Note sur la détermination algébrique du groupe fondamental pro-résoluble d'une courbe affine

Niels Borne Michel Emsalem

2 août 2007

1 Introduction

On considère une courbe projective connexe et lisse X de genre g privée de $r \geq 1$ points sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. La connaissance du groupe fondamental algébrique $\pi_1(X, \bar{x})$ repose sur des arguments transcendants. Le but de cette note est de prouver le théorème de structure pour le plus grand quotient pro-résoluble et premier à p du groupe fondamental, en n'utilisant que des outils algébriques. On reprend à cette fin les idées essentielles et les arguments de [11].

Pour un groupe fini G, on note n_G le nombre minimal de générateurs de G, et $\mathcal{P}_G$ la propriété suivante :

$$n_G \leq 2g + r - 1 \iff \exists \pi_1(X, \overline{x}) \twoheadrightarrow G$$

On sait que $\mathcal{P}_G$ est vraie pour tout groupe G d'ordre premier à la caractéristique p, mais la preuve est "transcendante".

On prouvera avec des outils algébriques l'énoncé suivant.

Proposition 1. *Etant donnée une suite exacte*

$$1 \to A \to G \to H \to 1 \; .$$

Si A est résoluble, *G est d'ordre premier à p, et $\mathcal{P}_H$ est vraie, alors $\mathcal{P}_G$ est vraie.*

En particulier, on a donc une preuve algébrique du fait que $\mathcal{P}_G$ est vraie pour G résoluble d'ordre premier à la caractéristique p.

On en déduit une preuve algébrique du théorème de structure du quotient p'-résoluble du groupe fondamental algébrique d'une courbe algébrique affine.

Théorème 1. *Pour un groupe (profini) G on note G^{res} la limite inverse de ses quotients résolubles finis d'ordres premiers à p. Soit X une courbe projective, lisse, connexe, de genre g, privée de $r \geq 1$ points et F_N le groupe profini libre à N générateurs. Alors :*

$$\pi_1^{res}(X, \overline{x}) \simeq F_{2g+r-1}^{res} \; .$$

L'ingrédient essentiel de la preuve est la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich. Dans la direction opposée, il est intéressant de noter que la preuve initiale de la version modérée de cette formule (qui est celle nous utilisons ici) reposait sur le théorème de structure du groupe fondamental, obtenu de manière transcendante[1] (voir [8]).

Mentionnons enfin qu'une version nilpotente du théorème 1 a été récemment prouvée par Lieblich et Olsson (voir [7]).

2 Preuves

2.1 Dévissages

La proposition est la conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Si la proposition 1 est vraie pour tout groupe abélien l-élémentaire A, irréductible pour l'action de H, elle est vraie pour tout groupe abélien A.*

Lemme 2. *Si la proposition 1 est vraie pour tout groupe abélien A, elle est vraie pour tout groupe résoluble A.*

Introduisons quelques notations. Pour une suite exacte de groupes finis

$$(S) \quad 1 \to A \to G \to H \to 1$$

notons $(\star)_S$ la propriété $\mathcal{P}_H \Rightarrow \mathcal{P}_G$.

La preuve des lemmes repose sur la remarque immédiate suivante :

Lemme 3. *On se donne la suite exacte*

$$(S) \quad 1 \to A \to G \to H \to 1$$

et $A_1 < A$ un sous-groupe de A distingué dans G et notons $A_2 = A/A_1$. On dispose alors de deux nouvelles suites exactes

$$(S_2) \quad 1 \to A_2 \to G/A_1 \to H \to 1$$

$$(S_1) \quad 1 \to A_1 \to G \to G/A_1 \to 1$$

Alors si $(\star)_{S_1}$ et $(\star)_{S_2}$ sont vraies, il en est de même de $(\star)_S$.

2.1.1 Preuve du Lemme 1

Démonstration. Un groupe abélien A d'ordre premier à p est le produit direct de ses l-sous-groupes de Sylow, qui sont caractéristiques, et donc distingués dans G. On peut donc se ramener dans un premier temps grâce au lemme 3 à un l-groupe abélien A. Puis, en raisonnant par récurrence sur l'ordre de A, et en appliquant le lemme 3 à $A_1 = A^l$, on est ramené au cas de l-groupes abéliens élémentaires. Enfin, une nouvelle récurrence, utilisant encore le lemme 3 permet de se ramener au cas où A est simple en tant que représentation de H. $\square$

[1] La preuve définitive de la version générale de la formule est elle purement algébrique (voir [9]).

