Chapitre XIII

Séries de Fourier

Ce chapitre est consacré à l'étude des séries $[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$, où (a_n) et (b_n) sont des suites réelles. Si une telle série converge normalement sur $\mathbb{R}$, nous relions la somme $S(x) = \sum_0^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx$ aux coefficients a_n et b_n.

Considérons une fonction périodique, f, de période 2π, que nous choisissons continue et de classe C^1 par morceaux pour simplifier cette introduction. La relation ci-dessus, entre somme et coefficients, permet de construire une série $[a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx]$, appelée *série de Fourier associée à f*.

Après avoir établi quelques propriétés des séries de coefficients $[a_n(f)]$ et $[b_n(f)]$, nous montrons que la série de Fourier associée à f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f, (Théorème de Dirichlet). Nous en déduisons l'identité de Parseval et l'appliquons à la détermination de sommes de séries numériques particulières.

La dernière section est une introduction au problème de Dirichlet, à l'origine de la théorie des séries de Fourier.

1 Séries trigonométriques :

1.1 Définitions :

Définition 1.1 : On appelle *série trigonométrique* une série de fonctions *réelles*, $[u_n(x)]$, définies par :

$$u_n(x) = a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x \,,$$

$n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $b_0 = 0$. La somme $S(x)$, si elle existe, a pour période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$.

Si la série trigonométrique converge sur $E \subset [0, T]$, elle converge aussi dans $E^{(n)} = E + nT \subset [nT, (n+1)T]$, obtenu, à partir de E, par une translation de nT.

Expression complexe : Le but est d'écrire $a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$ sous la forme $c_n\, e^{in\omega x} + c_{-n}\, e^{-in\omega x}$. Supposons $n > 0$; à partir de

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

on obtient deux nombres complexes conjugués :

$$c_n = \frac{1}{2}\,(a_n - i\, b_n) \;;\; c_{-n} = \frac{1}{2}\,(a_n + i\, b_n)\,.$$

Réciproquement, à tout couple de nombres complexes conjugués, (c_n, c_{-n}), on associe deux nombres réels vérifiant les égalités ci-dessus et définis par :

$$a_n = c_n + c_{-n} \;;\; b_n = i\,(c_n - c_{-n})\,.$$

En $n = 0$, on a $a_0 = c_0$, $b_0 = 0$. La somme de la série se note donc indifféremment :

$$S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n\, e^{in\omega x} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)\,.$$

1.2 Convergence d'une série trigonométrique réelle :

Théorème 1.2 : *Si les séries numériques $[|a_n|]$ et $[|b_n|]$ convergent, la série trigonométrique $[a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Corollaire 1.3 : *1) Si les séries $[|a_n|]$ et $[|b_n|]$ convergent, la somme $S(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et*

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_1^\infty \frac{b_n}{n\omega} + a_0\, x + \sum_1^\infty \left(\frac{a_n \sin n\omega x}{n\omega} - \frac{b_n \cos n\omega x}{n\omega}\right)\,.$$

2) Si les séries $[n\,|a_n|]$ et $[n\,|b_n|]$ convergent, la somme $S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à dérivée continue, et

$$S'(x) = \sum_1^\infty (-n\,\omega\,a_n\,\sin n\omega x + n\,\omega\,b_n\,\cos n\omega x)\ .$$

Plus généralement, si les séries $[n^k\,|a_n|]$ et $[n^k\,|b_n|]$ convergent, la somme $S(x)$ est de classe C^k. La dérivée d'ordre p, $1 \le p \le k$, de $S(x)$ est la somme de la série obtenue en dérivant à l'ordre p la fonction $x \mapsto a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$.

Le théorème suivant nous garantit l'existence et la continuité de la somme de la série trigonométrique $[a_n\,\cos n\omega x + b_n\,\sin n\omega x]$ avec des hypothèses plus faibles sur les coefficients a_n et b_n.

Théorème 1.4 : *Si les* **suites** *(a_n) et (b_n) tendent vers 0 en décroissant, la série $[a_n\,\cos n\omega x + b_n\,\sin n\omega x]$ converge pour tout x, sauf peut-être en $x = kT$, $k \in \mathbb{Z}$. La fonction somme, $x \mapsto S(x)$, est continue en tout point $x \neq kT$.*

Exemple 1.5 : *La série $\left[\frac{\sin n\omega x}{n}\right]$ est convergente sur $]0, 2\pi[$ et sa somme est continue en tout $x \neq 2k\pi$.*

Exemple 1.6 : *La série $\left[\frac{\cos n\omega x}{n^2}\right]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration du Théorème 1.2 : Si les séries numériques $[|a_n|]$ et $[|b_n|]$ convergent, la convergence normale sur $\mathbb{R}$ découle de l'inégalité :

$$|\ a_n\ \cos n\omega x + b_n\ \sin n\omega x\ | \le |\ a_n\ | + |\ b_n\ |\ .$$

□

Démonstration du Théorème 1.4 : La première partie du théorème est une conséquence du critère d'Abel (cf Chapitre XI) appliqué à chacune des séries $[a_n \cos n\omega x]$ et $[b_n \sin n\omega x]$ (cf Exemple 5.3 du Chapitre XI). Si la suite (a_n) tend vers 0 en décroissant, montrons que la fonction $x \mapsto \sum_0^\infty a_k \sin k\omega x$ est continue sauf peut-être en $x \in \mathbb{Z}T$.

