

# Bifurcation et stabilité pour NLS

François Genoud  
Université de Vienne  
Autriche

Université Lille 1  
septembre 2013

# Leçon 1

## Bifurcation: notions générales et application à NLS

# Position du problème

# L'équation de Schrödinger non-linéaire

Considérons l'équation

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

pour  $\psi = \psi(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \geq 1$ .

# L'équation de Schrödinger non-linéaire

Considérons l'équation

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

pour  $\psi = \psi(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \geq 1$ .

On suppose que  $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}, \mathbb{R})$  vérifie

$$g(x, e^{i\theta} w) = e^{i\theta} g(x, w) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N, \theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$$

# L'équation de Schrödinger non-linéaire

Considérons l'équation

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

pour  $\psi = \psi(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \geq 1$ .

On suppose que  $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}, \mathbb{R})$  vérifie

$$g(x, e^{i\theta} w) = e^{i\theta} g(x, w) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N, \theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$$

Cette propriété implique que l'on peut mettre  $g$  sous la forme

$$g(x, \psi) = f(x, |\psi|^2)\psi$$

qui intervient dans les applications; on a donc  $g(x, 0) \equiv 0$ .

# L'équation de Schrödinger non-linéaire

Considérons l'équation

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

pour  $\psi = \psi(t, x) : [0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $N \geq 1$ .

On suppose que  $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{C}, \mathbb{R})$  vérifie

$$g(x, e^{i\theta} w) = e^{i\theta} g(x, w) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N, \theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$$

Cette propriété implique que l'on peut mettre  $g$  sous la forme

$$g(x, \psi) = f(x, |\psi|^2)\psi$$

qui intervient dans les applications; on a donc  $g(x, 0) \equiv 0$ .

Le coefficient  $f(x, |\psi|^2)$  permet de modéliser la réponse d'un **milieu non-linéaire et non-homogène** en présence d'un champ  $\psi$ .

NLS apparaît dans de nombreux modèles physiques, notamment les ondes de Langmuir en physique des plasmas, la condensation de Bose-Einstein, les vagues scélérates, etc.



NLS apparaît dans de nombreux modèles physiques, notamment les ondes de Langmuir en physique des plasmas, la condensation de Bose-Einstein, les vagues scélérates, etc.

NLS est omniprésente en **optique non-linéaire**, dont la théorie est historiquement très étroitement liée aux recherches sur NLS, cf. discussion dans [G., Adv. Nonlin. Stud. 2010.](#)

NLS apparaît dans de nombreux modèles physiques, notamment les ondes de Langmuir en physique des plasmas, la condensation de Bose-Einstein, les vagues scélérates, etc.

NLS est omniprésente en **optique non-linéaire**, dont la théorie est historiquement très étroitement liée aux recherches sur NLS, cf. discussion dans [G., Adv. Nonlin. Stud. 2010](#).

Questions mathématiques importantes : **existence** (locale et globale), comportement asymptotique, **stabilité**, explosion en temps fini, diffusion, aspects système dynamique, limite semiclassique, etc.

NLS apparaît dans de nombreux modèles physiques, notamment les ondes de Langmuir en physique des plasmas, la condensation de Bose-Einstein, les vagues scélérates, etc.

NLS est omniprésente en **optique non-linéaire**, dont la théorie est historiquement très étroitement liée aux recherches sur NLS, cf. discussion dans [G., Adv. Nonlin. Stud. 2010](#).

Questions mathématiques importantes : **existence** (locale et globale), comportement asymptotique, **stabilité**, explosion en temps fini, diffusion, aspects système dynamique, limite semiclassique, etc.

Quelques noms illustres associés à NLS: Ginibre, Velo, Cazenave, Lions, Merle, Raphaël, Gérard, Weinstein, Bourgain, Strauss, Tao, Vega, Ambrosetti, Malchiodi, etc.

# Ondes stationnaires de NLS

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

L'équivariance de  $g$  par rapport au groupe  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$  permet de chercher des solutions sous forme d'**ondes stationnaires** :

$$\psi(t, x) = e^{i\lambda t} u(x) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

# Ondes stationnaires de NLS

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

L'équivariance de  $g$  par rapport au groupe  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$  permet de chercher des solutions sous forme d'**ondes stationnaires** :

$$\psi(t, x) = e^{i\lambda t} u(x) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

Cet Ansatz conduit alors au problème stationnaire

$$\Delta u + g(x, u) = \lambda u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (\text{SNLS})$$

# Ondes stationnaires de NLS

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

L'équivariance de  $g$  par rapport au groupe  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$  permet de chercher des solutions sous forme d'**ondes stationnaires** :

$$\psi(t, x) = e^{i\lambda t} u(x) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

Cet Ansatz conduit alors au problème stationnaire

$$\Delta u + g(x, u) = \lambda u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (\text{SNLS})$$

Une solution de (SNLS) est un couple  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ .

# Ondes stationnaires de NLS

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + g(x, \psi) = 0 \quad (\text{NLS})$$

L'équivariance de  $g$  par rapport au groupe  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$  permet de chercher des solutions sous forme d'**ondes stationnaires** :

$$\psi(t, x) = e^{i\lambda t} u(x) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$$

Cet Ansatz conduit alors au problème stationnaire

$$\Delta u + g(x, u) = \lambda u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad (\text{SNLS})$$

Une solution de (SNLS) est un couple  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$ .

Noter qu'on a une **ligne de solutions triviales**  $\{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

# Théorie de bifurcation



# Bifurcation

Un problème important concerne le comportement des solutions  $(\lambda, u)$  lorsque le paramètre  $\lambda$  varie. Les **points de bifurcation** sont les valeurs de  $\lambda$  où la structure de l'ensemble des solutions change.

# Bifurcation

Un problème important concerne le comportement des solutions  $(\lambda, u)$  lorsque le paramètre  $\lambda$  varie. Les **points de bifurcation** sont les valeurs de  $\lambda$  où la structure de l'ensemble des solutions change.

Le problème (SNLS) appartient à la classe de problèmes abstraits définie comme suit.

Soit  $F \in C(X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach,  $X \subset Y$ , et  $F(0) = 0$ .

# Bifurcation

Un problème important concerne le comportement des solutions  $(\lambda, u)$  lorsque le paramètre  $\lambda$  varie. Les **points de bifurcation** sont les valeurs de  $\lambda$  où la structure de l'ensemble des solutions change.

Le problème (SNLS) appartient à la classe de problèmes abstraits définie comme suit.

Soit  $F \in C(X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach,  $X \subset Y$ , et  $F(0) = 0$ . Considérons

$$F(u) = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{P})$$

On a une ligne de solutions triviales  $\{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times X$ .

# Bifurcation

Un problème important concerne le comportement des solutions  $(\lambda, u)$  lorsque le paramètre  $\lambda$  varie. Les **points de bifurcation** sont les valeurs de  $\lambda$  où la structure de l'ensemble des solutions change.

Le problème (SNLS) appartient à la classe de problèmes abstraits définie comme suit.

Soit  $F \in C(X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Banach,  $X \subset Y$ , et  $F(0) = 0$ . Considérons

$$F(u) = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{P})$$

On a une ligne de solutions triviales  $\{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times X$ .

## Définition

$\lambda \in \mathbb{R}$  est un **point de bifurcation** pour le problème (P) ssi il existe une suite  $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times X$  telle que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  et  $u_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , mais  $u_n \neq 0$  pour tout  $n$ .

## Linéarisation, analyse spectrale

$$F(u) = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{P})$$

Si l'on suppose, de plus, que  $F \in C^1(X, Y)$ , il est naturel d'approximer (P) au voisinage de  $u = 0$  par le **problème linéarisé**

$$DF(0)u = \lambda u \quad (\text{LP})$$

où  $DF(0) \in L(X, Y)$  est la dérivée de Fréchet de  $F$  en  $u = 0$ .

