

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN CRITÈRE D'ÉPOINTAGE DES SECTIONS ℓ -ADIQUES

Niels Borne & Michel Emsalem

Tome 142
Fascicule 3

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 465-487

UN CRITÈRE D'ÉPOINTAGE DES SECTIONS ℓ -ADIQUES

PAR NIELS BORNE & MICHEL EMSALEM

RÉSUMÉ. — La conjecture d'épointage est apparue comme une approche de la célèbre conjecture des sections de Grothendieck. Nous nous intéressons à une forme faible de celle-ci en introduisant une généralisation directe d'un théorème d'Uwe Jannsen décrivant exactement quand l'homologie ℓ -adique d'une courbe ouverte est une représentation Galoisienne pure. Nous donnons aussi des exemples concrets de courbes modulaires pour lesquelles l'épointage est possible au niveau ℓ -adique.

ABSTRACT (*A criterion of cuspidalization of ℓ -adic sections*). — The cuspidalization conjecture emerged as an approach of Grothendieck's famous section conjecture. We address a weak form of it by using a slight generalization of a theorem of Uwe Jannsen which describes exactly when the ℓ -adic homology of an open curve is a pure Galois representation. We also give concrete examples of modular curves for which the cuspidalization is possible at the ℓ -adic level.

Texte reçu le 9 janvier 2012, révisé et accepté le 31 juillet 2012.

NIELS BORNE
MICHEL EMSALEM

Classification mathématique par sujets (2010). — 14H30, 14G05.

Mots clefs. — Géométrie anabélienne, cohomologie ℓ -adique.

N. Borne a été partiellement soutenu par le projet ANR-10-JCJC 0107.

Les auteurs ont été partiellement soutenus par le Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01) et l'ANR ARIVAF (ANR-10-JCJC 0107).

1. Introduction

Soit Y une courbe géométriquement connexe sur un corps k de type fini sur \mathbb{Q} . On dispose de la suite exacte courte des groupes fondamentaux étales

$$(*_Y) \quad 1 \rightarrow \pi_1(Y_{\bar{k}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{x}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

où \bar{k} est une clôture algébrique, $G_k = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ est le groupe de Galois absolu de k , et \bar{x} est un point géométrique de Y . Soient à présent X une courbe propre lisse géométriquement irréductible, et U le complémentaire dans X d'un diviseur D défini sur k . On s'intéresse dans cet article à la question suivante, dite d'épointage des sections :

*Les sections de la suite exacte $(*_X)$ se relèvent-elles en des sections de la suite exacte $(*_U)$?*

Une des motivations pour l'étude de ce problème est que la conjecture des sections pour X de genre au moins 2, qui affirme que toute section de $(*_X)$ provient d'un point k -rationnel de X , implique une réponse positive à la question de l'épointage des sections.

Réciproquement, il est bien connu des spécialistes qu'une réponse positive à la question de l'épointage des sections permettrait de réduire la conjecture des sections au cas de la droite projective privée d'un nombre fini de points. Pour donner un sens précis à cette assertion, on doit formuler une version de la conjecture des sections pour des courbes éventuellement non propres, où à chaque point à l'infini est associé un « paquet » de (classes de conjugaison de) sections, qui a le cardinal du continu.

Comme une référence pour cette réduction de la conjecture de sections semble faire défaut, nous en avons inclus une esquisse assez détaillée (voir §3.1), en prenant le parti de remplacer les courbes affines par des orbicourbes qui leur sont « homotopiquement équivalentes », mais dont la propreté permet un traitement beaucoup plus uniforme (voir §2.2), les « paquets » mentionnés ci-dessus correspondant à des limites projectives de points rationnels sur ces orbicourbes.

Nous nous limiterons à l'étude de la question de l'épointage des sections dans le cadre suivant. Pour tout nombre premier l , considérons la suite exacte

$$(*_Y)^{[ab,l]} \quad 1 \rightarrow H_1(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) \rightarrow \pi_1^{[ab,l]}(Y, \bar{x}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

où $\pi_1^{[ab,l]}(Y, \bar{x})$ désigne le quotient de $\pi_1(Y, \bar{x})$ par le noyau du morphisme naturel $\pi_1(Y_{\bar{k}}, \bar{x}) \rightarrow H_1(Y_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ du groupe fondamental « géométrique » vers son plus grand l -quotient abélien. Dans ce cadre se pose la question de l'épointage des sections l -adiques :

*Les sections de la suite exacte $(*_X)^{[ab,l]}$ se relèvent-elles en des sections de la suite exacte $(*_U)^{[ab,l]}$?*

Ce type de problème a été récemment soulevé par Mohamed Saïdi (voir [20]). On montrera dans cet article l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient k un corps de type fini sur \mathbb{Q} , G_k son groupe de Galois absolu, X/k une courbe propre et lisse, géométriquement connexe, $D \subset X$ un diviseur réduit, $U = X \setminus D$ l'ouvert complémentaire, et $\bar{x} \in U$ un point géométrique. On fixe une extension galoisienne finie k'/k contenant les corps de définition de tous les points de D et un nombre premier l ne divisant pas $[k' : k]$. On note $\mathbf{Pic}_{X/k}$ le schéma de Picard de X , et $\mathbf{Pic}_{X,D/k}$ celui de la courbe obtenue à partir de X en pinçant D en un unique point rationnel (voir §3.3). On fait les deux hypothèses suivantes :*

1. *Il existe un entier naturel $N \geq 1$ premier à l et un point rationnel $p : \text{Spec } k \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ tel que D soit inclus dans la fibre du morphisme composé $X \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^1 \xrightarrow{\times N} \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ en p ,*
2. *la classe de $\mathbf{Pic}_{X,D}^1$ appartient au sous-groupe l -divisible maximal du groupe $H^1(G_k, \mathbf{Pic}_{X,D}^0)$.*

Alors toute section du morphisme naturel $\pi_1(X, \bar{x})^{[ab, l]} \rightarrow G_k$ se relève en une section du morphisme $\pi_1(U, \bar{x})^{[ab, l]} \rightarrow G_k$.

Voici un aperçu de la preuve du théorème 1. La deuxième condition du théorème équivaut, d'après [13], à l'existence d'une section du morphisme $\pi_1^{[ab, l]}(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$. Le problème revient alors à montrer la surjectivité de l'application $H^1(G_k, H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)) \rightarrow H^1(G_k, H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l))$. Une condition suffisante — beaucoup plus forte *a priori* que la condition d'épointage des sections l -adiques — est, bien entendu, que $H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$, qui est *a priori* une extension de $H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ par un module de Tate qu'il est facile de décrire en fonction des pointes, soit en fait une somme directe de ces deux représentations galoisiennes pures : on dira que l'homologie de U est pure. Nous utilisons alors, en le généralisant un peu, un théorème d'Uwe Jannsen (voir théorème 13), pour prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons que tous les points de D soient rationnels sur une extension galoisienne finie k' de k de degré premier à l . L'épimorphisme*

$$H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) \twoheadrightarrow H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$$

admet une section G_k -invariante si et seulement si géométriquement (c'est-à-dire sur \bar{k}), pour tous z, z' dans le support de D , le diviseur $z' - z$ est de torsion première à l dans la jacobienne de X .

La condition donnée par ce théorème pour que l'homologie soit pure sera reformulée en la première condition du théorème 1.

Nous rappelons dans le paragraphe 4 la construction de l'application d'Abel-Jacobi, qui à une classe de cycle cohomologue à 0 sur X associe une extension de représentations galoisiennes. Le lemme clé (Lemme 8) identifie cette application à un cobord obtenu à partir de la suite de Kummer pour la jacobienne de X , dont on sait qu'il est injectif. Comme il semble qu'une preuve n'ait jamais été publiée, nous en avons inclus une. Celle-ci utilise un entrelacement entre la suite de Kummer et la suite de cohomologie relative qui fait écho, de manière plus complexe, à celui qu'on utilise pour définir la classe de cycle d'un diviseur en cohomologie étale.