• Soit $x_0 \notin \mathbb{Z}T$, choisissons un intervalle ouvert $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ tel que l'intersection $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap \mathbb{Z}T$ soit vide. Dans l'Exemple 5.3 du Chapitre XI, nous avons établi

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} \sin k\omega x\right| \le \frac{1}{\left|\sin \frac{\omega x}{2}\right|}\ .$$

La fonction $x \mapsto |\sin \frac{\omega x}{2}|^{-1}$ est continue sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, donc bornée, et il existe K tel que

$$(\forall x \in I) \left|\sum_{k=n}^{n+m} \sin k\omega x\right| \leq K \, .$$

• *Fixons* $\varepsilon > 0$. Dans la démonstration du Corollaire 5.2 du Chapitre XI, nous avons remarqué que la série $[a_k - a_{k+1}]$ converge. Nous pouvons donc choisir un entier p tel que, pour tout $q > 0$, on ait $8\,K\,|a_{p+q}| < \varepsilon$ et $8\,K \sum_p^{p+q-1} (a_k - a_{k+1}) < \varepsilon$. *Fixons cet entier* p. Dans la preuve du critère d'Abel, nous avons établi :

$$|\ a_p \sin p\omega x + \cdots + a_{p+q} \sin(p+q)\omega x \ |\leq K \left(\sum_{k=p}^{p+q-1} (a_k - a_{k+1})\right) + K\ |\ a_{p+q}\ |,$$

d'où $4\left|\sum_p^{\infty} a_k \sin k\,\omega x\right| < \varepsilon$, pour tout $x \in I$.

• La continuité des fonctions $x \mapsto a_k \sin k\omega x$, pour $k = 1, \ldots, p-1$, permet de trouver un nombre $\eta > 0$ $(\eta < \alpha)$ tel que

$$|\ x - x_0\ |< \eta \Rightarrow \sum_0^{p-1} |\ a_k \sin k\omega x - a_k \sin k\omega x_0\ |< \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

• Pour $|\ x - x_0\ |< \eta$, nous avons obtenu :

$$\begin{aligned}
|\sum_0^{\infty} a_k \sin k\omega x - \sum_0^{\infty} a_k \sin k\omega x_0\ | \quad &\leq \quad |\sum_p^{\infty} a_k \sin k\omega x\ | + |\sum_p^{\infty} a_k \sin k\omega x_0\ | \\
&\quad + \sum_0^{p-1} |\ a_k \sin k\omega x - a_k \sin k\omega x_0\ | \\
&\leq \quad \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Le résultat pour $x \mapsto \sum_0^{\infty} b_k \cos k\omega x$ se démontre de façon analogue. □

1.3 Relations entre coefficients et somme :

L'égalité $\alpha_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ établie au Chapitre XII relie coefficients et somme d'une série entière $f(x) = \sum_0^{\infty} \alpha_n x^n$. Dans ce paragraphe, nous montrons que les coefficients d'une série trigonométrique $[a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x]$ peuvent également être déterminés par sa somme. Commençons par remarquer :

Proposition 1.7 : *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T, continue par morceaux, alors :*

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_b^{b+T} f(t)\,dt$$

pour tout a et tout b.

Démonstration : La règle de Chasles $\int_a^{a+T} = \int_a^b + \int_b^{b+T} + \int_{b+T}^{a+T}$ et le changement de variables $t \mapsto t - T$ entraînent $\int_a^b = \int_{a+T}^{b+T}$. □

En conséquence, lorsque l'on intègre une fonction f, périodique de période T, sur un intervalle d'amplitude T, l'intégrale ne dépend pas de l'intervalle choisi ; nous notons

$$\int_T f(t)\,dt$$

la valeur commune des intégrales $\int_a^{a+T} f(t)\,dt$.

Théorème 1.8 : *Pour toute série trigonométrique $[a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x]$ convergeant normalement sur $\mathbb{R}$, de somme S, on a :*

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T S(x)\,dx; \\ a_p = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T S(x)\,\cos p\omega x\,dx\ ,\ p > 0\ ; \\ b_p = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T S(x)\,\sin p\omega x\,dx\ ,\ p > 0\ . \end{cases}$$

En notation complexe, ces égalités deviennent :

$$c_p = \frac{1}{T}\int_T S(x)e^{-ip\omega x}\,dx\ ,\ p \in \mathbb{Z}\,.$$

Démonstration : De $S(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$, on déduit, pour tout entier p fixé :

$$S(x)\,\cos p\omega x = a_0\,\cos p\omega x + \sum_{n\geq 1}(a_n\,\cos n\omega x\,\cos p\omega x + b_n\,\sin n\omega x\,\cos p\omega x)\,.$$

Le membre de droite étant une série convergeant normalement sur $\mathbb{R}$, nous pouvons intégrer terme à terme :

$$\int_T S(x)\,\cos p\omega x\,dx =$$
$$\int_T a_0\,\cos p\omega x\,dx + \sum_{n\geq 1}(a_n \int_T \cos n\omega x\,\cos p\omega x\,dx + b_n \int_T \sin n\omega x\,\cos p\omega x\,dx)\,.$$