## Linéarisation, analyse spectrale

$$F(u) = \lambda u, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{P})$$

Si l'on suppose, de plus, que  $F \in C^1(X, Y)$ , il est naturel d'approximer (P) au voisinage de  $u = 0$  par le **problème linéarisé**

$$DF(0)u = \lambda u \quad (\text{LP})$$

où  $DF(0) \in L(X, Y)$  est la dérivée de Fréchet de  $F$  en  $u = 0$ .

Par le théorème des fonctions implicites, les points de bifurcation appartiennent à  $\sigma(DF(0))$ , le **spectre** de  $DF(0)$ .

Supposons que  $Y$  est un espace de Hilbert,  $X \subset Y$  un sous-espace dense, et  $DF(0) : X \subset Y \rightarrow Y$  est un opérateur auto-adjoint.

Supposons que  $Y$  est un espace de Hilbert,  $X \subset Y$  un sous-espace dense, et  $DF(0) : X \subset Y \rightarrow Y$  est un opérateur auto-adjoint.  
Alors  $\sigma(DF(0)) \subset \mathbb{R}$



Supposons que  $Y$  est un espace de Hilbert,  $X \subset Y$  un sous-espace dense, et  $DF(0) : X \subset Y \rightarrow Y$  est un opérateur auto-adjoint. Alors  $\sigma(DF(0)) \subset \mathbb{R}$  peut être décomposé comme

$$\sigma(DF(0)) = \sigma_{\text{disc}}(DF(0)) \cup \sigma_{\text{ess}}(DF(0))$$

où  $\sigma_{\text{disc}}(DF(0))$  est le **spectre discret**, i.e. l'ensemble des valeurs propres isolées, de multiplicité finie, et

$$\sigma_{\text{ess}}(DF(0)) := \sigma(DF(0)) \setminus \sigma_{\text{disc}}(DF(0))$$

est le **spectre essentiel** de  $DF(0)$ .

Supposons que  $Y$  est un espace de Hilbert,  $X \subset Y$  un sous-espace dense, et  $DF(0) : X \subset Y \rightarrow Y$  est un opérateur auto-adjoint. Alors  $\sigma(DF(0)) \subset \mathbb{R}$  peut être décomposé comme

$$\sigma(DF(0)) = \sigma_{\text{disc}}(DF(0)) \cup \sigma_{\text{ess}}(DF(0))$$

où  $\sigma_{\text{disc}}(DF(0))$  est le **spectre discret**, i.e. l'ensemble des valeurs propres isolées, de multiplicité finie, et

$$\sigma_{\text{ess}}(DF(0)) := \sigma(DF(0)) \setminus \sigma_{\text{disc}}(DF(0))$$

est le **spectre essentiel** de  $DF(0)$ .

Ainsi, la bifurcation peut avoir lieu depuis une valeur propre de  $DF(0)$ , ou depuis le spectre essentiel de  $DF(0)$ .

## Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

# Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$

# Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$
- $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,

# Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$
- $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , avec  $\{\partial_2 g(x, \cdot)\}_{x \in \mathbb{R}^N}$  équicontinue,

# Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$
- $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , avec  $\{\partial_2 g(x, \cdot)\}_{x \in \mathbb{R}^N}$  équicontinue,  $\partial_2 g(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

# Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$
- $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , avec  $\{\partial_2 g(x, \cdot)\}_{x \in \mathbb{R}^N}$  équicontinue,  $\partial_2 g(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$q := \partial_2 g(\cdot, 0) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$



# Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$
- $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , avec  $\{\partial_2 g(x, \cdot)\}_{x \in \mathbb{R}^N}$  équicontinue,  $\partial_2 g(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$q := \partial_2 g(\cdot, 0) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

- des hypothèses de croissance sur  $|g(x, s)|$  pour  $|s| \rightarrow \infty$

# Opérateurs de Schrödinger

Soit  $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$ ,  $X = H^2(\mathbb{R}^N)$ , et  $F : X \rightarrow Y$  définie par

$$F(u)(x) := \Delta u(x) + g(x, u(x))$$

où l'on suppose :

- $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$
- $g(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , avec  $\{\partial_2 g(x, \cdot)\}_{x \in \mathbb{R}^N}$  équicontinue,  $\partial_2 g(\cdot, s) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$q := \partial_2 g(\cdot, 0) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

- des hypothèses de croissance sur  $|g(x, s)|$  pour  $|s| \rightarrow \infty$

Alors  $F \in C^1(X, Y)$ , et la linéarisation de (SNLS) est

$$\Delta u + q(x)u = \lambda u$$

L'opérateur  $S : D(S) = H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  défini par

$$(Su)(x) := \Delta u(x) + q(x)u(x)$$

est appelé **opérateur de Schrödinger**.

L'opérateur  $S : D(S) = H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  défini par

$$(Su)(x) := \Delta u(x) + q(x)u(x)$$

est appelé **opérateur de Schrödinger**.

Posant  $\Lambda := \sup \sigma(S)$  et  $\alpha := \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$ , nous avons

$$\sigma_{\text{ess}}(S) = (-\infty, \alpha], \quad \alpha \leq \Lambda \leq \|q\|_{L^\infty}, \quad \Lambda \in \sigma(S)$$

L'opérateur  $S : D(S) = H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  défini par

$$(Su)(x) := \Delta u(x) + q(x)u(x)$$

est appelé **opérateur de Schrödinger**.

Posant  $\Lambda := \sup \sigma(S)$  et  $\alpha := \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$ , nous avons

$$\sigma_{\text{ess}}(S) = (-\infty, \alpha], \quad \alpha \leq \Lambda \leq \|q\|_{L^\infty}, \quad \Lambda \in \sigma(S)$$

De plus,  $\Lambda$  est donné par la formule

$$\Lambda = - \inf_{\substack{u \in H^2(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - q(x)u^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \, dx}$$

L'opérateur  $S : D(S) = H^2(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$  défini par

$$(Su)(x) := \Delta u(x) + q(x)u(x)$$

est appelé **opérateur de Schrödinger**.

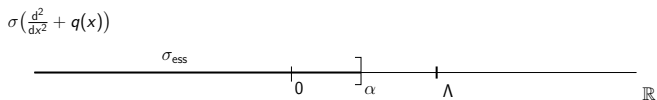
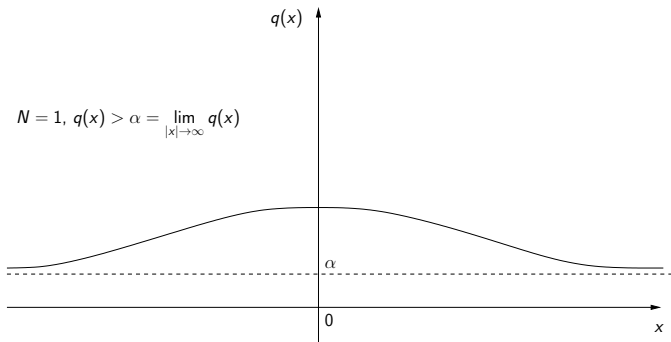
Posant  $\Lambda := \sup \sigma(S)$  et  $\alpha := \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$ , nous avons

$$\sigma_{\text{ess}}(S) = (-\infty, \alpha], \quad \alpha \leq \Lambda \leq \|q\|_{L^\infty}, \quad \Lambda \in \sigma(S)$$

De plus,  $\Lambda$  est donné par la formule

$$\Lambda = - \inf_{\substack{u \in H^2(\mathbb{R}^N) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 - q(x)u^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \, dx}$$

Si  $\Lambda > \alpha$ , alors  $\Lambda \in \sigma_{\text{disc}}(S)$ . Dans ce cas,  $\Lambda$  est la **valeur propre principale** de  $S$ , et  $S$  a une fonction propre correspondante  $\varphi_\Lambda > 0$ .