Enfin, dans le paragraphe 5.4, nous donnons des exemples explicites de courbes modulaires époutées dont l'homologie est pure, et pour lesquelles le théorème 1 s'applique.

1.1. Remerciements. — Nous remercions Damian Rössler pour nous avoir guidés vers le théorème de Manin-Mumford, et Pierre Parent pour nous avoir fourni les exemples de courbes modulaires. Nous sommes également reconnaissants envers Jakob Stix dont les commentaires éclairés ont permis d'améliorer notre texte initial. Enfin, nous remercions le rapporteur pour sa lecture attentive ainsi que pour ses remarques.

2. La conjecture des sections

2.1. Énoncé. — Soit X/k un schéma de type fini, géométriquement connexe, et $\bar{x} : \text{Spec } \Omega \rightarrow X$ un point géométrique. On dispose de la « suite exacte fondamentale » :

$$(1) \quad 1 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

voir [11], IX, théorème 6.1. Par functorialité, un point rationnel induit une section de cette suite exacte, bien définie à conjugaison près par un élément de $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})$. On obtient ainsi une application :

$$s_X : X(k) \rightarrow \mathbf{Hom}\text{-ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}))$$

La conjecture des sections s'énonce ainsi :

CONJECTURE 1 ([12]). — *Si X est une courbe propre et lisse de genre supérieur ou égal à 2 sur un corps k de type fini sur \mathbb{Q} , l'application s_X est bijective.*

L'injectivité est connue et est une conséquence du théorème de Mordell-Weil (voir par exemple [23], Appendix B).

2.2. Orbicourbes. — Par orbifold, on entendra un champ de Deligne-Mumford, qui est génériquement un schéma. Une orbicourbe est une orbifold réduite de type fini modérée sur un corps, qui est de dimension 1. Les orbicourbes peuvent être construites par recollement, mais on dispose aussi d'une description agréable de leurs foncteurs des points, due à Vistoli, qu'on rappelle brièvement.

2.2.1. *Champ des racines.* — On rappelle que le champ torique $[\mathbb{A}^1|\mathbb{G}_m]$ est isomorphe au champ classifiant les couples (\mathcal{L}, s) , où \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X et s est une section de ce faisceau.

DÉFINITION 3 ([1]). — 1. Soit un schéma X , muni d'un couple (\mathcal{L}, s) , où \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X et s est une section de ce faisceau. On appelle champ des racines r -ièmes de (\mathcal{L}, s) le champ

$$\sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X} = X \times_{[\mathbb{A}^1|\mathbb{G}_m]} [\mathbb{A}^1|\mathbb{G}_m]$$

où le produit fibré est pris par rapport aux morphismes $(\mathcal{L}, s) : X \rightarrow [\mathbb{A}^1|\mathbb{G}_m]$, et l'élévation à la puissance $r : \cdot^{\otimes r} : [\mathbb{A}^1|\mathbb{G}_m] \rightarrow [\mathbb{A}^1|\mathbb{G}_m]$.

2. Si D est un diviseur de Cartier effectif sur X , et s_D est la section canonique de $\mathcal{O}_X(D)$, on note $\sqrt[r]{D/X}$ le champ $\sqrt[r]{(\mathcal{O}_X(D), s_D)/X}$.
3. Soit I un ensemble fini, $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers $r_i \geq 1$, et $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs sur X . On note $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ le champ $\prod_{X, i \in I} \sqrt[r_i]{D_i/X}$. On appellera r_i la multiplicité de D_i .

REMARQUE 1. — En dimension 1, ou plus généralement lorsque l'on considère un schéma muni d'un diviseur à croisements normaux simples, les champs des racines définis ci-dessus sont suffisants. Pour un diviseur à croisements normaux généraux, il faudrait les remplacer par les champs des racines généralisés considérés dans [5].

2.2.2. *Groupe fondamental des champs de Deligne-Mumford.* — Soit \mathcal{X} un champ de Deligne-Mumford connexe. On se fixe un point géométrique \bar{x} . Le groupe fondamental (étale) basé en \bar{x} été défini et étudié dans [18] et [27]. Sa définition repose sur le fait que la catégorie $\text{Rev } \mathcal{X}$ des morphismes $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ d'un champ de Deligne-Mumford vers \mathcal{X} qui sont *représentables finis* et *étales* est (équivalente à) une catégorie galoisienne.

Si on suppose \mathcal{X} de type fini et géométriquement connexe sur un corps k , on dispose de la « suite exacte fondamentale » (1) ; la démonstration de l'exactitude est la même que dans le cas des schémas, voir [11], IX, théorème 6.1. Comme deux points rationnels isomorphes donnent lieu à des sections conjuguées, on dispose d'une application :

$$s_{\mathcal{X}} : \text{IsCl } \mathcal{X}(k) \rightarrow \mathbf{Hom-ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(\mathcal{X}_{\bar{k}}, \bar{x}))$$

des classes d'isomorphisme de points k -rationnels vers les sections de la suite exacte fondamentale à conjugaison près.

2.2.3. *Orbicourbes hyperboliques*

DÉFINITION 4. — 1. On appelle orbicourbe⁽¹⁾ (sous-entendu par la suite : propre et lisse) sur un corps k un champ des racines $\mathcal{X} = \sqrt[r]{D/X}$, où X est une courbe propre et lisse sur k , $(D_i)_{i \in I}$ est une famille finie de diviseurs de Cartier effectifs et réduits sur X , $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers $r_i \geq 1$, premiers à la caractéristique de k . Le genre de \mathcal{X} est celui de X .

2. Si \mathcal{X} est une orbicourbe de genre g sur k , on définit sa « caractéristique d'Euler-Poincaré orbifolde » par :

$$\chi^{orb}(\mathcal{X}) = 2 - 2g + \sum_{i \in I} \deg D_i \frac{1 - r_i}{r_i}$$

3. On dit alors que l'orbicourbe \mathcal{X} est hyperbolique si $\chi^{orb}(\mathcal{X}) < 0$.

REMARQUE 2. — 1. \mathcal{X} est hyperbolique si et seulement si $\mathcal{X}_{\bar{k}}$ l'est. Lorsque $k = \mathbb{C}$, l'orbicourbe \mathcal{X} est hyperbolique si et seulement si son revêtement universel est le demi-plan de Poincaré : voir [2], §5.

2. Si $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ est un revêtement (étale) de degré d , alors il résulte de la formule de Hurwitz que $\chi^{orb}(\mathcal{Y}) = d\chi^{orb}(\mathcal{X})$, en particulier \mathcal{Y} est hyperbolique si et seulement si \mathcal{X} l'est.

CONJECTURE 2. — Si \mathcal{X} est une orbicourbe hyperbolique géométriquement connexe sur un corps k de type fini sur \mathbb{Q} , l'application $s_{\mathcal{X}}$ est bijective.

Cette conjecture a un caractère folklorique. Elle est un peu plus fine que la conjecture des sections pour les courbes affines énoncée en termes de « paquets » dans [12]. En effet, soit X/k une courbe propre lisse, munie d'un diviseur D , telle que la courbe affine $U = X \setminus D$ soit hyperbolique, c'est-à-dire $2 - 2g - \deg D < 0$. Alors pour $r > \frac{\deg D}{\deg D + 2g - 2}$, l'orbicourbe $\sqrt[r]{D/X}$ est hyperbolique. Comme d'après le lemme d'Abhyankar $\pi_1(U, \bar{x}) \simeq \varprojlim_r \pi_1(\sqrt[r]{D/X}, \bar{x})$ (voir [4], proposition 3.2.2), on en déduit que la validité de la conjecture 2 implique que

$$s_U : \varprojlim_r \text{IsCl } \sqrt[r]{D/X}(k) \rightarrow \mathbf{Hom-ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(U_{\bar{k}}, \bar{x}))$$

est une bijection. On a une injection canonique $U(k) \rightarrow \varprojlim_r \text{IsCl } \sqrt[r]{D/X}(k)$, le membre de droite correspondant aux paquets auxquels il a été fait allusion dans

⁽¹⁾ Pour l'équivalence avec la définition précédente, sur un corps algébriquement clos, voir [19], proposition 3.1. Nous pensons que l'équivalence est encore vraie sur un corps quelconque, mais nous nous contenterons d'utiliser cette dernière définition, qui est la plus pratique.

l'introduction. Les points rationnels des champs des racines ont donc permis de compléter $U(k)$ de manière naturelle. On peut par ailleurs analyser précisément la contribution d'un point rationnel à l'infini (voir l'appendice A) ce qui permet de donner une description explicite du membre de gauche, au moins lorsque D est totalement décomposé.

