos^2 x$ 6- $y = e^{2-x^2}$

7- $y = \sqrt{1+x^2}$ 8- $y = \sqrt[3]{8 - x^3}$

9- $y = \ln(2+x)$ 10- $y = (1+x)\, e^{-x}$

11- $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ 12- $y = \ln(x^2 + 3x + 2)$

13- $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$ 14- $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

Ex7: Donner les développements en série entière des fonctions suivantes tout en donnant le domaine de convergence et en justifiant l'emploi des différentes opérations.

1- $y = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ 2- $y = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

3- $y = \dfrac{x^2}{(x-1)(2-x)^2}$ 4- $y = \dfrac{x}{9 + x^2}$

5- $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ 6- $y = \operatorname{Arcsin} x$