## Bifurcation depuis une valeur propre

(A) La bifurcation depuis des valeurs propres a d'abord été démontrée par [Krasnosel'skii en 1956](#). Il utilisa le degré topologique pour montrer qu'il y a bifurcation depuis toute valeur propre de multiplicité impaire. Noter que pour les opérateurs de Schrödinger, la valeur propre principale est simple.



## Bifurcation depuis une valeur propre

(A) La bifurcation depuis des valeurs propres a d'abord été démontrée par [Krasnosel'skii en 1956](#). Il utilisa le degré topologique pour montrer qu'il y a bifurcation depuis toute valeur propre de multiplicité impaire. Noter que pour les opérateurs de Schrödinger, la valeur propre principale est simple.

(B) Ce résultat a été étendu par [Rabinowitz en 1971](#), qui montra que des branches globales émanent des points de bifurcation.

## Bifurcation depuis une valeur propre

(A) La bifurcation depuis des valeurs propres a d'abord été démontrée par [Krasnosel'skii en 1956](#). Il utilisa le degré topologique pour montrer qu'il y a bifurcation depuis toute valeur propre de multiplicité impaire. Noter que pour les opérateurs de Schrödinger, la valeur propre principale est simple.

(B) Ce résultat a été étendu par [Rabinowitz en 1971](#), qui montra que des branches globales émanent des points de bifurcation.

(C) De plus, [en 1971, Crandall et Rabinowitz](#) montrèrent que, localement, la branche bifurquant d'une valeur propre simple est une courbe continue.

## Bifurcation depuis une valeur propre

(A) La bifurcation depuis des valeurs propres a d'abord été démontrée par [Krasnosel'skii en 1956](#). Il utilisa le degré topologique pour montrer qu'il y a bifurcation depuis toute valeur propre de multiplicité impaire. Noter que pour les opérateurs de Schrödinger, la valeur propre principale est simple.

(B) Ce résultat a été étendu par [Rabinowitz en 1971](#), qui montra que des branches globales émanent des points de bifurcation.

(C) De plus, [en 1971, Crandall et Rabinowitz](#) montrèrent que, localement, la branche bifurquant d'une valeur propre simple est une courbe continue.

(A) et (B) utilisent le degré de Leray-Schauder, nécessitant la compacité des opérateurs. Ils ont été étendus depuis à des situations non compactes. Le résultat (C) est purement analytique et plus flexible à cet égard.

# Bifurcation depuis le spectre essentiel

Les premiers résultats datent de fin 1970/début 1980, principalement par [Charles A. Stuart](#) (voir aussi [Küpper et Riemer](#)), obtenant la bifurcation par des méthodes purement variationnelles.

# Bifurcation depuis le spectre essentiel

Les premiers résultats datent de fin 1970/début 1980, principalement par [Charles A. Stuart](#) (voir aussi [Küpper et Riemer](#)), obtenant la bifurcation par des méthodes purement variationnelles.

A ce jour il n'existe pas de théorie abstraite générale comme celle traitant de la bifurcation depuis des valeurs propres. Le comportement des solutions lorsqu'elles approchent de la ligne des solutions triviales semble dépendre très spécifiquement de la nature précise des problèmes, qu'il faut donc traiter au cas par cas.

# Bifurcation depuis le spectre essentiel

Les premiers résultats datent de fin 1970/début 1980, principalement par [Charles A. Stuart](#) (voir aussi [Küpper et Riemer](#)), obtenant la bifurcation par des méthodes purement variationnelles.

A ce jour il n'existe pas de théorie abstraite générale comme celle traitant de la bifurcation depuis des valeurs propres. Le comportement des solutions lorsqu'elles approchent de la ligne des solutions triviales semble dépendre très spécifiquement de la nature précise des problèmes, qu'il faut donc traiter au cas par cas.

Comme on le verra par la suite, des méthodes analytiques donnent des courbes lisses de solutions positives bifurquant depuis le spectre essentiel (cf. [Stuart 1985](#), [Stuart-G. 2008](#), [G. 2009](#)).

# Exemples

# Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E1})$$



# Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E1})$$

On suppose

- $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

# Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E1})$$

On suppose

- $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $g(-x, s) = g(x, s)$  pour tout  $(x, s) \in \mathbb{R}^2$

# Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E1})$$

On suppose

- $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $g(-x, s) = g(x, s)$  pour tout  $(x, s) \in \mathbb{R}^2$
- $g(x, s)$  est décroissante en  $x > 0$  et croissante  $s > 0$

# Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E1})$$

On suppose

- $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $g(-x, s) = g(x, s)$  pour tout  $(x, s) \in \mathbb{R}^2$
- $g(x, s)$  est décroissante en  $x > 0$  et croissante  $s > 0$
- $q := \partial_2 g(\cdot, 0) \in C^1(\mathbb{R})$  et  $q(0) > 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$

# Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E1})$$

On suppose

- $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $g(-x, s) = g(x, s)$  pour tout  $(x, s) \in \mathbb{R}^2$
- $g(x, s)$  est décroissante en  $x > 0$  et croissante  $s > 0$
- $q := \partial_2 g(\cdot, 0) \in C^1(\mathbb{R})$  et  $q(0) > 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$

Comme ci-dessus, on considère le problème dans  $X = H^2(\mathbb{R})$ .

# Bifurcation depuis la valeur propre principale

Considérons le problème unidimensionnel

$$\begin{cases} u''(x) + g(x, u(x)) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E1})$$

On suppose

- $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $g(x, 0) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- $g(-x, s) = g(x, s)$  pour tout  $(x, s) \in \mathbb{R}^2$
- $g(x, s)$  est décroissante en  $x > 0$  et croissante  $s > 0$
- $q := \partial_2 g(\cdot, 0) \in C^1(\mathbb{R})$  et  $q(0) > 0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$

Comme ci-dessus, on considère le problème dans  $X = H^2(\mathbb{R})$ .

$\Lambda = \sup \sigma(S) > 0 = \sup \sigma_{\text{ess}}(S)$  est la valeur principale de  $S$ .

## Exemple

Un exemple typique de fonction  $g$  satisfaisant les hypothèses du théorème est donné par

$$g(x, s) = q(x)s + V(x)|s|^{p-1}s$$

avec  $p > 1$  et des hypothèses appropriées sur  $q, V \in C^1(\mathbb{R})$ .

## Exemple

Un exemple typique de fonction  $g$  satisfaisant les hypothèses du théorème est donné par

$$g(x, s) = q(x)s + V(x)|s|^{p-1}s$$

avec  $p > 1$  et des hypothèses appropriées sur  $q, V \in C^1(\mathbb{R})$ .

### Théorème 1 (Jeanjean-Stuart, Adv. Diff. Equ. 1999)

*Il existe  $\bar{\lambda} \in (\Lambda, \infty]$  et une courbe  $u \in C^1((\Lambda, \bar{\lambda}), H^2(\mathbb{R}))$  tel que  $(\lambda, u(\lambda))$  est une solution de (E1) pour tout  $\lambda \in (\Lambda, \bar{\lambda})$ , avec  $u(\lambda)(x)$  positive, paire et strictement décroissante en  $x > 0$ .*



## Exemple

Un exemple typique de fonction  $g$  satisfaisant les hypothèses du théorème est donné par

$$g(x, s) = q(x)s + V(x)|s|^{p-1}s$$

avec  $p > 1$  et des hypothèses appropriées sur  $q, V \in C^1(\mathbb{R})$ .

### Théorème 1 (Jeanjean-Stuart, Adv. Diff. Equ. 1999)

*Il existe  $\bar{\lambda} \in (\Lambda, \infty]$  et une courbe  $u \in C^1((\Lambda, \bar{\lambda}), H^2(\mathbb{R}))$  tel que  $(\lambda, u(\lambda))$  est une solution de (E1) pour tout  $\lambda \in (\Lambda, \bar{\lambda})$ , avec  $u(\lambda)(x)$  positive, paire et strictement décroissante en  $x > 0$ .*

*En outre,*

$$\lim_{\lambda \searrow \Lambda} \|u(\lambda)\|_{H^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \nearrow \bar{\lambda}} \|u(\lambda)\|_{H^2} = \infty$$

## Preuve

1. Crandall-Rabinowitz  $\rightsquigarrow$  bifurcation locale depuis  $\Lambda > 0$ .

## Preuve

1. Crandall-Rabinowitz  $\rightsquigarrow$  bifurcation locale depuis  $\Lambda > 0$ .
2. Théorème des fonctions implicites  $\rightsquigarrow$  continuation globale.