3. Épointage de sections

3.1. Épointage de sections profinies. — On fixe k un corps et X/k une courbe propre lisse géométriquement connexe de genre $g \geq 2$.

CONJECTURE 3 (Conjecture d'épointage). — *Si k est un corps de type fini sur \mathbb{Q} et U est un ouvert non vide de X , alors toute section de $\pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow G_k$ se relève en une section de $\pi_1(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U, \bar{x}) & & \\ \downarrow & \swarrow & \\ \pi_1(X, \bar{x}) & \xrightarrow{\quad} & G_k. \end{array}$$

La conjecture 3 est une conséquence de la conjecture 1, comme on peut le voir à partir du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_r \text{IsCl } \sqrt{D/X}(k) & \xrightarrow{s_U} & \mathbf{Hom-ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(U_{\bar{k}}, \bar{x})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(k) & \xrightarrow{s_X} & \mathbf{Hom-ext}_{G_k}(G_k, \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})). \end{array}$$

En effet, le corollaire 18 prouvé dans l'appendice A implique que la flèche verticale de gauche est surjective.

Réciproquement, si la conjecture 3 est vraie, alors la conjecture des sections pour U (resp. pour toute orbifold \mathcal{X} d'espace des modules X) implique la conjecture des sections pour X . On peut se servir de ce fait pour réduire la conjecture 1 à la conjecture 3, et à la conjecture 2 limitée aux orbicourbes hyperboliques d'espace des modules la droite projective. En effet, en partant d'une courbe hyperbolique X , et en fixant un morphisme non constant arbitraire $X \rightarrow \mathbb{P}^1$, il est aisé de construire un morphisme étale $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$, où \mathcal{X} (resp. \mathcal{P}) est une orbicourbe d'espace des modules X (resp. \mathbb{P}^1). Mais on peut alors montrer en utilisant l'existence et l'unicité du relèvement des chemins étales que la conjecture des sections pour \mathcal{P} entraîne la conjecture des sections pour \mathcal{X} (pour ce dernier point, on pourra consulter [24], Chapter 13, pour le cas des schémas).

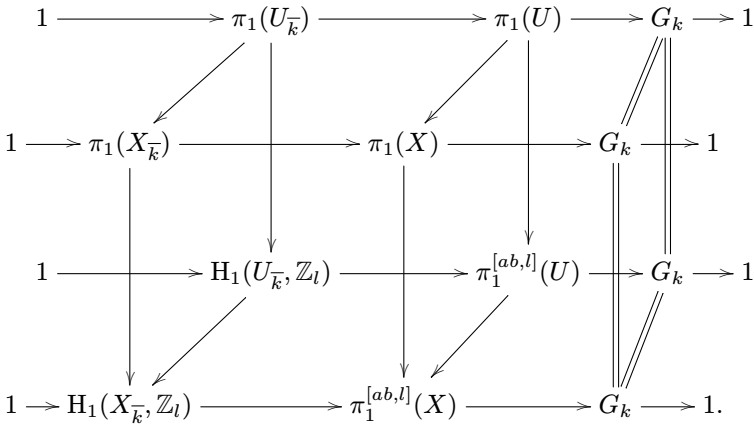


FIGURE 1. Abélianisation de la partie géométrique

3.2. Abélianisation de la partie géométrique. — Pour l premier, on peut considérer le plus grand quotient pro- l -abélien $H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ de $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})$ et pousser la suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

par $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x}) \twoheadrightarrow H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$, et de même pour U (voir figure 1). On peut donc formuler un problème d'épointage des sections l -adiques :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U, \bar{x})^{[ab,l]} & & \\ \downarrow & \swarrow & \\ \pi_1(X, \bar{x})^{[ab,l]} & \xrightarrow{\quad} & G_k. \end{array}$$

REMARQUE 3. — *La conjecture d'épointage n'implique pas une réponse positive au problème d'épointage des sections l -adiques, mais seulement que toute section de $\pi_1^{[ab,l]}(X, \bar{x}) \rightarrow G_k$ venant d'une section profinie de $\pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow G_k$ se relève en une section de $\pi_1^{[ab,l]}(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$. Cette dernière propriété, qui est une conséquence commune de la conjecture d'épointage et d'une réponse positive au problème d'épointage des sections l -adiques, peut se formuler de la façon suivante : toute section profinie $G_k \rightarrow \pi_1(X, \bar{x})$ se relève au quotient intermédiaire dans la suite d'épimorphismes*

$$\pi_1(U, \bar{x}) \twoheadrightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \times_{\pi_1(X, \bar{x})^{[ab,l]}} \pi_1(U, \bar{x})^{[ab,l]} \twoheadrightarrow \pi_1(X, \bar{x}).$$

Nous comptons revenir en détail sur ce quotient intermédiaire dans un travail ultérieur.

3.3. Une condition suffisante d'épointage des sections l -adiques

Si $\pi_1^{[ab,l]}(X, \bar{x}) \rightarrow G_k$ n'admet pas de section, le problème d'épointage ne se pose pas. Dans le cas contraire, il est équivalent à l'existence d'une section pour $\pi_1^{[ab,l]}(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$ et à la surjectivité de $H^1(G_k, H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)) \rightarrow H^1(G_k, H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l))$.

La première condition est complètement comprise : une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une section pour $\pi_1^{[ab,l]}(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$ a été donnée par Harari et Szamuely :

THÉORÈME 5 ([13], Remark 2.4). — *Le morphisme $\pi_1^{[ab,l]}(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$ admet une section si et seulement si la classe de $\mathbf{Pic}_{X,D}^1$ appartient au sous-groupe l -divisible maximal de $H^1(G_k, \mathbf{Pic}_{X,D}^0)$.*

(Ici, $\mathbf{Pic}_{X,D}^0$ désigne la jacobienne généralisée de U , et $\mathbf{Pic}_{X,D}^1$ le torseur universel de degré 1 sous $\mathbf{Pic}_{X,D}^0$. On rappelle que $\mathbf{Pic}_{X,D} = \mathbf{Pic}_{X,D}$, le foncteur de Picard de X_D , pincement de X le long de D au sens de [10]. Le degré sur X_D est défini par image réciproque le long de $X \rightarrow X_D$.)

La deuxième condition est plus mystérieuse. Une condition suffisante à la surjectivité de $H^1(G_k, H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)) \rightarrow H^1(G_k, H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l))$ est l'existence d'une section du morphisme $H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) \twoheadrightarrow H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$, compatible avec l'action du groupe de Galois absolu G_k .

3.4. Traduction en cohomologie. — On note $K = \ker(H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) \twoheadrightarrow H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l))$; c'est un \mathbb{Z}_l -module de type fini muni d'une action continue de G_k . Comme \mathbb{Z}_l -module, K est même libre de rang $r - 1$ où $r = \#|X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}|$, comme il découle du théorème donnant la structure de $\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{x})$ (voir [11], Exposé X, théorème 2.6)(resp. de $\pi_1(U_{\bar{k}}, \bar{x})$ [voir [11], Exposé XIII, corollaire 2.12]). Il est plus confortable d'étudier la suite duale de cohomologie. Précisément, on a d'après [11], Exposé XI, §5, un isomorphisme naturel de \mathbb{Z}_l -module libres de type fini munis d'une action continue de G_k :

$$H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \simeq \text{Hom}(H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l), \mathbb{Z}_l(1))$$

et de même pour U . Le foncteur $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Z}_l(1))$ étant une auto-anti-équivalence de la catégorie des \mathbb{Z}_l -module libres de type fini, qui conserve les suites exactes, l'épimorphisme $H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l) \twoheadrightarrow H_1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ admet une section si et seulement si le monomorphisme $H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \hookrightarrow H^1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))$ admet une rétraction. Le théorème 13 dira exactement quand cette condition se produit.