Les égalités

$$\begin{cases} \cos p\omega x \cos q\omega x = \frac{1}{2}\cos(p+q)\omega x + \frac{1}{2}\cos(p-q)\omega x \\ \sin p\omega x \cos q\omega x = \frac{1}{2}\sin(p+q)\omega x + \frac{1}{2}\sin(p-q)\omega x \end{cases}$$

impliquent

$$\begin{aligned} &\int_T \cos p\omega x \, \cos q\omega x \, dx = 0 && \text{si } p \neq q\,; \\ &\int_T \cos^2 p\omega x \, dx = \frac{T}{2} && \text{si } p > 0\,; \\ &\int_T \cos p\omega x \, \sin q\omega x \, dx = 0 && (\forall p)\,(\forall q)\,. \end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} &\int_T S(x) \, \cos p\omega x \, dx = \frac{T\,a_p}{2}\,, \quad p > 0\,; \\ &\int_T S(x)\, dx = T\, a_0\,. \end{aligned}$$

Le résultat pour b_p s'obtient de façon similaire en multipliant par $\sin p\omega x$. □

Une démonstration en notation complexe peut également être effectuée à partir de

$$\int e^{inx}\, dx = \int \cos nx \, dx + i \int \sin nx \, dx = \frac{e^{inx}}{in}\,.$$

2 Développement d'une fonction en série de Fourier :

2.1 Série de Fourier associée à f :

Avec les résultats de la première section, on sait que si une fonction périodique, f, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, s'écrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \, \cos n\omega x + b_n \, \sin n\omega x)\,,$$

avec convergence normale de la série trigonométrique, alors les coefficients a_n et b_n sont reliés à f (Théorème 1.8). A la fonction f, nous pouvons donc associer une série trigonométrique $[a_n(f) \, \cos n\omega x + b_n(f) \sin n\omega x]$; cherchons à déterminer la somme de cette série, lorsqu'elle existe.

Définition 2.1 : Soit f une fonction continue par morceaux, sur tout intervalle fermé borné, périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, la *série de Fourier associée à f* est la série trigonométrique $[a_n(f)\cos n\omega x + b_n(f)\sin n\omega x]$, définie par :

$$\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T f(x)\,dx; \\ a_p(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(x)\cos p\omega x\,dx\ ,\ p > 0\ ; \\ b_p(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(x)\sin p\omega x\,dx\ ,\ p > 0\ ; \end{cases}$$

En notation complexe, la série $[c_n(f)\,e^{in\omega x}]$, $n \in \mathbb{Z}$, est définie par :

$$c_p(f) = \frac{1}{T}\int_T f(x)\,e^{-ip\omega x}\,dx\,.$$

Déterminons quelques séries de Fourier particulières avant d'étudier leurs propriétés. Remarquons que si la fonction f est paire, alors $b_p(f) = 0$; de même, si f est impaire, $a_p(f) = 0$.

Exemple 2.2 : *Série de Fourier de la fonction périodique de période 1, égale à x sur* $[0,1]$

Un calcul direct et des intégrations par parties donnent :

$$a_0 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,;\ a_n = 2\int_0^1 x\cos 2\pi nx\,dx = 0\,;\ b_n = 2\int_0^1 x\sin 2\pi nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\,;$$

la série de Fourier associée est :

$$\frac{1}{2} - \sum_{n\geq 1}\frac{\sin 2\pi nx}{n\pi}\,.$$

□

Exemple 2.3 : *Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π, égale à 0 sur $]-\pi,0]$ et à x^2 sur $[0,\pi[$.*

Comme ci-dessus, on obtient :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^2}{6}\,;\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{2}{n^2}\,;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx = (-1)^n\left(\frac{2}{\pi n^3} - \frac{\pi}{n}\right) - \frac{2}{\pi n^3}\,.$$

□

2.2 Propriétés des coefficients de la série de Fourier :

La somme d'une série trigonométrique présentant généralement des discontinuités, la propriété "de classe C^1" doit être généralisée en :

Définition 2.4 : Une fonction réelle, définie sur $I \subset \mathbb{R}$, est *de classe C^1 par morceaux* si, pour tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$, il existe une suite finie $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b$, telle que :

1) f est de classe C^1 sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, k-1$;

2) $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(\alpha_i + h)$ et $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f'(\alpha_i + h)$ existent pour $i = 0, \ldots, k-1$; notons les respectivement $f(\alpha_i + 0)$ et $f'(\alpha_i + 0)$;

3) $\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(\alpha_i + h)$ et $\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f'(\alpha_i + h)$ existent pour $i = 1, \ldots, k$; notons les respectivement $f(\alpha_i - 0)$ et $f'(\alpha_i - 0)$.