## Preuve

1. Crandall-Rabinowitz  $\rightsquigarrow$  bifurcation locale depuis  $\Lambda > 0$ .
2. Théorème des fonctions implicites  $\rightsquigarrow$  continuation globale.
3. Estimations a priori  $\rightsquigarrow$  comportement asymptotique de la branche de solutions.

## Preuve

1. Crandall-Rabinowitz  $\rightsquigarrow$  bifurcation locale depuis  $\Lambda > 0$ .
2. Théorème des fonctions implicites  $\rightsquigarrow$  continuation globale.
3. Estimations a priori  $\rightsquigarrow$  comportement asymptotique de la branche de solutions.

## Remarques

Cette approche est purement analytique et fournit une courbe lisse de solutions.

## Preuve

1. Crandall-Rabinowitz  $\rightsquigarrow$  bifurcation locale depuis  $\Lambda > 0$ .
2. Théorème des fonctions implicites  $\rightsquigarrow$  continuation globale.
3. Estimations a priori  $\rightsquigarrow$  comportement asymptotique de la branche de solutions.

## Remarques

Cette approche est purement analytique et fournit une courbe lisse de solutions.

Par une approche topologique, on peut obtenir des ensembles connexes de solutions, voir par ex. [Jeanjean-Lucia-Stuart 1999](#).

## Preuve

1. Crandall-Rabinowitz  $\rightsquigarrow$  bifurcation locale depuis  $\Lambda > 0$ .
2. Théorème des fonctions implicites  $\rightsquigarrow$  continuation globale.
3. Estimations a priori  $\rightsquigarrow$  comportement asymptotique de la branche de solutions.

## Remarques

Cette approche est purement analytique et fournit une courbe lisse de solutions.

Par une approche topologique, on peut obtenir des ensembles connexes de solutions, voir par ex. [Jeanjean-Lucia-Stuart 1999](#).

L'hypothèse  $q(0) > \lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x)$  garantit que  $\Lambda$  est une valeur propre (simple). Sans cette hypothèse, on peut envisager la bifurcation depuis le spectre essentiel de  $S$ .

## Leçon 2

# Bifurcation depuis le spectre essentiel



# La puissance pure

Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) + V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E2})$$

pour  $N \geq 2$ .

Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) + V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E2})$$

pour  $N \geq 2$ . On utilisera les hypothèses suivantes :

$$(V1) \quad V \in C^1(\mathbb{R}^N)$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) + V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E2})$$

pour  $N \geq 2$ . On utilisera les hypothèses suivantes :

(V1)  $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$

(V2) il existe  $b \in (0, 2)$  tel que  $1 < p < \frac{4-2b}{N-2}$  ( $:= \infty$  si  $N = 2$ ) et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b V(x) = 1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b [x \cdot \nabla V(x) + bV(x)] = 0$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) + V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E2})$$

pour  $N \geq 2$ . On utilisera les hypothèses suivantes :

(V1)  $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$

(V2) il existe  $b \in (0, 2)$  tel que  $1 < p < \frac{4-2b}{N-2}$  ( $:= \infty$  si  $N = 2$ ) et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b V(x) = 1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b [x \cdot \nabla V(x) + bV(x)] = 0$$

(V3)  $V$  est radial avec  $V(r) > 0$  et  $V'(r) < 0$  pour  $r > 0$

Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) + V(x)|u(x)|^{p-1}u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R}^N \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{E2})$$

pour  $N \geq 2$ . On utilisera les hypothèses suivantes :

(V1)  $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$

(V2) il existe  $b \in (0, 2)$  tel que  $1 < p < \frac{4-2b}{N-2}$  ( $:= \infty$  si  $N = 2$ ) et

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b V(x) = 1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^b [x \cdot \nabla V(x) + bV(x)] = 0$$

(V3)  $V$  est radial avec  $V(r) > 0$  et  $V'(r) < 0$  pour  $r > 0$

(V4)  $r \frac{V'(r)}{V(r)}$  est décroissante en  $r > 0$

## Exemple

$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{b/2}}$  satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

## Exemple

$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{b/2}}$  satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

Le problème (E2) correspond donc à (SNLS) avec

$$g(x, s) = V(x)|s|^{p-1}s \quad \text{et} \quad q(x) = \partial_2 g(x, 0) \equiv 0$$



## Exemple

$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{b/2}}$  satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

Le problème (E2) correspond donc à (SNLS) avec

$$g(x, s) = V(x)|s|^{p-1}s \quad \text{et} \quad q(x) = \partial_2 g(x, 0) \equiv 0$$

Ainsi

$$S = \Delta \quad \text{et} \quad \sigma(S) = \sigma_{\text{ess}}(S) = (-\infty, 0]$$

donc  $S$  n'a pas de valeur propre.

Néanmoins, on a le résultat suivant, formulé dans  $X = H^1(\mathbb{R}^N)$ .

## Théorème 2 (Stuart-G., DCDS 2008)

*Supposons (V1) et (V2).*

*Il existe  $\lambda_0 > 0$  et une courbe locale  $u \in C^1((0, \lambda_0), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que  $(\lambda, u(\lambda))$  est solution de (E2) pour tout  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ , avec  $u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $u(\lambda) > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ .*

## Théorème 2 (Stuart-G., DCDS 2008)

Supposons (V1) et (V2).

Il existe  $\lambda_0 > 0$  et une courbe locale  $u \in C^1((0, \lambda_0), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que  $(\lambda, u(\lambda))$  est solution de (E2) pour tout  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ , avec  $u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $u(\lambda) > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

De plus,

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u(\lambda)\|_{H^1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N} \\ \infty & \text{si } 1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2} \end{cases}$$

## Théorème 2 (Stuart-G., DCDS 2008)

Supposons (V1) et (V2).

Il existe  $\lambda_0 > 0$  et une courbe locale  $u \in C^1((0, \lambda_0), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que  $(\lambda, u(\lambda))$  est solution de (E2) pour tout  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ , avec  $u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $u(\lambda) > 0$  sur  $\mathbb{R}^N$ .

De plus,

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \|u(\lambda)\|_{H^1} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N} \\ \infty & \text{si } 1 + \frac{4-2b}{N} < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2} \end{cases}$$

## Terminologie

On dit qu'il y a **bifurcation de la ligne des solutions triviales** lorsque  $\|u(\lambda)\|_{H^1} \rightarrow 0$  et **bifurcation asymptotique** ou **bifurcation à l'infini** lorsque  $\|u(\lambda)\|_{H^1} \rightarrow \infty$ .

### Théorème 3 (G., Calc. Var. 2010)

Supposons (V1) à (V4).

Alors la courbe du Théorème 2 peut être étendue en une branche globale  $u \in C^1((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que, pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ :

### Théorème 3 (G., Calc. Var. 2010)

*Supposons (V1) à (V4).*

*Alors la courbe du Théorème 2 peut être étendue en une branche globale  $u \in C^1((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que, pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ :  $u(\lambda)$  est l'unique solution positive radiale de (E2);*

### Théorème 3 (G., Calc. Var. 2010)

Supposons (V1) à (V4).

Alors la courbe du Théorème 2 peut être étendue en une branche globale  $u \in C^1((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que, pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ :

$u(\lambda)$  est l'unique solution positive radiale de (E2);

$u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $u(\lambda)$  est strictement décroissante radialement.

### Théorème 3 (G., Calc. Var. 2010)

Supposons (V1) à (V4).