4. Application d'Abel-Jacobi

4.1. Définition. — On reproduit ici une construction d'Uwe Jannsen (voir [15]). Soit X/k une variété propre et lisse de dimension d , j un entier, $Z^j(X)$ le groupe abélien libre engendré par les cycles de codimension j sur X , $Z^j(X)_0$ le sous-groupe des cycles cohomologues à zéro. On définit un morphisme :

$$cl' : Z^j(X)_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}_l}^1(\mathbb{Z}_l, H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)))$$

de la manière suivante. Soit z un cycle de codimension j , cohomologue à zéro, on note $Z = |z|$ son support, et $U = X \setminus Z$. L'image $cl'(z)$ de z est la classe $[E]$ de l'extension E obtenue à partir de la suite de cohomologie relative par image réciproque comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) & \rightarrow & H^{2j-1}(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) & \rightarrow & H_{Z_{\bar{k}}}^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) \rightarrow H^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) \\ & & \parallel & & \uparrow & & \text{cl}(z) \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathbb{Z}_l & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le premier groupe de la première suite exacte est nul (au moins lorsque Z est lisse, ce qui suffira par la suite) car, par dualité de Poincaré (voir [15], Part II, §6) :

$$H_{Z_{\bar{k}}}^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) \simeq H_{2d-2j+1}(Z_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(d-j)) \simeq H^{2d-2j+1}(Z_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(d-j))^\vee = 0$$

vu que $2d - 2j + 1 > 2 \dim Z$. Le carré de droite commute car z est cohomologue à zéro. Enfin, on aurait pu seulement imposer $|z| \subset Z$, l'extension E est alors indépendante du choix de Z , par functorialité de la suite de cohomologie relative en la paire (X, Z) .

On note $Z_Z^j(X)$ le groupe des cycles de codimension j à support dans Z , $Z_Z^j(X)_0$ le sous-groupe des cycles homologiquement équivalents à zéro, et de manière similaire $H_{Z_{\bar{k}}}^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))_0$ le noyau de $H_{Z_{\bar{k}}}^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) \rightarrow H^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))$. On dispose d'une extension « universelle » :

$$0 \rightarrow H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) \rightarrow H^{2j-1}(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)) \rightarrow H_{Z_{\bar{k}}}^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))_0 \rightarrow 0.$$

Les éléments $cl'(z)$, pour $z \in Z_Z^j(X)_0$, représentent des obstructions à l'existence d'une section. Comme $cl : Z_Z^j(X)_0 \rightarrow H_{Z_{\bar{k}}}^{2j}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))$ passe au quotient par l'équivalence rationnelle, on peut définir cl' sur le sous-groupe du groupe de Chow correspondant :

DÉFINITION 6. — On note encore

$$cl' : CH^j(X)_0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}_l}^1(\mathbb{Z}_l, H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j)))$$

l'application obtenue par passage au quotient, à partir de celle définie ci-dessus.

REMARQUE 4. — Jannsen attribue à Deligne [7] l'idée d'associer une extension à un cycle. Ce dernier considère d'ailleurs plutôt le torseur sous $H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))$ donné par l'image réciproque de $\text{cl}(z)$ dans $H^{2j-1}(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))$. C'est bien sûr un point de vue équivalent vu l'isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_l}^1(\mathbb{Z}_l, H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))) \simeq H_{\text{cont}}^1(G_k, H^{2j-1}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(j))).$$

où H_{cont}^* désigne la cohomologie continue [14].

4.2. Injectivité lorsque $j = 1$: preuve « élémentaire »

THÉORÈME 7 ([15], §9.20). — Soient X une variété propre et lisse sur un corps k de type fini sur \mathbb{Q} , et l un nombre premier. Alors l'application d'Abel-Jacobi :

$$\text{cl}' : \text{CH}^1(X)_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}_l}^1(\mathbb{Z}_l, H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)))$$

est injective.

Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons dans ce paragraphe le début de la preuve donnée par Uwe Jannsen, puis nous la complétons au paragraphe suivant. Pour une preuve de l'injectivité de l'application d'Abel-Jacobi dans le cadre plus général des 1-motifs, on pourra consulter la thèse de Peter Jossen⁽²⁾.

Preuve du théorème 7. — Soit $A = \mathbf{Pic}_{X/k}^0$, et $n \geq 1$ un entier. De la suite de Kummer : $0 \rightarrow A[l^n] \rightarrow A \xrightarrow{\times l^n} A \rightarrow 0$, on tire :

$$0 \rightarrow \frac{A(k)}{l^n} \xrightarrow{\delta} H^1(G_k, A(\bar{k})[l^n]) \rightarrow H^1(G_k, A)[l^n] \rightarrow 0.$$

En passant à la limite projective sur n , il vient :

$$(2) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_n \frac{A(k)}{l^n} \xrightarrow{\delta} \varprojlim_n H^1(G_k, A(\bar{k})[l^n]) \rightarrow T_l(H^1(G_k, A)) \rightarrow 0.$$

En effet $\varprojlim_n^1 \frac{A(k)}{l^n} = 0$, vu que les applications de transition $\frac{A(k)}{l^{n+1}} \rightarrow \frac{A(k)}{l^n}$ sont surjectives, donc le système projectif vérifie la condition de Mittag-Leffler.

Pour analyser le premier terme de (2), on note que, comme d'après le théorème de Mordell-Weil, $A(k)$ est un groupe abélien de type fini, on a $A(k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \simeq \varprojlim_n \frac{A(k)}{l^n}$, et on dispose d'un monomorphisme⁽³⁾ naturel $\text{CH}^1(X)_0 \simeq$

⁽²⁾ Voir <http://www.jossenpeter.ch/PdfDvi/Dissertation.pdf>. Il n'est pas clair pour nous si la proposition 6.2.1 de cette thèse donne une autre version uniquement de la première partie de la preuve, ou bien si elle donne une preuve complète du théorème 7, qui contournerait le lemme 8. Celui-ci nous paraît de toute façon d'un intérêt indépendant.

⁽³⁾ Il ne s'agit pas en général d'un isomorphisme, voir par exemple [22], §2. La suite spectrale de Leray permet de voir que c'en est un si X admet un 0-cycle de degré 1 défini sur k .

$\text{Pic}^0(X) \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^0(k) = A(k)$. En ce qui concerne le second terme, on a, d'après [14], §3, une suite exacte :

$$0 \rightarrow \varprojlim_n^1 A(k)[l^n] \rightarrow H_{\text{cont}}^1(G_k, T_l(A(\bar{k}))) \rightarrow \varprojlim_n H^1(G_k, A(\bar{k})[l^n]) \rightarrow 0.$$

Or, toujours d'après le théorème de Mordell-Weil, $A(k)[l^n]$ est un l -groupe abélien fini, ce qui montre à nouveau que le système projectif vérifie la condition de Mittag-Leffler, et donc $\varprojlim_n^1 A(k)[l^n] = 0$. De plus, on dispose d'une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Pic}_0(X_{\bar{k}})[l^n] \rightarrow \text{Pic}(X_{\bar{k}})[l^n] \rightarrow \text{NS}(X_{\bar{k}})[l^n] \rightarrow 0$$

où $\text{NS}(X_{\bar{k}})$ désigne le groupe de Néron-Séveri de $X_{\bar{k}}$. Comme celui-ci est de type fini, on a, en passant à la limite projective : $T_l(A(\bar{k})) = T_l(\text{Pic}_0(X_{\bar{k}})) \simeq T_l(\text{Pic}(X_{\bar{k}}))$. La théorie de Kummer donne enfin $T_l(\text{Pic}(X_{\bar{k}})) \simeq \varprojlim_n H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n}) = H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))$. On a donc obtenu un monomorphisme :

$$\delta : \text{CH}^1(X)_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \hookrightarrow H_{\text{cont}}^1(G_k, H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)))$$

et le lemme suivant conclut donc la preuve du théorème :

LEMME 8. — *Via l'isomorphisme naturel*

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_l}^1(\mathbb{Z}_l, H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))) \simeq H_{\text{cont}}^1(G_k, H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))),$$

on a $\delta = \text{cl}'$.