Remarquons que la dérivée d'une fonction de classe C^1 par morceaux sur $[a,b]$ est bornée sur $[a,b]$. Nous regroupons les principales propriétés des coefficients d'une série de Fourier dans le même énoncé :

Théorème 2.5 : *Considérons une fonction, f, continue par morceaux, périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et sa série de Fourier associée $[a_n(f)\cos n\omega x + b_n(f)\sin n\omega x]$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) les séries $[a_n(f)^2]$ et $[b_n(f)^2]$ convergent, donc les suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ ont pour limite 0 ;

2) si f est continue et de classe C^1 par morceaux, les coefficients de f et de sa dérivée, f', sont reliés par :

$$c_n(f') = in\omega\, c_n(f)\,;\; a_n(f') = n\omega\, b_n(f)\,;\; b_n(f') = -n\omega\, a_n(f)\,.$$

3) si f est continue et de classe C^1 par morceaux, les séries $[(na_n(f))^2]$ et $[(nb_n(f))^2]$ convergent.

Démonstration : 1) Notons $P_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos k\omega x$. Le Théorème 1.8 appliqué aux fonctions $x \mapsto \cos k\omega x$ donne :

$$\int_T P_n(f)(t)^2 dt = \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(f)^2\,.$$

Intéressons-nous maintenant à la valeur de $\displaystyle\int_T P_n(f)(t)\,[f(t) - P_n(f)(t)]\;dt$; en développant le premier facteur, $P_n(f)(t)$, dans le produit $P_n(f)(t)\,[f(t) - P_n(f)(t)]$, on obtient une somme de termes de la forme $a_p(f)\cos p\omega t\,[f(t)-P_n(f)(t)]$, avec $1 \le p \le n$. Le calcul

$$\begin{aligned}\int_T (\cos p\omega t)\,[f(t)-P_n(f)(t)]\,dt &= \int_T f(t)\cos p\omega t\,dt - \sum_{k=1}^{n}\int_T a_k(f)\cos p\omega t\cos k\omega t\,dt \\ &= \frac{T}{2}a_p(f) - \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\int_T \cos p\omega t\,\cos k\omega t\,dt = 0\end{aligned}$$

implique

$$\int_T P_n(f)(t)\,[f(t)-P_n(f)(t)]\,dt = 0\,.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\int_T f(t)^2\,dt &= \int_T [f(t)-P_n(f)(t)+P_n(f)(t)]^2\,dt \\ &= 2\int_T P_n(f)(t)\,[f(t)-P_n(f)(t)]\,dt + \int_T [f(t)-P_n(f)(t)]^2\,dt \\ &\quad + \int_T P_n(f)(t)^2\,dt \\ &= \int_T (f(t)-P_n(f)(t))^2\,dt + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(f)^2 \\ &\ge \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(f)^2\end{aligned}$$

Ainsi, la série $[(a_k(f))^2]$ converge car sa suite des sommes partielles est majorée.

2) En admettant la validité de la formule d'intégration par parties dans le cas où l'une des fonctions est continue et de classe C^1 par morceaux (cf Lemme 2.6) on a :

$$\begin{aligned}c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left\{\left[f(t)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_T - \int_T \frac{f'(t)e^{-in\omega t}}{-in\omega}\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{T}\frac{1}{in\omega}\int_T f'(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{in\omega}c_n(f')\end{aligned}$$

3) La propriété 3) est une conséquence immédiate des propriétés 1 et 2. □

Lemme 2.6 : *Considérons deux fonctions u et v définies sur un intervalle fermé borné, $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si v est de classe C^1 et u continue, de classe C^1 par morceaux, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = v(b)u(b) - v(a)u(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt\,.$$

Démonstration : Le résultat est vrai si u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle d'intégration. Considérons la subdivision $a = \alpha_0, \dots, b = \alpha_k$ associée à u et notons u_i' le prolongement par continuité de la fonction u' à l'intervalle fermé $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, i.e. : $u_i'(\alpha_i) = u'(\alpha_i - 0)$, $u_i'(\alpha_{i+1}) = u'(\alpha_{i+1} - 0)$. Appliquons la formule des accroissements finis à u sur $[\alpha_i, \alpha_i + h]$, $h > 0$:

$$\frac{u(\alpha_i + h) - u(\alpha_i)}{h} = u'(\alpha_i + \theta(h))\,, 0 < \theta(h) < h\,,$$

pour en déduire $u_i'(\alpha_i) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{u(\alpha_i + h) - u(\alpha_i)}{h}$. En procédant de même en α_{i+1}, nous constatons que la fonction u devient une fonction de classe C^1 sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$; nous pouvons donc lui appliquer la formule usuelle d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(t)v'(t)\,dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u(t)v'(t)\,dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[u(\alpha_{i+1})v(\alpha_{i+1}) - u(\alpha_i)v(\alpha_i) - \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u_i'(t)v(t)\,dt \right] \\
&= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} u_i'(t)v(t)\,dt \\
&= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt
\end{aligned}$$

(La continuité de u a été utilisée dans l'élimination des termes $u(\alpha_i)v(\alpha_i)$) □

2.3 Théorème de Dirichlet :

Théorème 2.7 : *Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux, périodique de période T, alors la série de Fourier de f en x converge vers $\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$. En particulier, si f est de plus continue en x, la série de Fourier associée à f converge vers $f(x)$.*

Remarque 2.8 : Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier associée diverge pour certaines valeurs de x.

Démonstration : Nous utilisons la notation complexe et choisissons le cas particulier $T = 2\pi$ pour des facilités d'écriture. Notons $s_p(x) = \sum_{-p}^{p} c_n\, e^{inx}$ la somme partielle de la série de Fourier, en un point x *fixé*.