2.1.2 Preuve du Lemme 2

Démonstration. La preuve est similaire à la précédente en utilisant le lemme 1 et de nouveau le lemme 3. □

2.2 Relèvement de revêtements d'une courbe affine

Pour l'instant, on considère un corps algébriquement clos k de caractéristique $p \geq 0$, une courbe algébrique *affine* lisse et connexe X sur k, $\overline{x}$ un point géométrique.

On se donne un morphisme surjectif $\pi_1(X, \overline{x}) \twoheadrightarrow H$ où H est un groupe fini et $\pi : Y \to X$ le revêtement galoisien connexe correspondant, qu'on munit du point géométrique associé $\overline{y}$ au dessus de $\overline{x}$. On fixe de plus un $\mathbb{F}_l[H]$-module A de type fini irréductible.

Comme X est connexe, on a une équivalence de catégorie classique entre systèmes locaux (pour la topologie étale) de $\mathbb{F}_l$-espaces vectoriels de dimension finie d'une part, et représentations de $\pi_1(X, \overline{x})$ à valeurs dans les $\mathbb{F}_l$-espaces vectoriels de dimension finie d'autre part. Cette équivalence envoie un faisceau localement constant F sur sa fibre $F_{\overline{x}}$ en $\overline{x}$. De plus, $H^1(X, F) \simeq H^1(\pi_1(X, \overline{x}), F_{\overline{x}})$ ([11], preuve de la Proposition 1).

Au groupe A, on peut donc associer un faisceau étale localement constant $\underline{A}$, il s'agit simplement de $\pi_*^H(A_Y)$, où A_Y est le faisceau constant sur Y associé au $\mathbb{F}_l$-espace vectoriel sous-jacent à A.

Lemme 4. *On a une suite exacte :*

$$0 \to H^1(H, A) \to H^1(X, \underline{A}) \to \mathrm{Hom}_H(\pi_1^{ab}(Y), A) \to H^2(H, A) \to 0$$

Démonstration. Il s'agit de la suite exacte courte de bas degré associée à la suite spectrale de Hochschild-Serre $H^p(H, H^q(Y, A_Y)) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \underline{A})$ (voir appendice A.1). Pour identifier le troisième terme de la suite on utilise $H^1(Y, A_Y) \simeq H^1(\pi_1(Y, \overline{y}), A) = \mathrm{Hom}(\pi_1(Y, \overline{y}), A)$, A étant trivial sur Y. L'annulation du cinquième terme, à savoir $H^2(X, \underline{A})$, résulte de l'hypothèse que X est affine et donc de dimension cohomologique 1 ([2] IX 5.7, X 5.2). □

Lemme 5. *Le morphisme de transgression* trans : $\mathrm{Hom}_H(\pi_1^{ab}(Y), A) \to H^2(H, A)$ *dans la suite ci-dessus peut-être décrit comme suit : soit* $u \in \mathrm{Hom}_H(\pi_1^{ab}(Y), A)$, $u \neq 0$. *Alors u correspond canoniquement à un revêtement galoisien $Z \twoheadrightarrow X$ dont le groupe de Galois est une extension de H par A, et* $\mathrm{trans}(u)$ *est l'opposé de la classe de cette extension dans* $H^2(H, A)$.

Démonstration. Comme la dimension cohomologique de $\pi_1(X, \overline{x})$ est 1 ([11], Proposition 1), on peut, alternativement, considérer la suite exacte du lemme 4 comme la suite exacte d'inflation-restriction relative au module A et à la suite exacte $1 \to \pi_1(Y, \overline{y}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \to H \to 1$. On conclut grâce au fait suivant (pour lequel on renvoie à [6], qui traite le cas des groupes abstraits) : soit $1 \to \mathbf{F} \to \mathbf{G} \to \mathbf{H} \to 1$ une suite exacte de groupes profinis, M un groupe abélien discret équipé d'une action continue de $\mathbf{H}$. Soit de plus $\mathbf{F}'$ le sous-groupe dérivé de $\mathbf{F}$, et $\gamma \in H^2(\mathbf{H}, \mathbf{F}/\mathbf{F}')$ la classe de l'extension : $1 \to \mathbf{F}/\mathbf{F}' \to \mathbf{G}/\mathbf{F}' \to \mathbf{H} \to 1$. Alors le morphisme de transgression trans : $H^1(\mathbf{F}, M)^{\mathbf{H}} \to H^2(\mathbf{H}, M^{\mathbf{F}})$ (c'est-à-dire le quatrième morphisme dans la suite exacte d'inflation-restriction) est donné explicitement par :