Démonstration. — La preuve est reportée à la partie 4.3. □

REMARQUE 5. — *Pour la première partie de la preuve, on pourrait également considérer la suite exacte de systèmes projectifs de faisceaux étales :*

$$0 \rightarrow (A[l^n], l) \rightarrow (A, l) \xrightarrow{l^n} (A, \text{id}) \rightarrow 0.$$

La suite exacte longue en cohomologie continue donne la suite exacte :

$$0 \rightarrow l\text{-Div}(A(k)) \rightarrow A(k) \xrightarrow{\delta} H_{\text{cont}}^1(G_k, T_l(A(\bar{k})))$$

où $l\text{-Div}(A(k))$ est le sous-groupe l -divisible maximal de $A(k)$. Comme $A(k)$ est de type fini, c'est simplement sa torsion première à l , ce qui constitue donc le noyau de δ . Toutefois, la preuve donnée ici fournit un peu mieux, en particulier l'isomorphisme

$$H_{\text{cont}}^1(G_k, T_l(A(\bar{k}))) \simeq \varprojlim_n H^1(G_k, A(\bar{k})[l^n])$$

justifie que pour donner la preuve du lemme 8, on peut se contenter de travailler avec des coefficients finis.

4.3. Preuve du lemme 8

4.3.1. *Un diagramme périodique.* — On doit montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Pic}_{X/k}^0(k) \cong A(k) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{cont}}^1(G_k, A[l^n](\bar{k})) \\
 \uparrow & & \parallel \\
 \text{Pic}^0(X) & & H_{\text{cont}}^1(G_k, \text{Pic}(X_{\bar{k}})[l^n]) \\
 \parallel & & \parallel \\
 Z^1(X)_0 \longrightarrow \text{CH}^1(X)_0 & \xrightarrow{\text{cl}'} & \text{Ext}^1(\mathbb{Z}, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})).
 \end{array}$$

Les extensions en jeu se visualisent bien sur la figure 2. La donnée de z dans $Z^1(X)_0$ définit une classe $\text{cl}(\mathcal{O}(z), 1)$ de \mathbb{G}_m -torseur sur $X_{\bar{k}}$ rigidifié en dehors de $Z_{\bar{k}}$ par l'identité, c'est-à-dire un élément de $H_{Z_{\bar{k}}}^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)$. Cette classe est invariante par l'action de G_k et son image dans $H^2(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})$ est nulle. On en déduit que la composée du morphisme correspondant $\mathbb{Z} \rightarrow H_{Z_{\bar{k}}}^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)$ avec le morphisme $H_{Z_{\bar{k}}}^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{Z_{\bar{k}}}^2(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})$ (resp. avec le morphisme $H_{Z_{\bar{k}}}^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{G}_m)$) donne par image réciproque une extension de \mathbb{Z} par $H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})$ qui par définition est $\text{cl}'(z)$ (resp. $\delta(z)$).

4.3.2. *Dans la catégorie dérivée.* — On note $i : Z \rightarrow X$ l'immersion fermée, $j : U \rightarrow X$ l'immersion ouverte. La suite de cohomologie relative est incarnée par un diagramme de triangles distingués dans $D^+(\widehat{X}_{\text{ét}})$ (voir figure 3) dont tous les carrés commutent sauf celui en haut à droite qui anticommute. Soient $s : X \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme structural, et $G_k\text{-Ab}$ la catégorie des groupes abéliens munis d'une action continue de G_k . L'identification entre $G_k\text{-Ab}$ et faisceaux de groupes abéliens sur $(\text{Spec } k)_{\text{ét}}$, et celle des objets de $G_k\text{-Ab}$ avec les complexes concentrés en degré 0, fournit un diagramme commutatif (voir figure 4). On va voir qu'aussi bien $\text{cl}'(z)$ que $\delta(z)$ sont déterminés par l'élément $\text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, Rs_*\mu_{l^n}[2]) = H^2(X, \mu_{l^n})$ figurant sur le diagramme de la figure 4.

4.3.3. *La filtration de $Rs_*\mu_{l^n}[2]$.* — Pour un complexe de cochaînes C^* , et un entier relatif a , on note $\tau_a C^*$ la filtration croissante canonique⁽⁴⁾ de C^* , définie pour un entier relatif b par :

$$(\tau_a C^*)^b = \begin{cases} C^b & \text{si } b < a, \\ Z^a & \text{si } b = a, \\ 0 & \text{si } b > a. \end{cases}$$

⁽⁴⁾ $\tau_a C^*$ est la « bonne » troncation de C^* , par opposition à la troncation « brutale », voir par exemple [26], 1.2.7, pour le cas dual d'un complexe de chaînes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^1_{Z_k}(X_k, \mu_l^n) = 0 & \rightarrow & H^1(X_k, \mu_l^n) & \rightarrow & H^1(U_k, \mu_l^n) & \rightarrow & H^2_{Z_k}(X_k, \mu_l^n) \rightarrow H^2(X_k, \mu_l^n) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 \rightarrow H^0_{Z_k}(X_k, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^0(X_k, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^0(U_k, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^1_{Z_k}(X_k, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(X_k, \mathbb{G}_m) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 \rightarrow H^0_{Z_k}(X_k, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^0(X_k, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^0(U_k, \mathbb{G}_m) & \rightarrow & H^1_{Z_k}(X_k, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(X_k, \mathbb{G}_m) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 \rightarrow H^0_{Z_k}(X_k, \mu_l^n) & \rightarrow & H^0(X_k, \mu_l^n) & \rightarrow & H^0(U_k, \mu_l^n) & \rightarrow & H^1_{Z_k}(X_k, \mu_l^n) \rightarrow H^1(X_k, \mu_l^n) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & & 0 & & 0 \longrightarrow & H^0_{Z_k}(X_k, \mathbb{G}_m) & \rightarrow H^0(X_k, \mathbb{G}_m)
 \end{array}$$

FIGURE 2. Diagramme périodique de période (3, -3)

$$\begin{array}{ccccccc}
 i_* Ri^! \mu_l^n [1] & \longrightarrow & \mu_l^n [1] & \longrightarrow & Rj_* j^* \mu_l^n [1] & \longrightarrow & i_* Ri^! \mu_l^n [2] \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 i_* Ri^! \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & Rj_* j^* \mathbb{G}_m & \longrightarrow & i_* Ri^! \mathbb{G}_m [1] \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 i_* Ri^! \mathbb{G}_m & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & Rj_* j^* \mathbb{G}_m & \longrightarrow & i_* Ri^! \mathbb{G}_m [1] \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 i_* Ri^! \mu_l^n & \longrightarrow & \mu_l^n & \longrightarrow & Rj_* j^* \mu_l^n & \longrightarrow & i_* Ri^! \mu_l^n [1].
 \end{array}$$

FIGURE 3. Cohomologie relative

On dispose d'un monomorphisme naturel $\tau_a C^* \rightarrow C^*$, on note $q_a C^*$ le complexe quotient. Il existe en outre un morphisme naturel $\tau_a C^* \rightarrow H^a(C^*)[-a]$.