$\boxed{1}$ Calcul de $s_p(x) - \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$.

Notons $\Phi_p(x) = \sum_{-p}^{p} e^{inx}$; la fonction Φ_p est paire et vérifie :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_p(x)\,dx = 2\pi\,;\ \int_{-\pi}^{0} \Phi_p(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} \Phi_p(x)\,dx = \pi\,.$$

Le calcul de la somme partielle $s_p(x)$:

$$\begin{aligned} s_p(x) &= \sum_{-p}^{p} e^{inx}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{-p}^{p} e^{in(x-t)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\Phi_p(x-t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-x}^{2\pi-x} f(u+x)\,\Phi_p(u)\,du \ \ (\Phi_p \text{ est paire !}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,\Phi_p(u)\,du \end{aligned}$$

permet d'écrire :

$$s_p(x) - \frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\,\Phi_p(u)\,du - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+0)\,\Phi_p(u)\,du - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\,\Phi_p(u)\,du =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(f(u+x)-f(x+0)\right)\,\Phi_p(u)\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(f(u+x)-f(x-0)\right)\,\Phi_p(u)\,du\,.$$

Il reste à établir que chacune de ces deux intégrales tend vers zéro. Les deux preuves étant similaires, nous nous contentons de montrer :

$$\boxed{\boxed{2}\ \lim_{p\to\infty}\int_0^{\pi}\left(f(u+x)-f(x+0)\right)\,\Phi_p(u)\,du = 0.}$$

Développons $\Phi_p(u)$:

$$\begin{aligned} \Phi_p(u) &= e^{-ipu}\,\frac{1-e^{i(2p+1)u}}{1-e^{iu}} = \frac{e^{-ipu}-e^{i(p+1)u}}{1-e^{iu}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{u}{2}}}{e^{-i\frac{u}{2}}}\cdot\frac{e^{-ipu}-e^{i(p+1)u}}{1-e^{iu}} = \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} \end{aligned}$$

Choisissons α, $0<\alpha<\pi$, tel que f soit C^1 sur $]x, x+\alpha[$ (N'oublions pas que x est fixé) et décomposons $\int_0^{\pi} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}$.

$\boxed{\int_0^\alpha}$ Notons M la borne supérieure de f' sur $[0, \alpha]$ et remarquons $u \leq \pi \sin \frac{u}{2}$, pour tout $u \in [0, \pi]$. Nous appliquons le théorème des accroissements finis à f sur $[x, x+u]$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha (f(u+x) - f(x+0))\ \Phi_p(u)\,du\right| &= \left|\int_0^\alpha \frac{u\, f'(x+\theta u)\ \sin\left(\frac{2p+1}{2}\right) u}{\sin \frac{u}{2}}\,du\right| \\ &\leq \int_0^\alpha \frac{M\, u\, \left|\sin\left(\frac{2p+1}{2}\right) u\right|}{\sin\frac{u}{2}}\,du \leq M\,\pi\,\alpha\,.\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^\alpha$ peut être rendue arbitrairement petit en choisissant bien α.

$\boxed{\int_\alpha^\pi}$ La majoration de cette intégrale par un nombre arbitrairement petit est une conséquence du lemme suivant car la fonction $u \mapsto \dfrac{f(x+u) - f(x+0)}{\sin \frac{u}{2}}$ est C^1 par morceaux sur $[\alpha, \pi]$. □

Lemme 2.9 : *Toute fonction f de classe C^1 par morceaux sur $I = [a, b]$ vérifie*

$$\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\ \cos nx\,dx = 0\\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\ \sin nx\,dx = 0\end{array}$$

Démonstration : Effectuons une intégration par parties :

$$\int_a^b f(x)\ \sin nx\,dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\ \sin nx\,dx =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1} (f(\alpha_i + 0)\ \cos n\alpha_i - f(\alpha_{i+1} - 0)\ \cos n\alpha_{i+1}) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f'(x)\ \cos nx\,dx$$

Il suffit maintenant de constater que cette dernière expression tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ (rappelons que f' est bornée). □

2.4 Convergence normale d'une série de Fourier

Théorème 2.10 : (Identité de Parseval) *Soit f une fonction continue, périodique, dont la série de Fourier associée converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f, alors :*

$$2a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{2}{T}\int_T f(x)^2\,dx\,.$$

Le résultat suivant fournit une classe de fonctions f dont la série de Fourier associée converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.11 : *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux, périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à f.*

Corollaire 2.12 : *Le développement en série de Fourier d'une fonction périodique, continue, de classe C^1 par morceaux est unique.*

Démonstration du théorème 2.10 : Partons de l'égalité

$$f(x)^2 = a_o(f)\, f(x) + \sum_1^{\infty} (a_n(f)\, f(x) \cos n\omega x + b_n(f)\, f(x) \sin n\omega x) \ .$$