$$\forall u \in H^1(\mathbf{F}, M)^{\mathbf{H}} = H^0(\mathbf{H}, \mathrm{Hom}(\mathbf{F}/\mathbf{F}', M)) \quad \mathrm{trans}(u) = -\gamma \cup u$$

□

2.3 Preuve de la Proposition 1

Le cas où les deux assertions de $\mathcal{P}_H$ sont fausses est évident. On supposera donc, dans ce paragraphe, que ces deux affirmations sont vraies.

Il faut vérifier $\mathcal{P}_G : n_G \leq 2g + r - 1 \iff \exists \pi_1(X, \underline{x}) \twoheadrightarrow G$.

2.3.1 Preuve de la Proposition 1 lorsque G n'est pas produit semi-direct

Le lemme 5 montre que $\exists \pi_1(X, \underline{x}) \twoheadrightarrow G$ est toujours vrai. Il s'agit donc de vérifier que $n_G \leq 2g + r - 1$ est vrai. Cela résulte du fait que $n_H \leq 2g + r - 1$ et que G n'est pas produit semi-direct.

2.3.2 Preuve de la Proposition 1 lorsque G est produit semi-direct : préliminaire

Si G est produit semi-direct de A par H, on déduit du lemme 4 le lemme suivant :

Lemme 6. *Le problème de plongement*

$$\begin{tikzcd} & & & \pi_1(X, \underline{x}) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, two heads] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G \arrow[r, "q"] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

a une solution forte si et seulement si $\dim_{\mathbb{F}_l} H^1(X, \underline{A}) > \dim_{\mathbb{F}_l} H^1(H, A)$.

2.3.3 Calcul de $\dim_{\mathbb{F}_l} H^1(X, \underline{A})$

Lemme 7. *Si H est un p'-groupe alors :*

$$\dim_{\mathbb{F}_l} H^1(X, \underline{A}) = (2g + r - 2) \dim_{\mathbb{F}_l} A + \dim_{\mathbb{F}_l} A^H \ .$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème de Grothendieck-Ogg-Shafarevich : voir le corollaire 1 de l'appendice A.2. En effet en notant $\overline{\pi} : \overline{Y} \to \overline{X}$ l'unique revêtement de courbes projectives et lisses prolongeant π, qui est encore galoisien de groupe H, on peut appliquer la formule au faisceau $F = \overline{\pi}_*^H A_{\overline{Y}}$, qui est constructible car $\overline{\pi}$ est propre, et dont la restriction à X est

$F_{|X} = \pi_*^H A_Y = \underline{A}$. L'hypothèse sur H fait que F est modérément ramifié, en d'autres termes pour tout $x \in \overline{X}(k)$ on a $\alpha_x(F) = 0$, d'où la formule donnée. □

2.3.4 Lemme algébrique

On fixe un entier naturel N.

Lemme 8. *On suppose que A est un groupe abélien l-élémentaire irréductible pour l'action de H, $A \neq 0$, $G = A \ltimes H$ et $n_H \leq N$.*
Alors :

$$\dim_{\mathbb{F}_l} H^1(H, A) < (N-1) \dim_{\mathbb{F}_l} A + \dim_{\mathbb{F}_l} A^H \iff n_G \leq N \ .$$

Démonstration. On note $\mathcal{S} = \{s : H \to G\}$ l'ensemble des sections (qui sont des morphismes de *groupes*) de la projection canonique $p : G \twoheadrightarrow H$. Le groupe A agit sur $\mathcal{S}$ par conjugaison, et il est bien connu que l'ensemble quotient est en bijection avec $H^1(H, A)$. Comme le stabilisateur de *toute* section est A^H, on en déduit que

$$|A^H| \cdot |\mathcal{S}| = |H^1(H, A)| \cdot |A|$$

Il s'agit donc de montrer :

$$n_G \leq N \iff |\mathcal{S}| < |A|^N \ .$$

On suppose d'abord $n_G \leq N$, disons $< u_1, \cdots, u_N >= G$.