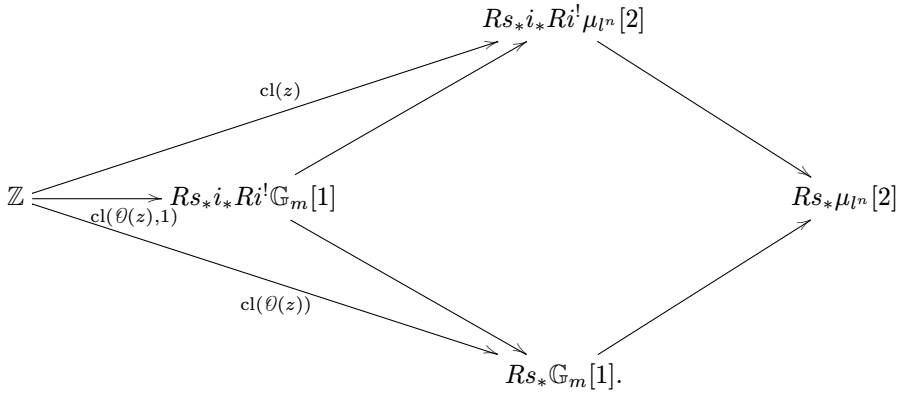


FIGURE 4. Un élément de $\text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, R s_* \mu_{l^n} [2])$

Pour en revenir à $R s_* \mu_{l^n} [2]$, on dispose donc d’une part d’un morphisme $\tau_{-1}(R s_* \mu_{l^n} [2]) \rightarrow H^{-1}(R s_* \mu_{l^n} [2])[1] = H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})[1]$, qui induit un morphisme

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, \tau_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2]) \\ & \rightarrow \text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})[1]) = \text{Ext}_{G_k\text{-Ab}}^1(\mathbb{Z}, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})), \end{aligned}$$

et d’autre part d’une suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & \text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, \tau_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2]) \\ \rightarrow & \text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, R s_* \mu_{l^n} [2]) \rightarrow \text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, q_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2]). \end{aligned}$$

À présent, vu que

$$H^i(q_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 0 \\ H^i(R s_* \mu_{l^n} [2]) & \text{si } i \geq 0 \end{cases}$$

on déduit de la suite spectrale d’hyperext

$$\text{Ext}_{G_k\text{-Ab}}^p(\mathbb{Z}, H^q(q_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2])) \implies \text{Ext}_{D^+(G_k\text{-Ab})}^{p+q}(\mathbb{Z}, q_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2])$$

que le morphisme

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, q_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2]) \\ & \rightarrow \text{Hom}_{G_k\text{-Ab}}(\mathbb{Z}, H^0(q_{-1} R s_* \mu_{l^n} [2])) = H^2(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})^{G_k} \end{aligned}$$

est injectif. La classe $cl(z)$ (resp. $cl(\theta(z))$) détermine un élément (resp. le même élément) de

$$\text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, R s_* \mu_{l^n} [2]) = H^2(X, \mu_{l^n})$$

qui est nul dans $H^2(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})$ (et donc dans $\text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, q_{-1}Rs_*\mu_{l^n}[2])$) car z est homologiquement équivalent à zéro par hypothèse. Cet élément se relève ainsi dans $\text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, \tau_{-1}Rs_*\mu_{l^n}[2])$, et donne donc un élément de $\text{Hom}_{D^+(G_k\text{-Ab})}(\mathbb{Z}, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n})[1]) = \text{Ext}_{G_k\text{-Ab}}^1(\mathbb{Z}, H^1(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n}))$. À l'aide du lemme suivant, et de la discussion du §4.3.1, on montre qu'il s'agit de $\text{cl}'(z)$ (resp. de $\delta(z)$), d'où l'égalité.

LEMME 9. — *Dans $D^+(G_k\text{-Ab})$ supposons donné un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \tau_{-1}C^* & & \\ & & \downarrow x & & \downarrow & & \\ A^* & \longrightarrow & B^* & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & A^*[1] \end{array}$$

où la ligne du bas est un triangle exact tel que le morphisme $H^{-1}(B^*) \rightarrow H^{-1}(C^*)$ soit nul. Alors l'élément de $\text{Ext}_{G_k\text{-Ab}}^1(\mathbb{Z}, H^{-1}(C^*))$ défini par la composition $\mathbb{Z} \rightarrow \tau_{-1}C^* \rightarrow H^{-1}(C^*)[1]$ est la classe de l'extension obtenue par produit fibré à partir du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & \\ & & & & \downarrow \text{H}^0(x) & \searrow 0 & \\ 0 & \longrightarrow & H^{-1}(C^*) & \longrightarrow & H^0(A^*) & \longrightarrow & H^0(B^*) & \longrightarrow & H^0(C^*). \end{array}$$

Démonstration. — La vérification est immédiate. □

5. Conséquence de l'injectivité en dimension 1

Dans cette partie, X désigne une courbe propre, lisse, géométriquement connexe sur un corps k de type fini sur \mathbb{Q} . On fixe de plus $Z \subsetneq X$ un fermé strict, et on note $U = X \setminus Z$ l'ouvert complémentaire. Désormais on prendra $j = 1$. On va donner une condition nécessaire et suffisante sur Z pour que la suite exacte

$$(3) \quad 0 \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H^1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H_{\mathbb{Z}_{\bar{k}}}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_0 \rightarrow 0$$

soit scindée pour presque tout nombre premier l .

REMARQUE 6. — *Comme le note Uwe Jannsen (voir [15], 5.9.2, voir aussi [16]), d'après la théorie des poids en cohomologie étale, $H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))$ (resp. $H_{\mathbb{Z}_{\bar{k}}}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_0$) est une représentation pure de poids -1 (resp. 0). La représentation $H^1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))$ représente un prototype de motif mixte dont on étudie une condition de pureté.*

5.1. Cas d'un diviseur totalement décomposé. — On suppose dans ce paragraphe que $Z \subsetneq X$ est un fermé strict totalement décomposé (i.e $\forall z \in |Z| k(z) = k$). On peut alors utiliser l'additivité des Ext pour montrer que les $\text{cl}'(z)$, pour $z \in Z_Z^1(X)_0$, contrôlent complètement la classe de l'extension (3).

LEMME 10. — *La suite exacte (3) se scinde si et seulement si*

$$\forall z \in Z_Z^1(X)_0 \text{ cl}'(z) = 0 .$$

REMARQUE 7. — *Le groupe $Z_Z^1(X)_0$ est abélien libre de rang $r - 1$, où $r = \#|Z|$, engendré par les éléments du type $z - z'$, où z, z' appartiennent à $|Z|$, la condition dans le lemme 10 est donc équivalente à : $\forall z, z' \in |Z| \text{ cl}'(z' - z) = 0$.*

Démonstration du lemme 10. — On a un isomorphisme (dit de Thom-Gysin, voir [6]) :

$$\mathbb{Z}_l \otimes Z_{Z_k}^1(X_{\bar{k}})_0 \xrightarrow{\text{cl}} H_{Z_k}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_0$$

de $\mathbb{Z}_l[G_k]$ -modules ; par hypothèse sur Z l'action de G_k sur le premier membre $\mathbb{Z}_l \otimes Z_{Z_k}^1(X_{\bar{k}})_0 \simeq \mathbb{Z}_l \otimes Z_Z^1(X)_0$ (et donc sur le deuxième) est triviale. Celui-ci induit à son tour un isomorphisme :

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_l}^1(H_{Z_k}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_0, H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}_l}^1(\mathbb{Z}_l, H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))) \otimes Z_Z^1(X)_0.$$

Pour toute base \mathcal{B} de $Z_Z^1(X)_0$, la classe de l'extension (3) est envoyée sur $\sum_{z \in \mathcal{B}} \text{cl}'(z) \otimes z$. □

COROLLAIRE 11. — *Soit l un nombre premier. La suite exacte*

$$0 \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H^1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H_{Z_k}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_0 \rightarrow 0$$

se scinde si et seulement si pour tout $z, z' \in |Z|$, le cycle $z' - z$ est de torsion première à l dans $\text{CH}^1(X)_0$.