Alors la courbe du Théorème 2 peut être étendue en une branche globale  $u \in C^1((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que, pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ :

$u(\lambda)$  est l'unique solution positive radiale de (E2);

$u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $u(\lambda)$  est strictement décroissante radialement.

De plus,

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \|u(\lambda)\|_{H^1} = \infty \quad \text{pour tout} \quad 1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$$



### Théorème 3 (G., Calc. Var. 2010)

Supposons (V1) à (V4).

Alors la courbe du Théorème 2 peut être étendue en une branche globale  $u \in C^1((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^N))$  telle que, pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ :

$u(\lambda)$  est l'unique solution positive radiale de (E2);

$u(\lambda) \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$  et  $u(\lambda)$  est strictement décroissante radialement.

De plus,

$$\lim_{\lambda \nearrow \infty} \|u(\lambda)\|_{H^1} = \infty \quad \text{pour tout } 1 < p < 1 + \frac{4-2b}{N-2}$$

### Application

Le cas  $N = 1$ ,  $p = 3$  donne l'existence d'ondes progressives dans des guides d'ondes planaires focalisant avec "matériaux de Kerr", pour des faisceaux de puissance arbitrairement basse/haute.

# Preuves

On commence par le **changement d'échelle**

$$\lambda = k^2, \quad u(x) = k^\theta v(y), \quad y = kx, \quad \text{pour } k > 0, \quad \theta = \frac{2-b}{p-1}$$

# Preuves

On commence par le **changement d'échelle**

$$\lambda = k^2, \quad u(x) = k^\theta v(y), \quad y = kx, \quad \text{pour } k > 0, \quad \theta = \frac{2-b}{p-1}$$

(E2) devient

$$\Delta v - v + k^{-b} V(y/k) |v|^{p-1} v = 0, \quad k > 0 \quad (1)$$

# Preuves

On commence par le **changement d'échelle**

$$\lambda = k^2, \quad u(x) = k^\theta v(y), \quad y = kx, \quad \text{pour } k > 0, \quad \theta = \frac{2-b}{p-1}$$

(E2) devient

$$\Delta v - v + k^{-b} V(y/k) |v|^{p-1} v = 0, \quad k > 0 \quad (1)$$

Par (V2) on a

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^{-b} V(y/k) = |y|^{-b} |y/k|^b V(y/k) = |y|^{-b} \quad \forall y \neq 0$$

## Preuves

On commence par le **changement d'échelle**

$$\lambda = k^2, \quad u(x) = k^\theta v(y), \quad y = kx, \quad \text{pour } k > 0, \quad \theta = \frac{2-b}{p-1}$$

(E2) devient

$$\Delta v - v + k^{-b} V(y/k) |v|^{p-1} v = 0, \quad k > 0 \quad (1)$$

Par (V2) on a

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^{-b} V(y/k) = |y|^{-b} |y/k|^b V(y/k) = |y|^{-b} \quad \forall y \neq 0$$

ce qui suggère le **problème limite**

$$\Delta v - v + |y|^{-b} |v|^{p-1} v = 0 \quad (2)$$

qui a une unique solution positive radiale  $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ .

On applique alors le **théorème des fonctions implicites** à la fonction  $F : \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$  définie par

$$F(k, v) := \begin{cases} \Delta v - v + |k|^{-b} V(y/|k|) |v|^{p-1} v, & k \neq 0 \\ \Delta v - v + |y|^{-b} |v|^{p-1} v, & k = 0 \end{cases}$$

au point  $(k, v) = (0, v_0) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$  où  $D_2 F(0, v_0) : H^1 \rightarrow H^{-1}$  est un isomorphisme (**non-dégénérescence**), ce qui donne une branche de solutions  $(k, v(k))$  ( $|k| < k_0$  petit) de  $F(k, v) = 0$ .

On applique alors le **théorème des fonctions implicites** à la fonction  $F : \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$  définie par

$$F(k, v) := \begin{cases} \Delta v - v + |k|^{-b} V(y/|k|) |v|^{p-1} v, & k \neq 0 \\ \Delta v - v + |y|^{-b} |v|^{p-1} v, & k = 0 \end{cases}$$

au point  $(k, v) = (0, v_0) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^N)$  où  $D_2 F(0, v_0) : H^1 \rightarrow H^{-1}$  est un isomorphisme (**non-dégénérescence**), ce qui donne une branche de solutions  $(k, v(k))$  ( $|k| < k_0$  petit) de  $F(k, v) = 0$ .

En revenant aux variables initiales  $(\lambda, u)$ , on obtient alors une branche locale de solutions  $(\lambda, u(\lambda))$  de (E2), pour tout  $0 < \lambda < \lambda_0 = k_0^2$ . Le comportement asymptotique lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  suit du changement de variables et du fait que  $v(k) \rightarrow v_0$  dans  $H^1$  lorsque  $k \rightarrow 0$ .

Pour prouver le Théorème 3, on montre que la branche locale donnée par le Théorème 2 se prolonge indéfiniment en une courbe  $C^1$  paramétrée par  $\lambda > 0$ .



Pour prouver le Théorème 3, on montre que la branche locale donnée par le Théorème 2 se prolonge indéfiniment en une courbe  $C^1$  paramétrée par  $\lambda > 0$ .

On commence par montrer que, sous les hypothèses (V1) à (V4), pour tout  $\lambda > 0$ , il existe une unique solution positive radiale  $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$  de (E2), et que, pour  $0 < \lambda < \lambda_0$ , elle coïncide avec la solution  $u(\lambda)$  du Théorème 2.

Pour prouver le Théorème 3, on montre que la branche locale donnée par le Théorème 2 se prolonge indéfiniment en une courbe  $C^1$  paramétrée par  $\lambda > 0$ .

On commence par montrer que, sous les hypothèses (V1) à (V4), pour tout  $\lambda > 0$ , il existe une unique solution positive radiale  $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$  de (E2), et que, pour  $0 < \lambda < \lambda_0$ , elle coïncide avec la solution  $u(\lambda)$  du Théorème 2.

On montre ensuite que  $u_\lambda$  est une solution non-dégénérée, pour tout  $\lambda > 0$ . On peut ainsi appliquer le TFI en chaque point  $(\lambda, u_\lambda)$ . On en déduit finalement que la branche amorcée au Théorème 2 s'étend indéfiniment.

## Remarques

Cette méthode est purement analytique et donne des conclusions fortes: courbe lisse, comportement asymptotique et monotonie de la branche, etc. Ces propriétés s'avéreront utiles pour étudier la stabilité des ondes stationnaires de (NLS).

## Remarques

Cette méthode est purement analytique et donne des conclusions fortes: courbe lisse, comportement asymptotique et monotonie de la branche, etc. Ces propriétés s'avéreront utiles pour étudier la stabilité des ondes stationnaires de (NLS).

Il est possible d'obtenir la bifurcation depuis le spectre essentiel sous des hypothèses plus faibles, avec bien sûr des conclusions plus faibles.

## Remarques

Cette méthode est purement analytique et donne des conclusions fortes: courbe lisse, comportement asymptotique et monotonie de la branche, etc. Ces propriétés s'avéreront utiles pour étudier la stabilité des ondes stationnaires de (NLS).

Il est possible d'obtenir la bifurcation depuis le spectre essentiel sous des hypothèses plus faibles, avec bien sûr des conclusions plus faibles.

Des arguments purement variationnels (voir par ex. [Stuart '82 '88](#)) donnent des suites de solutions qui convergent vers la ligne des solutions triviales.

## Remarques

Cette méthode est purement analytique et donne des conclusions fortes: courbe lisse, comportement asymptotique et monotonie de la branche, etc. Ces propriétés s'avéreront utiles pour étudier la stabilité des ondes stationnaires de (NLS).

Il est possible d'obtenir la bifurcation depuis le spectre essentiel sous des hypothèses plus faibles, avec bien sûr des conclusions plus faibles.