Alors $< p(u_1), \cdots, p(u_N) >= H$, et donc toute section est déterminée uniquement par ses valeurs sur $p(u_1), \cdots, p(u_N)$, qui sont du type $a_1 u_1, \cdots, a_N u_N$, avec $(a_1, \cdots, a_N) \in A^N$.

Il y a donc au plus $|A|^N$ sections, mais le choix $(1, \cdots, 1)$ ne convenant pas, on a donc $|\mathcal{S}| < |A|^N$.

Réciproquement on suppose $n_G > N$. Soient $< x_1, \cdots, x_N >= H$ et $\tilde{x_1}, \cdots, \tilde{x_N}$ des relèvements arbitraires. Alors pour tout $(a_1, \cdots, a_N) \in A^N$ il existe une (unique) section s telle que $s(x_1) = a_1 \tilde{x_1}, \cdots, s(x_N) = a_N \tilde{x_N}$, et deux telles sections sont distinctes, ce qui implique $|\mathcal{S}| \geq |A|^N$.

En effet on considère $\tilde{G} =< a_1 \tilde{x_1}, \cdots, a_N \tilde{x_N} >\subset G$. Alors $\tilde{G}$ se surjecte sur H et $B = A \cap \tilde{G}$ est un sous H-module de A. Comme A est irréductible et $n_G > N$ on doit avoir $B = 1$, ce qui montre que p induit un isomorphisme de $\tilde{G}$ est sur H, et l'isomorphisme réciproque fournit la section souhaitée. □

2.3.5 Preuve de la proposition 1 lorsque G est produit semi-direct : conclusion

On utilise les lemmes 6, 7 et 8 (le dernier avec $N = 2g + r - 1$).

2.4 Preuve du théorème 1

La proposition 1 montre que les deux groupes profinis $\pi_1^{res}(X,\overline{x})$ et F_{2g+r-1}^{res} ont mêmes quotients finis. Comme le second est topologiquement de type fini, cela suffit d'après [3], Proposition 15.4 [2].

3 Remarque sur le cas des groupes d'ordre divisible par p

Il semble naturel de demander ce qu'il subsiste de la méthode précédente pour des groupes d'ordres divisibles par la caractéristique p du corps k. En particulier, on aimerait avoir une preuve algébrique de la conjecture d'Abhyankar[3], pour les groupes résolubles pour toute courbe affine, généralisant d'une part celle donnée dans [11] pour la droite affine, et le théorème 1 d'autre part.

Dans cette direction, on a obtenu au passage le résultat suivant.

Proposition 2. *Soit $\pi_1(X,\overline{x}) \twoheadrightarrow H$ où H est un groupe fini d'ordre quelconque, et $\pi : Y \to X$ le revêtement galoisien connexe correspondant.*

On considère le problème de plongement suivant :

$$\begin{tikzcd} & & & \pi_1(X,\underline{x}) \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G \arrow[r, "q"] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Si A est abélien l-élémentaire avec $l \neq p$, et irréductible pour l'action de H, si de plus le faisceau étale $\underline{A}$ associé sur X est modéré, si enfin $n_G \leq 2g+r-1$, alors le problème considéré a une solution forte.

Remarque 1. *L'hypothèse que $\underline{A}$ est modéré est bien sûr vérifiée si le prolongement canonique de π en un revêtement de courbes projectives lisses est lui même modéré. Dans cette situation, les méthodes transcendantes et algébriques ne sont pas vraiment concurrentes, mais complémentaires : la théorie de la spécialisation du groupe fondamental ([1] VIII Corollaire 2.12) affirme que la condition $n_G \leq 2g+r-1$ est nécessaire pour être un quotient du groupe fondamental modéré, et la technique de relèvement adoptée ici montre, pour ce type très particulier de groupe, qu'elle est aussi suffisante.*

[2] Dans la nouvelle édition [4] la référence est Proposition 16.10.7.