Démonstration. — Cela résulte du lemme 10 et du théorème 7. □

5.2. Caractérisation des fermés donnant naissance à un motif pur

5.2.1. *Restriction de l'action galoisienne*

PROPOSITION 12. — *Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathbb{Z}_l[G_k]$ -modules continus, et k'/k une extension galoisienne finie. Si l est premier à $[k' : k]$, alors la suite exacte se scinde si et seulement si elle se scinde comme suite exacte de $\mathbb{Z}_l[G_{k'}]$ -modules.*

Démonstration. — Le sens direct est évident. Pour la réciproque, on peut soit considérer une section $G_{k'}$ -invariante, et utiliser le procédé de moyenne habituel pour la rendre G_k -invariante (voir [21], chapitre 1, théorème 1) soit invoquer la suite spectrale des Ext :

$$H^p(\text{Gal}(k'/k), \text{Ext}_{G_{k'}}^q(C, A)) \implies \text{Ext}_{G_k}^q(C, A)$$

dont la suite des termes de bas degré s'écrit :

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(k'/k), \text{Hom}_{G_{k'}}(C, A)) \rightarrow \text{Ext}_{G_k}^1(C, A) \rightarrow \text{Ext}_{G_{k'}}^1(C, A)^{\text{Gal}(k'/k)} \rightarrow \dots$$

Or l'hypothèse sur l fait que la catégorie des $\mathbb{Z}_l[\text{Gal}(k'/k)]$ -modules est semi-simple (c'est-à-dire toute suite exacte s'y scinde), d'où l'annulation du premier terme. □

5.2.2. *Points rationnels du foncteur de Picard.* — Soient N un entier naturel plus grand que 1, et $\mathbf{Pic}_{X/k}^N$ la composante connexe du foncteur de Picard représentant les (familles de) classes d'isomorphisme de faisceaux inversibles de degré N . Ce foncteur est représentable, et c'est un torseur *fppf* sur $\text{Spec } k$ de groupe structurel $\mathbf{Pic}_{X/k}^0$ (voir [17], 9.6.21). En fait, comme ici X a des points rationnels sur des extensions finies séparables de k , c'est déjà un torseur pour la topologie étale sur $\text{Spec } k$. On dispose d'un morphisme canonique $X \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^1$ correspondant au faisceau inversible sur $X \times X$ associé au diviseur de Cartier donné par la diagonale $\Delta : X \rightarrow X \times_k X$.

THÉORÈME 13. — *Soient k'/k une extension galoisienne finie telle que pour tout $z \in |Z|$, $k(z) \subset k'$, et l un nombre premier ne divisant par $[k' : k]$. La suite exacte*

$$0 \rightarrow H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H^1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow H_{\mathbb{Z}_{\bar{k}}}^2(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l(1))_0 \rightarrow 0$$

se scinde si et seulement s'il existe un entier naturel $N \geq 1$ premier à l et un point rationnel $p : \text{Spec } k \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ tel que $Z = X \setminus U$ soit inclus dans la fibre de $X \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^1 \xrightarrow{\times N} \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ en p .

Démonstration. — Cela résulte du corollaire 11, de la proposition 12, et du lemme suivant :

LEMME 14. — *Les notations sont celles du théorème 13. Soit $N \geq 1$ un entier naturel. Le fermé $Z = X \setminus U$ est inclus dans une fibre de $X \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^1 \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ en un point rationnel $p : \text{Spec } k \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ si et seulement si l'image de $Z(k')$ dans $\mathbf{Pic}_{X/k}^1(k')$ est incluse dans une orbite sous $\mathbf{Pic}_{X/k}^0[N](k')$.*

Démonstration. — Ceci découle essentiellement du fait que le morphisme $\mathbf{Pic}_{X/k}^1 \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ est un $\mathbf{Pic}_{X/k}^0[N]$ -torseur. Pour le sens direct : notons π ce toseur, il induit un $\mathbf{Pic}_{X/k}^0[N]$ -torseur $\pi^{-1}(p) \rightarrow \mathrm{Spec} k$, et on a donc un isomorphisme naturel :

$$\mathbf{Pic}_{X/k}^0[N] \times_{\mathrm{Spec} k} \pi^{-1}(p) \simeq \pi^{-1}(p) \times_{\mathrm{Spec} k} \pi^{-1}(p)$$

Si k'/k est une extension arbitraire, un couple (z, z') d'éléments de $Z(k')$, donc de $\pi^{-1}(p)(k')$ par hypothèse, définit unique élément α de $\mathbf{Pic}_{X/k}^0[N](k')$ tel que $z' - z = \alpha$. Réciproquement, on dispose d'une application

$$Z(k') \rightarrow X(k') \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^1(k') \rightarrow \frac{\mathbf{Pic}_{X/k}^1(k')}{\mathbf{Pic}_{X/k}^0[N](k')} \rightarrow \frac{\mathbf{Pic}_{X/k}^1(k')}{\mathbf{Pic}_{X/k}^0[N](k')} (k')$$

dont l'image est par hypothèse réduite à un point $p : \mathrm{Spec} k' \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^1 / \mathbf{Pic}_{X/k}^0[N]$. Comme l'application en question est $\mathrm{Gal}(k'/k)$ -équivariante, ceci montre que $k(p) = k$, et on vérifie alors aisément que $Z \rightarrow X \rightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^N$ se factorise par la fibre de π en le k -point induit par p . \square

5.3. Fin de la preuve du théorème 1. — Le théorème 1 est une conséquence de la condition suffisante d'épointage des sections l -adiques donnée §3.3 et du théorème 13.

5.4. Exemples de courbes dont l'homologie est pure

5.4.1. *Période des courbes.* — La condition donnée dans le théorème 13 implique que $[\mathbf{Pic}_{X/k}^N] = 0$ dans $H^1(G_k, \mathbf{Pic}_{X/k}^0)$. D'autre part on a un isomorphisme de $\mathbf{Pic}_{X/k}^0$ -torseurs $\mathbf{Pic}_{X/k}^N \simeq (\mathbf{Pic}_{X/k}^1)^N$. On sait par ailleurs que $[\mathbf{Pic}_{X/k}^1]$ est d'ordre fini dans $H^1(G_k, \mathbf{Pic}_{X/k}^0)$, égal à la période de la courbe (cardinal du conoyau $\mathrm{deg} : \mathrm{CH}_0(X_{\bar{k}})^{G_k} \rightarrow \mathbb{Z}$), voir [9, 22]. La condition du théorème 13 implique que N est un multiple de la période de la courbe.

5.4.2. *Intersection d'une courbe avec sa jacobienne.* — Il est *a priori* difficile de construire des exemples explicites, comme le montre le théorème suivant :

THÉORÈME 15 (Raynaud 1983, conjecture de Manin-Mumford)

Soit k un corps de nombres, X/k une courbe propre lisse de genre $g \geq 2$. On fixe un k -plongement $X \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^0$. Alors l'ensemble $X(\bar{k}) \cap \mathbf{Pic}_{X/k}^0(\bar{k})_{\mathrm{tors}}$ est fini.

Il en résulte que si le k -plongement $X \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{X/k}^0$ est associé à un point $z \in Z(k)$, l'ensemble $Z(\bar{k})$ devra, pour satisfaire à l'hypothèse du théorème 13, être contenu dans l'ensemble fini $X(\bar{k}) \cap \mathbf{Pic}_{X/k}^0(\bar{k})_{\mathrm{tors}}$.

5.4.3. *Courbes modulaires.* — Cependant les courbes modulaires sont des exemples naturels, au vu du théorème :

THÉORÈME 16 (Manin-Drinfeld 1972). — *Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ un sous-groupe de congruence, X_Γ la courbe modulaire associée. La classe d'un diviseur de degré 0 à support dans les pointes est un élément de torsion de $\mathrm{Pic}^0(X_\Gamma)$.*

On peut considérer par exemple $X_1(p)$, avec $p \geq 3$ premier, qui est définie sur \mathbb{Q} . Il y a exactement $\frac{p-1}{2}$ pointes rationnelles et une pointe définie sur $\mathbb{Q}(\zeta_p)^+$, le sous-corps réel maximal du corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Un autre exemple est donné par $X_{split}(p)$, avec $p \geq 3$ premier, qui est également définie sur \mathbb{Q} , et a une seule pointe rationnelle et $\frac{p-1}{2}$ pointes définies sur $\mathbb{Q}(\zeta_p)^+$ (voir [3]).