L'hypothèse de convergence normale permet de permuter les signes $\sum$ et $\int$ et d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_T f(x)^2\, dx &= \int_T a_0(f)\, f(x)\, dx + \sum_1^{\infty} a_n(f) \int_T f(x) \cos n\omega x\, dx \\ &\quad + b_n(f) \int_T f(x) \sin n\omega x\, dx \\ &= T a_0(f)^2 + \frac{T}{2} \sum_1^{\infty} \left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \right) \ . \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème 2.11 : De $\left(n\, |a_n(f)| - \dfrac{1}{n} \right)^2 \geq 0$, nous déduisons :

$$| \, a_n(f) \, | \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + (n a_n(f))^2 \right) \ .$$

Les deux séries, $\left[\dfrac{1}{n^2} \right]$ et $\left[(n a_n(f))^2 \right]$, étant convergentes (Théorème 2.5), la série $[a_n(f)]$ est une série numérique absolument convergente. On montre de même la convergence absolue de $[b_n(f)]$, d'où la convergence normale de la série de Fourier sur $\mathbb{R}$, (Théorème 1.2). □

Démonstration du corollaire 2.12 : Si $a_n(f) = b_n(f) = 0$, pour tout n, l'identité de Parseval implique $\int_T f(x)^2\, dx = 0$, d'où l'on déduit $f = 0$. L'unicité du développement en série de Fourier en découle par un argument classique. □

2.5 Exemples :

Exemple 2.13 : *Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π, égale à 0 sur $]-\pi, 0]$ et à x^2 sur $[0, \pi[$.*

On a déterminé la série de Fourier dans l'exemple 2.3. La fonction étudiée étant évidemment C^1 par morceaux, on peut lui appliquer le théorème 2.7 et déterminer des sommes de séries particulières :

$\boxed{x = 0}$ La fonction étant continue en 0, on a $0 = \dfrac{\pi^2}{6} - 2\left(1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots\right)$ et

$$\boxed{\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p+1}}{p^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

$\boxed{x = \pi}$ La fonction considérée n'est pas continue en π, donc

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2}\{f(\pi + 0) + f(\pi - 0)\} = \frac{\pi^2}{6} + 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

et

$$\boxed{\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

□

Exemple 2.14 : *Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π, égale à $| x |$ sur $]-\pi, \pi]$.*

Par parité de la fonction f, les coefficients b_n sont nuls. Pour les coefficients a_n, on obtient :

$$a_0 = \frac{\pi}{2} \; ; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$

d'où $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2}$, $n \geq 1$. La fonction étudiée étant C^1 par morceaux, le théorème 2.7 s'applique :

$$\text{si } | x | < \pi, \; | x | = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

L'égalité de Parseval se réduit ici à :

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n\geq 0} \frac{16}{\pi^2 (2n+1)^4} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{2\pi^2}{3} ,$$

d'où

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} .}$$

De $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^4} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} = \frac{15}{16} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$, nous déduisons

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} .}$$

□

Exemple 2.15 : *Série de Fourier de la fonction* $x \mapsto \mid \sin x \mid$.

Considérons $x \mapsto \mid \sin x \mid$ comme une fonction de période 2π. Par parité, les coefficients de Fourier b_n sont nuls ; calculons les autres :
$a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi}$; $a_1 = 0$;
$n > 1$, $a_n = \dfrac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t \, \cos nt \, dt = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi}$;
d'où $a_{2p+1} = 0$; $a_{2p} = -\dfrac{4}{\pi\,(4p^2-1)}$. La fonction $x \mapsto \mid \sin x \mid$ étant continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet s'applique :

$$\mid \sin x \mid = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2px}{4p^2 - 1} .$$

L'égalité de Parseval

$$2a_0^2 + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + \sum_{n\geq 1} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt$$

se réduit ici à :

$$\frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \, dt = 1 ,$$

d'où

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} .$$

2.6 Compléments :

Ce paragraphe ne comporte pas de démonstration ; il a pour but de signaler quelques propriétés des séries de Fourier ne requérant que la continuité de f.

Théorème 2.16 : *Supposons f continue, de période 2π, de coefficient de Fourier c_n et posons $s_p(x) = \sum_{-p}^{p} c_n\, e^{inx}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) Convergence en moyenne quadratique.

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (s_p(x) - f(x))^2\, dx\right) = 0\,.$$

2) Le polynôme trigonométrique s_p est celui qui "réalise le mieux" cette limite : si $N_p(x) = \sum_{-p}^{p} b_n\, e^{inx}$, avec des coefficients b_n vérifiant $b_n = \overline{b_{-n}}$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (N_p(x) - f(x))^2\, dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} (s_p(x) - f(x))^2\, dx\,.$$

3) Égalité de Parseval.

$$2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} ||c_n||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx \text{ ou } 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx\,.$$

La quantité $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$ correspond en Physique à l'énergie de f.

3 Problèmes de Dirichlet :

Ce paragraphe introduit l'origine des développements de fonctions en série de Fourier et présente (brièvement) la transformée de Fourier. Les deux notions proviennent d'un même problème, le problème de Dirichlet, posé dans deux domaines différents de $\mathbb{R}^2$.

3.1 Problème de Dirichlet dans le disque :

Notons $D(0,1)$ le disque fermé du plan, de centre 0 et de rayon 1. Soit $u\ : D(0,1) \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $D(0,1)$, de laplacien nul. Nous voulons déterminer u à partir de sa donnée sur le bord du disque. Un exemple concret de cette situation est celui de l'équation de la chaleur : de la connaissance de la température sur le bord d'un disque, on veut déduire la répartition de la chaleur à l'intérieur du disque.