[3] On rappelle que celle-ci affirme qu'un groupe fini est groupe de Galois d'une extension étale d'une courbe affine X si et seulement si son quotient par le sous-groupe engendré par ses p-sous-groupes de Sylow admet au plus $2g+r-1$ générateurs. Cette conjecture a été démontrée par Raynaud pour la droite affine [10] et Harbater dans le cas général [5].

A Appendices

A.1 Hochschild-Serre

Théorème 2 (Suite spectrale de Hochschild-Serre)**.** *Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement galoisien de groupe G, et F un faisceau (abélien) étale sur X. Alors on a une suite spectrale :*

$$H^p(G, H^q(Y, \pi^* F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X, F)$$

Démonstration. Voir par exemple [8] III Theorem 2.20. □

A.2 Grothendieck-Ogg-Shafarevich

On suit [9], [8] : k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, $\overline{X}$ une courbe algébrique irréductible, projective et lisse sur k, de point générique $\overline{\nu}$.

Définition 1. *Soit l un nombre premier distinct de p, et F un faisceau constructible de $\mathbb{F}_l$-modules sur $\overline{X}$.* L'invariant de Swan de F en $x \in \overline{X}(k)$ *est l'entier :*

$$\alpha_x(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i}{g_0} \dim_{\mathbb{F}_l} F_{\overline{\nu}} / F_{\overline{\nu}}^{G_i}$$

où g_i est l'ordre de G_i, i-ème groupe de ramification en x dans un revêtement galoisien $\overline{Y}/\overline{X}$ trivialisant F au point générique.

Définition 2. L'exposant du conducteur de F en x *est :*

$$\epsilon_x(F) = \alpha_x(F) + \dim_{\mathbb{F}_l} F_{\overline{\nu}} - \dim_{\mathbb{F}_l} F_x$$

On a alors :

Théorème 3 (Grothendieck-Ogg-Shafarevich)**.**

$$\chi(\overline{X}, F) = \chi(\overline{X}) \dim_{\mathbb{F}_l} F_{\overline{\nu}} - \sum_{x \in \overline{X}(k)} \epsilon_x(F) \ .$$

Corollaire 1. *Soit X un ouvert affine de $\overline{X}$, ne contenant aucun des points où F est ramifié. Alors :*

$$\chi(X, F_{|X}) = \chi(X) \dim_{\mathbb{F}_l} F_{\overline{\nu}} - \sum_{x \in \overline{X}(k)} \alpha_x(F) \ .$$

Si r est le nombre de points de $\overline{X} - X$, et g est le genre de $\overline{X}$, alors $\chi(X) = 2 - 2g - r$.

Le corollaire est immédiat à partir de la suite de cohomologie relative de la paire $(\overline{X}, X)$ et du fait que $\dim_{\mathbb{F}_l} F_x = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_l} H^i_x(\overline{X}, F)$ ([8] V Lemma 2.10 (a)).

Références

[1] Revêtements étales et groupe fondamental. (French) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1). Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[2] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3. (French) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973.

[3] Fried, Michael D. ; Jarden, Moshe : Field arithmetic. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 11. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[4] Fried, Michael D. ; Jarden, Moshe : Field arithmetic. Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 11. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[5] Harbater, David : Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves. Invent. Math. 117 (1994), no. 1, 1–25.

[6] Hochschild, G. ; Serre, J.-P. : Cohomology of group extensions. Trans. Amer. Math. Soc. 74, (1953). 110–134.

[7] Lieblich, Max ; Olsson, Martin : Generators and relations for the etale fundamental group, arXiv math/0703139.

[8] Milne, James S. : Étale cohomology. Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[9] Raynaud, Michel : Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes. (French) [Euler-Poincare characteristic of a sheaf and cohomology of abelian varieties] Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 286, 129–147, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[10] Raynaud, Michel : Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar. (French) [Coverings of the affine line in characteristic p and the Abhyankar conjecture] Invent. Math. 116 (1994), no. 1-3, 425–462.

[11] Serre, Jean-Pierre : Construction de revêtements étales de la droite affine en caractéristique p. (French) [Construction of etale coverings of the affine line in characteristic p] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 311 (1990), no. 6, 341–346.