Des arguments purement variationnels (voir par ex. [Stuart '82 '88](#)) donnent des suites de solutions qui convergent vers la ligne des solutions triviales.

Des méthodes topologiques donnent des ensembles connexes de solutions, voir par exemple [Toland '82](#), [Giacomoni '98](#).

## Leçon 3

# Stabilité des ondes stationnaires

## NLS en dimension $N = 1$

Nous revenons maintenant à l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi + \partial_{xx}^2\psi + f(x, |\psi|^2)\psi = 0 \quad (\text{NLS})$$

avec

$$f(x, s^2) = V(x)s^{p-1}, \quad s \geq 0$$



## NLS en dimension $N = 1$

Nous revenons maintenant à l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi + \partial_{xx}^2\psi + f(x, |\psi|^2)\psi = 0 \quad (\text{NLS})$$

avec

$$f(x, s^2) = V(x)s^{p-1}, \quad s \geq 0$$

où  $V \in C^1(\mathbb{R})$  est pair,  $V' < 0$  sur  $(0, \infty)$ ,

## NLS en dimension $N = 1$

Nous revenons maintenant à l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi + \partial_{xx}^2\psi + f(x, |\psi|^2)\psi = 0 \quad (\text{NLS})$$

avec

$$f(x, s^2) = V(x)s^{p-1}, \quad s \geq 0$$

où  $V \in C^1(\mathbb{R})$  est pair,  $V' < 0$  sur  $(0, \infty)$ ,

$$V(x) \sim |x|^{-b} \quad \text{lorsque} \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{pour un } b \in (0, 1)$$

# NLS en dimension $N = 1$

Nous revenons maintenant à l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi + \partial_{xx}^2\psi + f(x, |\psi|^2)\psi = 0 \quad (\text{NLS})$$

avec

$$f(x, s^2) = V(x)s^{p-1}, \quad s \geq 0$$

où  $V \in C^1(\mathbb{R})$  est pair,  $V' < 0$  sur  $(0, \infty)$ ,

$$V(x) \sim |x|^{-b} \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty \quad \text{pour un } b \in (0, 1)$$

et

$$x \mapsto x \frac{V'(x)}{V(x)} \text{ décroissante sur } (0, \infty), \text{ avec } x \frac{V'(x)}{V(x)} \geq -b$$

# NLS en dimension $N = 1$

Nous revenons maintenant à l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi + \partial_{xx}^2\psi + f(x, |\psi|^2)\psi = 0 \quad (\text{NLS})$$

avec

$$f(x, s^2) = V(x)s^{p-1}, \quad s \geq 0$$

où  $V \in C^1(\mathbb{R})$  est pair,  $V' < 0$  sur  $(0, \infty)$ ,

$$V(x) \sim |x|^{-b} \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty \quad \text{pour un } b \in (0, 1)$$

et

$$x \mapsto x \frac{V'(x)}{V(x)} \text{ décroissante sur } (0, \infty), \text{ avec } x \frac{V'(x)}{V(x)} \geq -b$$

On suppose aussi  $1 < p < 5 - 2b$  (non-linéarité sous-critique).

## Exemple

$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{b/2}}$  satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

## Exemple

$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{b/2}}$  satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

Sous ces hypothèses, nous avons trouvé les solutions

$$\psi_\lambda(t, x) := e^{i\lambda t} u_\lambda(x), \quad \lambda \in (0, \infty)$$

où  $u_\lambda \in H^2(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$  satisfait le problème stationnaire

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x)^2)u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{SNLS})$$

## Exemple

$V(x) = \frac{1}{(1 + |x|^2)^{b/2}}$  satisfait toutes les hypothèses ci-dessus.

Sous ces hypothèses, nous avons trouvé les solutions

$$\psi_\lambda(t, x) := e^{i\lambda t} u_\lambda(x), \quad \lambda \in (0, \infty)$$

où  $u_\lambda \in H^2(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$  satisfait le problème stationnaire

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x)^2)u(x) = \lambda u(x), & x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{SNLS})$$

$u(x) \equiv u(-x) > 0$  et  $\lambda \mapsto u_\lambda$  est  $C^1((0, \infty), H^1(\mathbb{R}))$

avec  $\|u_\lambda\|_{H^1} \rightarrow 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

## Stabilité orbitale

Comme (NLS) est invariant sous l'action du groupe  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ , on ne peut espérer montrer la stabilité des solutions périodiques  $\psi_\lambda(t, x) = e^{i\lambda t} u_\lambda(x)$  au sens usuel.



## Stabilité orbitale

Comme (NLS) est invariant sous l'action du groupe  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ , on ne peut espérer montrer la stabilité des solutions périodiques  $\psi_\lambda(t, x) = e^{i\lambda t} u_\lambda(x)$  au sens usuel.

En effet, supposons  $\lambda_n \rightarrow \lambda \in (0, \lambda_0)$  et considérons

$$\psi_\lambda(t, x) = e^{i\lambda t} u_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \varphi_n(t, x) = e^{i\lambda_n t} u_{\lambda_n}(x)$$

Alors  $\forall \delta > 0 \exists N_\delta \in \mathbb{N}$  t.q.

$$n \geq N_\delta \implies \|\varphi_n(0, \cdot) - \psi_\lambda(0, \cdot)\|_{H^1} = \|u_{\lambda_n} - u_\lambda\|_{H^1} \leq \delta$$

# Stabilité orbitale

Comme (NLS) est invariant sous l'action du groupe  $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ , on ne peut espérer montrer la stabilité des solutions périodiques  $\psi_\lambda(t, x) = e^{i\lambda t} u_\lambda(x)$  au sens usuel.

En effet, supposons  $\lambda_n \rightarrow \lambda \in (0, \lambda_0)$  et considérons

$$\psi_\lambda(t, x) = e^{i\lambda t} u_\lambda(x) \quad \text{et} \quad \varphi_n(t, x) = e^{i\lambda_n t} u_{\lambda_n}(x)$$

Alors  $\forall \delta > 0 \exists N_\delta \in \mathbb{N}$  t.q.

$$n \geq N_\delta \implies \|\varphi_n(0, \cdot) - \psi_\lambda(0, \cdot)\|_{H^1} = \|u_{\lambda_n} - u_\lambda\|_{H^1} \leq \delta$$

Cependant,

$$\|\varphi_n(t, \cdot) - \psi_\lambda(t, \cdot)\|_{H^1} \geq |e^{i\lambda t} - e^{i\lambda_n t}| \|u_\lambda\|_{H^1} - \|u_{\lambda_n} - u_\lambda\|_{H^1}$$

$$\implies \sup_{t \geq 0} \|\varphi_n(t) - \psi_\lambda(t)\|_{H^1} \geq 2\|u_\lambda\|_{H^1} - \delta \quad \text{pour } n \geq N_\delta$$

La notion naturelle de stabilité pour les solutions périodiques est la suivante.

### Définition

Une onde stationnaire  $\psi(t, x) = e^{i\lambda t} u(x)$  est **orbitalement stable** ssi  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.q. pour toute solution  $\varphi$  de (NLS) on a

$$\|\varphi(0, \cdot) - u\|_{H^1} \leq \delta \implies \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|\varphi(t, \cdot) - e^{i\theta} u\|_{H^1} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

La notion naturelle de stabilité pour les solutions périodiques est la suivante.