La géométrie du problème justifie le choix des coordonnées polaires : nous cherchons à déterminer une fonction $u(r,\theta)$, continue pour $r \leq 1$, et vérifiant :

$$\begin{cases} u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)\,, \\ u(1,\theta) = f(\theta)\,, \\ \Delta u(r,\theta) = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\,. \end{cases}$$

où la fonction $f(\theta)$ est connue. Nous nous intéressons aux solutions de l'équation aux dérivés partielles $\Delta u = 0$ se décomposant en $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. L'équation

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rR'(r)\Theta(\theta)\right) + \frac{1}{r}R(r)\Theta''(\theta) = rR''(r)\Theta(\theta) + R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R(r)\Theta''(\theta) = 0\,,$$

s'écrit également :

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\,.$$

L'égalité de ces deux fonctions montre qu'elles sont toutes les deux constantes, i.e. indépendantes de r et θ respectivement. Notons μ la valeur (constante) commune. Les deux équations différentielles obtenues s'intègrent facilement en :

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} Ae^{i\sqrt{\mu}\theta} + Be^{-i\sqrt{\mu}\theta} & \mu > 0 \\ A + B\theta & \mu = 0 \\ Ae^{\sqrt{-\mu}\theta} + Be^{-\sqrt{-\mu}\theta} & \mu < 0 \end{cases}$$
$$R(r) = \begin{cases} Cr^{\sqrt{\mu}} + Dr^{-\sqrt{\mu}} & \mu > 0 \\ C + D\ln r & \mu = 0 \\ Cr^{i\sqrt{-\mu}} + Dr^{-i\sqrt{-\mu}} & c < 0 \end{cases}$$

(L'équation, $r^2R'' + rR' - \mu R = 0$, est une équation d'Euler qui s'intègre à l'aide du changement de variable $r = e^t$, $r = -e^t$.)

Constatons maintenant :

- si $\mu < 0$, la fonction Θ n'est pas bornée donc ne peut être périodique ;
- si $\mu = 0$, pour la même raison, on doit avoir $B = 0$;
- si $\mu > 0$, la fonction Θ est périodique de période 2π si, et seulement si, $\sqrt{\mu} \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\mu = n^2, n \in \mathbb{N}$.
- la continuité en $r = 0$ de la fonction $R(r)$ implique $D = 0$.

Il reste donc comme seules solutions compatibles avec le problème posé :

$$u(r,\theta) = \begin{cases} AC & n = 0 \\ Cr^n\left(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}\right) & n > 0 \end{cases}$$

Si $u_1, \dots, u_N$ sont des solutions, leur somme $u_1 + \cdots + u_N$ est aussi solution. En résumé, on peut déduire des considérations précédentes que, si l'on sait écrire f comme la somme d'une série trigonométrique, $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$, alors $u(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$ est solution de l'équation aux dérivées partielles de départ (Le lecteur admettra que ce sont les seules solutions).

La théorie des séries de Fourier nous dit précisément quelles fonctions f admettent cette décomposition et comment la déterminer ; elle répond donc complètement au problème de Dirichlet dans un disque.

3.2 Problème de Dirichlet dans le demi-plan :

Le problème est similaire ; notons $\mathcal{P}^+$ le demi-plan fermé de $\mathbb{R}^2$ constitué des couples (x,y) avec $y \geq 0$. Soit $v : \mathcal{P}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée sur $\mathcal{P}^+$, de laplacien nul, nous voulons déterminer v à partir de sa donnée sur le bord $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ du demi-plan.

Nous cherchons donc à déterminer une fonction $v(x,y)$, continue et bornée pour $-\infty < x < \infty$ et $y \geq 0$, vérifiant :

$$\begin{cases} v(x,0) = g(x)\,, \\ \Delta v(x,y) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,, \end{cases}$$

où la fonction $f(x)$ est connue.

On effectue le même travail que précédemment pour résoudre $\Delta v = 0$, en posant $v(x,y) = X(x)Y(y)$. Nous ne présentons que la conclusion. Les solutions sont indexées par un paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, et définies par :

$$v_\alpha(x,y) = e^{-|\alpha| y} e^{i\alpha x}\,.$$

Sur le disque les solutions dépendent d'un paramètre entier et la superposition des solutions fournit une série. Ici, le paramètre est réel, la superposition des solutions correspond à une intégrale :

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\alpha)\, e^{-|\alpha| y}\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

avec

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha\,.$$

La développement de la fonction $f(\theta)$ en série de Fourier apparaissant dans la section 3.1 devient ici l'écriture de $g(x)$ sous la forme $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$. On résout ce problème grâce à la notion de *transformée de Fourier*. Posons :

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\alpha}\, g(x)\, dx\,,$$

alors, sous de bonnes hypothèses sur la fonction g (C^1 par morceaux, à dérivée bornée et telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mid g \mid$ existe) on a :

$$g(x) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \hat{g}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha\,.$$

Les solutions au problème de Dirichlet s'écrivent alors :

$$v(x,y) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \hat{g}(\alpha)\, e^{-|\alpha| y}\, e^{i\alpha x}\, d\alpha\,.$$

4 Exercices et Problèmes

Exercice 4.1 : *Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction de période 2π définie par $f(x) = x$ si $x \in]-\pi,\pi[$. Comparer les valeurs $f(x)$ et $S_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :*

$$S_1 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}\,;\; S_2 = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}\,.$$

Exercice 4.2 : *a) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction de période 2π définie par $f(x) = x^2$ si $\mid x \mid \leq \pi$. Comparer les valeurs $f(x)$ et $S_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :*

$$S_1 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,;\; S_2 = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

b) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction périodique, de période 2π définie par $g(x) = 2x$ sur $]-\pi,\pi[$.