Dans les deux cas, si l'on prend pour U l'ouvert complémentaire des pointes, le théorème 13 s'applique, et donc $H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ est « pure » pour presque tout nombre premier l . Dans le premier cas au moins, on peut préciser l'ensemble des l convenables, car le cardinal du groupe des classes d'idéaux à support dans les pointes a été calculé pour $X_1(p)$ (voir [25]). Nous ignorons si c'est aussi le cas pour $X_{split}(p)$. La présence de pointes non rationnelles fait que le théorème originel de Jannsen (voir [15]) ne s'applique pas. Toutefois si l'on se restreint aux courbes modulaires, la démarche adoptée ici est un peu artificielle, car elle se fonde sur le théorème de Manin-Drinfeld, dont une démonstration repose précisément sur la pureté de $H_1(U_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$ comme structure de Hodge (voir [8]). Il semble donc fort probable qu'une démonstration directe de la pureté de $H_1(U_{\bar{k}}, \mathbb{Z}_l)$ comme représentation l -adique existe.

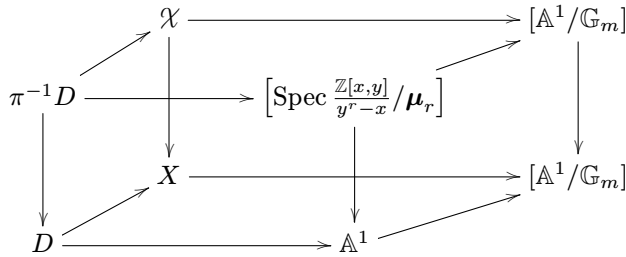
Pour en revenir au problème d'époutage des sections, on peut montrer facilement dans ces deux exemples que $\pi_1^{[ab,l]}(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$ admet une section. On n'a pas besoin du théorème 5, mais la présence d'une pointe rationnelle permet de montrer directement que $\pi_1(U, \bar{x}) \rightarrow G_k$ admet une section (voir par exemple [23], proposition 8). On conclut donc pour ces deux exemples que la seconde condition du théorème 1 est également vérifiée, et donc que la conclusion du théorème est vraie pour ces courbes.

Appendice A

Paquets de points rationnels des champs des racines

PROPOSITION 17. — *Soit X un schéma, D un diviseur de Cartier effectif et réduit, r un entier, $\sqrt[r]{D/X} = \mathcal{X}$ le champ des racines associé, $\pi : \mathcal{X} \rightarrow X$ le morphisme canonique vers l'espace des modules. Alors toute trivialisations du fibré normal $\mathcal{N}_D \simeq \mathcal{O}_D$ induit une bijection entre classes d'isomorphisme de sections de $\pi_D : \pi^{-1}D \rightarrow D$ et $H^1(D, \mu_r)$.*

Démonstration. — Le choix de $\mathcal{N}_D \simeq \mathcal{O}_D$ permet de rendre 2-cartésienne la face du bas du diagramme



où le morphisme $D \rightarrow \mathbb{A}^1$ correspond à $0 \in H^0(D, \mathcal{O}_D)$. On en déduit un isomorphisme de D -champs : $\pi^{-1}D \simeq [\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_D[y]/y^r)/\mu_r]$. Or D étant réduit, toute section se factorise de manière unique par $[\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_D[y]/y^r)/\mu_r]_{\mathrm{red}} \simeq B_D\mu_r$. □

COROLLAIRE 18. — Soit $\mathcal{X} = \sqrt[r]{\mathbf{D}/X}$ une orbicourbe sur un corps k , où X est une courbe sur k , et $(D_i)_{i \in I}$ est une famille finie de diviseurs de Cartier effectifs et réduits sur X . Alors le morphisme $\mathcal{X} \rightarrow X$ induit un épimorphisme sur les (classes d'isomorphismes) de points rationnels. Si $x \in X(k)$ est dans le support de D_i , le choix d'un vecteur tangent en x induit une bijection entre classes d'isomorphismes de $\pi^{-1}(x)(k)$ et k^*/k^{*r} .

Démonstration. — Pour une courbe, le fibré normal s'identifie au fibré tangent, et est trivial. Le corollaire 18 résulte donc immédiatement de la proposition 17 et de la théorie de Kummer. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ABRAMOVICH, T. GRABER & A. VISTOLI – « Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks », *Amer. J. Math.* **130** (2008), p. 1337–1398.
- [2] K. BEHREND & B. NOOHI – « Uniformization of Deligne-Mumford curves », *J. reine angew. Math.* **599** (2006), p. 111–153.
- [3] Y. BILU & P. PARENT – « Serre’s uniformity problem in the split Cartan case », *Ann. of Math.* **173** (2011), p. 569–584.
- [4] N. BORNE – « Sur les représentations du groupe fondamental d’une variété privée d’un diviseur à croisements normaux simples », *Indiana University Mathematics Journal* **58** (2009), p. 137–180.
- [5] N. BORNE & A. VISTOLI – « Parabolic sheaves on logarithmic schemes », *Adv. Math.* **231** (2012), p. 1327–1363.

- [6] P. DELIGNE – « Poids dans la cohomologie des variétés algébriques », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, p. 79–85.
- [7] ———, « Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales », in *Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)*, Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, p. 313–346.
- [8] R. ELKIK – « Le théorème de Manin-Drinfel'd », *Astérisque* **183** (1990), p. 59–67, Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988).
- [9] D. ERIKSSON & V. SCHARASCHKIN – « On the Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on curves », *Acta Arith.* **135** (2008), p. 99–110.
- [10] D. FERRAND – « Conducteur, descente et pincement », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **131** (2003), p. 553–585.
- [11] A. GROTHENDIECK – *Revêtements étales et groupe fondamental*, Springer, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224.
- [12] ———, « Brief an G. Faltings », in *Geometric Galois actions, 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, 1997, p. 49–58.
- [13] D. HARARI & T. SZAMUELY – « Galois sections for abelianized fundamental groups », *Math. Ann.* **344** (2009), p. 779–800.
- [14] U. JANNSEN – « Continuous étale cohomology », *Math. Ann.* **280** (1988), p. 207–245.
- [15] ———, *Mixed motives and algebraic K -theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1400, Springer, 1990.
- [16] ———, « Weights in arithmetic geometry », *Japanese Journal of Mathematics* **5** (2010), p. 73–102.
- [17] S. L. KLEIMAN – « The Picard scheme », in *Fundamental algebraic geometry*, Math. Surveys Monogr., vol. 123, Amer. Math. Soc., 2005, p. 235–321.
- [18] B. NOOHI – « Fundamental groups of algebraic stacks », *J. Inst. Math. Jussieu* **3** (2004), p. 69–103.
- [19] F. POMA – « Étale cohomology of a DM curve-stack with coefficients in \mathbb{G}_m », *Monatsh. Math.* **169** (2013), p. 33–50.
- [20] M. SAÏDI – « The cuspidalisation of sections of arithmetic fundamental groups », *Adv. Math.* **230** (2012), p. 1931–1954.
- [21] J-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1971, 2^e édition, refondue.

- [22] J. STIX – « On the period-index problem in light of the section conjecture », *Amer. J. Math.* **132** (2010), p. 157–180.
- [23] ———, « On cuspidal sections of algebraic fundamental groups », in *Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 63, Math. Soc. Japan, 2012, p. 519–563.
- [24] ———, *Rational points and arithmetic of fundamental groups. Evidence for the section conjecture*, Lecture Notes in Math., vol. 2054, Springer, 2012.
- [25] T. TAKAGI – « Cuspidal class number formula for the modular curves $X_1(p)$ », *J. Algebra* **151** (1992), p. 348–374.
- [26] C. A. WEIBEL – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 38, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [27] V. ZOONEKYND – « Théorème de van Kampen pour les champs algébriques », *Ann. Math. Blaise Pascal* **9** (2002), p. 101–145.