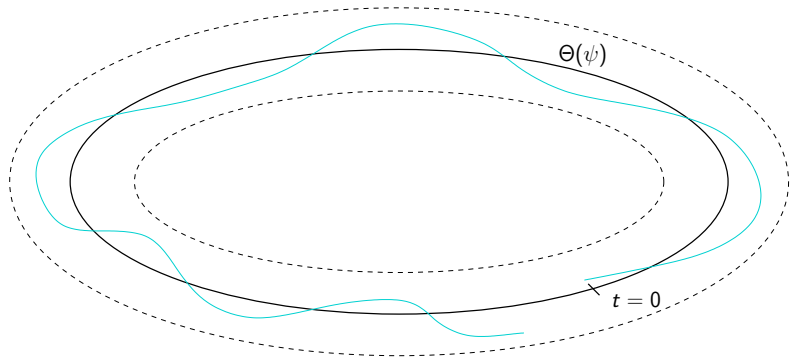
### Définition

Une onde stationnaire  $\psi(t, x) = e^{i\lambda t} u(x)$  est **orbitalement stable** ssi  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.q. pour toute solution  $\varphi$  de (NLS) on a

$$\|\varphi(0, \cdot) - u\|_{H^1} \leq \delta \implies \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \|\varphi(t, \cdot) - e^{i\theta} u\|_{H^1} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

Intuitivement:  $\varphi(0, \cdot)$  proche de  $u \implies$

$\varphi(t, \cdot)$  proche de l'**orbite**  $\Theta(\psi) := \{e^{i\theta} u : \theta \in \mathbb{R}\} \forall t \geq 0$ .



Pour montrer la stabilité, on utilise la théorie générale de Grillakis-Shatah-Strauss (1987).

Pour montrer la stabilité, on utilise la théorie générale de Grillakis-Shatah-Strauss (1987).

Pour chaque  $\lambda_0 \in (0, \infty)$ , l'onde stationnaire  $\psi_{\lambda_0} = e^{i\lambda_0 t} u_{\lambda_0}$  est stable si les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) En interprétant (NLS) comme un système hamiltonien, des **conditions spectrales** assurent que la hessienne du système au point  $\psi_{\lambda_0}$  n'a qu'une direction instable.

Pour montrer la stabilité, on utilise la théorie générale de Grillakis-Shatah-Strauss (1987).

Pour chaque  $\lambda_0 \in (0, \infty)$ , l'onde stationnaire  $\psi_{\lambda_0} = e^{i\lambda_0 t} u_{\lambda_0}$  est stable si les conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) En interprétant (NLS) comme un système hamiltonien, des **conditions spectrales** assurent que la hessienne du système au point  $\psi_{\lambda_0}$  n'a qu'une direction instable.
- (2) Une fonction de Lyapunov empêche alors le système de visiter la direction instable, pourvu que la fonction  $\lambda \mapsto \|u_\lambda\|_{L^2}$  soit strictement croissante au voisinage du point  $\lambda = \lambda_0$ . Cette condition est souvent appelée la **condition de pente**.



## Les conditions spectrales

Pour  $\lambda \in (0, \infty)$ , considérons les opérateurs linéaires

$L_\lambda^+, L_\lambda^- : H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  définis par

$$L_\lambda^+ v = -v'' + \lambda v - [f(x, u_\lambda^2) + 2\partial_2 f(x, u_\lambda^2)u_\lambda^2]v$$

$$L_\lambda^- v = -v'' + \lambda v - f(x, u_\lambda^2)v$$

# Les conditions spectrales

Pour  $\lambda \in (0, \infty)$ , considérons les opérateurs linéaires  $L_\lambda^+, L_\lambda^- : H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  définis par

$$\begin{aligned}L_\lambda^+ v &= -v'' + \lambda v - [f(x, u_\lambda^2) + 2\partial_2 f(x, u_\lambda^2)u_\lambda^2]v \\L_\lambda^- v &= -v'' + \lambda v - f(x, u_\lambda^2)v\end{aligned}$$

Les conditions spectrales requises pour la stabilité sont:

- (S1)  $\inf \sigma_{\text{ess}}(L_\lambda^+) > 0, \quad M(L_\lambda^+) = 1, \quad \ker L_\lambda^+ = \{0\}$   
(S2)  $\inf \sigma_{\text{ess}}(L_\lambda^-) > 0, \quad 0 = \inf \sigma(L_\lambda^-), \quad \ker L_\lambda^- = \text{vect}\{u_\lambda\}$

où  $M(L_\lambda^+)$  est l'indice de Morse de  $L_\lambda^+ =$  dimension du plus grand sous-espace où  $L_\lambda^+$  est négatif.

$$L_{\lambda}^{+}v = -v'' + \lambda v - [f(x, u_{\lambda}^2) + 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2]v$$

$$L_{\lambda}^{-}v = -v'' + \lambda v - f(x, u_{\lambda}^2)v$$

## Vérification

Tout d'abord, toutes les valeurs propres sont simples.

$$L_{\lambda}^{+}v = -v'' + \lambda v - [f(x, u_{\lambda}^2) + 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2]v$$

$$L_{\lambda}^{-}v = -v'' + \lambda v - f(x, u_{\lambda}^2)v$$

## Vérification

Tout d'abord, toutes les valeurs propres sont simples. Ensuite:

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, u_{\lambda}^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2 = 0$   
 $\implies \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{+}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{-}) = \lambda > 0$

$$L_{\lambda}^{+} v = -v'' + \lambda v - [f(x, u_{\lambda}^2) + 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2]v$$

$$L_{\lambda}^{-} v = -v'' + \lambda v - f(x, u_{\lambda}^2)v$$

## Vérification

Tout d'abord, toutes les valeurs propres sont simples. Ensuite:

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, u_{\lambda}^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2 = 0$   
 $\implies \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{+}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{-}) = \lambda > 0$
- comparant  $L_{\lambda}^{+} v = 0$  avec l'équation pour  $u_{\lambda}$ , on montre que  $\ker L_{\lambda}^{+} = \{0\}$  (non-dégénérescence de  $u_{\lambda}$ )

$$L_{\lambda}^{+} v = -v'' + \lambda v - [f(x, u_{\lambda}^2) + 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2]v$$

$$L_{\lambda}^{-} v = -v'' + \lambda v - f(x, u_{\lambda}^2)v$$

## Vérification

Tout d'abord, toutes les valeurs propres sont simples. Ensuite:

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, u_{\lambda}^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2 = 0$   
 $\implies \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{+}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{-}) = \lambda > 0$
- comparant  $L_{\lambda}^{+} v = 0$  avec l'équation pour  $u_{\lambda}$ , on montre que  $\ker L_{\lambda}^{+} = \{0\}$  (non-dégénérescence de  $u_{\lambda}$ )
- $u_{\lambda} > 0$  sol. de (SNLS)  $\implies \ker L_{\lambda}^{-} = \text{vect}\{u_{\lambda}\}$  et  $0 = \inf \sigma(L_{\lambda}^{-})$

$$L_{\lambda}^{+} v = -v'' + \lambda v - [f(x, u_{\lambda}^2) + 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2]v$$

$$L_{\lambda}^{-} v = -v'' + \lambda v - f(x, u_{\lambda}^2)v$$

## Vérification

Tout d'abord, toutes les valeurs propres sont simples. Ensuite:

- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x, u_{\lambda}^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} 2\partial_2 f(x, u_{\lambda}^2)u_{\lambda}^2 = 0$   
 $\implies \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{+}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(L_{\lambda}^{-}) = \lambda > 0$
- comparant  $L_{\lambda}^{+} v = 0$  avec l'équation pour  $u_{\lambda}$ , on montre que  $\ker L_{\lambda}^{+} = \{0\}$  (non-dégénérescence de  $u_{\lambda}$ )
- $u_{\lambda} > 0$  sol. de (SNLS)  $\implies \ker L_{\lambda}^{-} = \text{vect}\{u_{\lambda}\}$  et  $0 = \inf \sigma(L_{\lambda}^{-})$

Il reste à montrer que  $L_{\lambda}^{+}$  a exactement une valeur propre négative.

L'analyse de bifurcation locale près de  $\lambda = 0$  permet de montrer que  $M(L_\lambda^+) = 1$  pour  $\lambda > 0$  petit.



L'analyse de bifurcation locale près de  $\lambda = 0$  permet de montrer que  $M(L_\lambda^+) = 1$  pour  $\lambda > 0$  petit.