Exercice 4.3 : *Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction impaire de période 2π définie par $f(x) = x(\pi - x)$ si $0 \leq x \leq \pi$. Calculer les sommes suivantes :*

$$S_1 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}\,;\; S_2 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}\,;\; S_3 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^6}\,.$$

Exercice 4.4 : *a) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f, périodique, de période 2π, égale à e^x sur $]-\pi,\pi]$.*

b) En déduire les valeurs de :

$$S_1 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{p^2+1} \ ; \ S_2 = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2+1}\,.$$

Exercice 4.5 : *a) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction paire de période 2π définie par $f(x) = \pi - x$ si $0 \leq x \leq \pi$.*

b) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction impaire de période 2π définie par $f(x) = \pi - x$ si $0 < x \leq \pi$.

c) Comparer les résultats des questions a) et b) sur $]0,\pi[$.

Exercice 4.6 : *Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction de période 2 définie par $f(x) = x^2$ si $x \in [-1,1]$.*

Exercice 4.7 : *a) Ecrire le développement en "série de sinus" de la fonction définie par $f(x) = \cos 2x$ sur $[0,\pi]$.*

b) Ecrire le développement en "série de cosinus" de la fonction définie par $f(x) = \sin x$ sur $[0,\pi]$.

c) En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2-4} \ ; \ S_2 = \sum_0^{\infty} \frac{1}{4p^2-1}\,.$$

Exercice 4.8 : *Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction périodique, de période 4, définie par :*

$f(x) = 0$ *si* $-2 < x < -1$; $f(x) = 1 + x$ *si* $-1 < x < 0$;
$f(x) = 1 - x$ *si* $0 < x < 1$; $f(x) = 0$ *si* $1 < x < 2$.

Exercice 4.9 : *a) Notons $\zeta(4) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$. Exprimer $\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$ en fonction de $\zeta(4)$.*

b) Soit $f(x)$ la fonction périodique de période 2π, égale à $\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}$, pour $x \in [0,2\pi[$; remarquer que f est paire, continue, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Déterminer la série de Fourier de f.

c) i) Montrer que la série $\left[\frac{\cos nx}{n^4}\right]$ converge normalement sur $\mathbb{R}$; notons $H(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^4}$ sa somme.

ii) Montrer que la fonction $H(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$; déterminer $H''(x)$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

d) i) En utilisant la question précédente, montrer :

$$H(x) = \zeta(4) - \frac{\pi^2 x^2}{12} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{x^4}{48}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

ii) En déduire la valeur de $\zeta(4)$.

Indications

1) $S_f(x) = 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$. $S_f(x) = f(x)$ si $x \neq (2k+1)\pi$. $S_f((2k+1)\pi) = 0$. $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$. $S_2 = \frac{\pi}{4}$.

2) $S_f(x) = f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$; $x \in \mathbb{R}$. $S_1 = \frac{\pi^2}{12}$. $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$. $S_g(x) = 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

3) $S_f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin(2p-1)x}{(2p-1)^3}$. $S_1 = \frac{\pi^3}{32}$. $S_2 = \frac{\pi^6}{960}$. $S_3 = \frac{\pi^6}{945}$.

4) $S_f(x) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} + \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n\cos nx}{n^2+1} - \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n n\sin nx}{n^2+1}$.
$S_1 = \frac{\pi\operatorname{ch}\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}$. $S_2 = \frac{\operatorname{sh}\pi - \pi}{2\operatorname{sh}\pi}$.

5) $S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}$. $S_g(x) = 2\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$.

6) $S_f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$.

7) $\cos 2x = \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{2p+1}{(2p+1)^2-4}\sin(2p+1)x$.
$\sin x = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_1^\infty \frac{1}{4p^2-1}\cos 2px\right)$.
$S_1 = -\frac{\pi}{4}$. $S_2 = -\frac{1}{2}$.

8) $S_f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}x$.

9) $\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{15}{16}\zeta(4)$; $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7}{8}\zeta(4)$.

$S_f(x) = f(x) = -\dfrac{\pi^2}{6} + \sum_1^\infty \dfrac{\cos nx}{n^2}$.

$H''(x) = -\sum_1^\infty \dfrac{\cos nx}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{6} - f(x) = -\dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{\pi x}{2}$.

$H(x) = -\dfrac{\pi^2 x^2}{12} - \dfrac{x^4}{48} + \dfrac{\pi x^3}{12} + \zeta(4)$, car $H(0) = \zeta(4)$.

En posant $x = \pi$, on obtient $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$.