Par la théorie de perturbation, les valeurs propres de  $L_\lambda^+$  dépendent continûment de  $\lambda \in (0, \infty)$ .

L'analyse de bifurcation locale près de  $\lambda = 0$  permet de montrer que  $M(L_\lambda^+) = 1$  pour  $\lambda > 0$  petit.

Par la théorie de perturbation, les valeurs propres de  $L_\lambda^+$  dépendent continûment de  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Puisque  $\ker L_\lambda^+ = \{0\}$  pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ , les valeurs propres ne peuvent pas traverser zéro lorsque  $\lambda$  varie

L'analyse de bifurcation locale près de  $\lambda = 0$  permet de montrer que  $M(L_\lambda^+) = 1$  pour  $\lambda > 0$  petit.

Par la théorie de perturbation, les valeurs propres de  $L_\lambda^+$  dépendent continûment de  $\lambda \in (0, \infty)$ .

Puisque  $\ker L_\lambda^+ = \{0\}$  pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ , les valeurs propres ne peuvent pas traverser zéro lorsque  $\lambda$  varie

$$\implies M(L_\lambda^+) = 1 \text{ pour tout } \lambda \in (0, \infty).$$

## La condition de pente

Nous devons vérifier que la fonction  $\lambda \mapsto \|u_\lambda\|_{L^2}$  est strictement croissante sur  $(0, \infty)$ .

Puisque  $\|u_\lambda\|_{L^2} \rightarrow 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  par le Théorème 2, il existe un  $\lambda > 0$  au voisinage duquel c'est vrai. Il suffit donc de vérifier que

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_\lambda^2 dx \neq 0 \quad \forall \lambda \in (0, \infty)$$

## La condition de pente

Nous devons vérifier que la fonction  $\lambda \mapsto \|u_\lambda\|_{L^2}$  est strictement croissante sur  $(0, \infty)$ .

Puisque  $\|u_\lambda\|_{L^2} \rightarrow 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  par le Théorème 2, il existe un  $\lambda > 0$  au voisinage duquel c'est vrai. Il suffit donc de vérifier que

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_\lambda^2 dx \neq 0 \quad \forall \lambda \in (0, \infty)$$

Remarquons que

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_\lambda^2 dx = 2 \int_{\mathbb{R}} u_\lambda \frac{d}{d\lambda} u_\lambda dx = 4 \int_0^\infty u_\lambda \xi_\lambda$$

où  $\xi_\lambda := \frac{d}{d\lambda} u_\lambda$  satisfait

$$\xi_\lambda'' + [f(x, u_\lambda^2) + 2\partial_2 f(x, u_\lambda^2) u_\lambda^2] \xi_\lambda = \lambda \xi_\lambda + u_\lambda$$

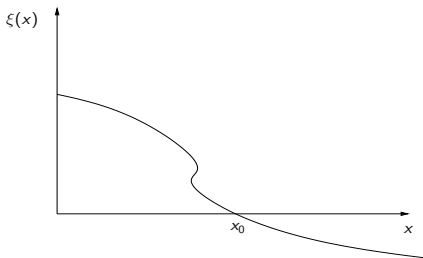
On peut montrer que

$$\int_0^\infty \left[ x \frac{V'(x)}{V(x)} + \frac{5-p}{2} \right] V(x) u^p \xi \, dx = 2\lambda \int_0^\infty u \xi \, dx \quad (*)$$

On peut montrer que

$$\int_0^{\infty} \left[ x \frac{V'(x)}{V(x)} + \frac{5-p}{2} \right] V(x) u^p \xi \, dx = 2\lambda \int_0^{\infty} u \xi \, dx \quad (*)$$

En outre,  $\xi$  a le profil ci-contre

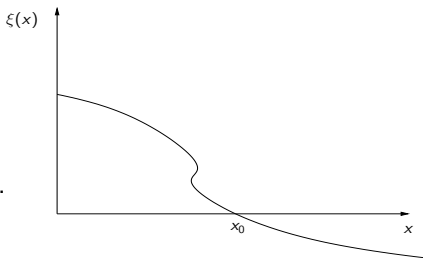


On peut montrer que

$$\int_0^{\infty} \left[ x \frac{V'(x)}{V(x)} + \frac{5-p}{2} \right] V(x) u^p \xi \, dx = 2\lambda \int_0^{\infty} u \xi \, dx \quad (*)$$

En outre,  $\xi$  a le profil ci-contre

Définissons  $\zeta(x) := x \frac{V'(x)}{V(x)} + \frac{5-p}{2}$ .



Supposant par l'absurde que  $\int_0^{\infty} u \xi \, dx = 0$   
on récrit alors (\*) comme

$$\int_0^{\infty} [\zeta(x) - \zeta(x_0)] V(x) u^p \xi \, dx + \zeta(x_0) \int_0^{\infty} V(x) u^p \xi \, dx = 0$$



L'identité de Lagrange pour  $u$  et  $\xi$  donne

$$(p-1) \int_0^\infty V(x) u^p \xi \, dx = \int_0^\infty u^2 \, dx$$

L'identité de Lagrange pour  $u$  et  $\xi$  donne

$$(p-1) \int_0^\infty V(x) u^p \xi \, dx = \int_0^\infty u^2 \, dx$$

et on a donc

$$\int_0^\infty V(x) u^p [\zeta(x) - \zeta(x_0)] \xi \, dx + \frac{\zeta(x_0)}{p-1} \int_0^\infty u^2 \, dx = 0 \quad (**)$$

L'identité de Lagrange pour  $u$  et  $\xi$  donne

$$(p-1) \int_0^\infty V(x) u^p \xi \, dx = \int_0^\infty u^2 \, dx$$

et on a donc

$$\int_0^\infty V(x) u^p [\zeta(x) - \zeta(x_0)] \xi \, dx + \frac{\zeta(x_0)}{p-1} \int_0^\infty u^2 \, dx = 0 \quad (**)$$

Grâce aux hypothèses

$$x \mapsto x \frac{V'(x)}{V(x)} \searrow \text{ sur } (0, \infty) \quad \text{et} \quad x \frac{V'(x)}{V(x)} \geq -b$$

L'identité de Lagrange pour  $u$  et  $\xi$  donne

$$(p-1) \int_0^\infty V(x) u^p \xi \, dx = \int_0^\infty u^2 \, dx$$

et on a donc

$$\int_0^\infty V(x) u^p [\zeta(x) - \zeta(x_0)] \xi \, dx + \frac{\zeta(x_0)}{p-1} \int_0^\infty u^2 \, dx = 0 \quad (**)$$

Grâce aux hypothèses

$$x \mapsto x \frac{V'(x)}{V(x)} \searrow \text{ sur } (0, \infty) \quad \text{et} \quad x \frac{V'(x)}{V(x)} \geq -b$$

on a alors

$$\zeta = x \frac{V'(x)}{V(x)} + \frac{5-p}{2} \searrow \text{ sur } (0, \infty) \quad \text{et} \quad p < 5 - 2b \implies \zeta > 0$$

ce qui contredit (\*\*).

### Théorème 4 (G., ANS 2009)

Supposons que  $V \in C^1(\mathbb{R})$  est pair,  $V' < 0$  sur  $(0, \infty)$ , et que

$$V(x) \sim |x|^{-b} \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty \quad \text{pour un } b \in (0, 1)$$

avec  $1 < p < 5 - 2b$ . Supposons en outre que

$$x \mapsto x \frac{V'(x)}{V(x)} \text{ décroissante sur } (0, \infty) \quad \text{et} \quad x \frac{V'(x)}{V(x)} \geq -b$$

Alors

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{\mathbb{R}} u_{\lambda}^2 dx > 0 \quad \forall \lambda \in (0, \infty)$$

En particulier, l'onde stationnaire  $\psi_{\lambda}(t, x) = e^{i\lambda t} u_{\lambda}(x)$  est une solution orbitalement stable de (NLS) pour tout  $\lambda \in (0, \infty)$ .