Sur les représentations du groupe fondamental d'une variété privée d'un diviseur à croisements normaux simples (version préliminaire)

Niels Borne

6 avril 2007

1 Introduction

1.1 Une description alternative

En l'absence de lacets, la recherche d'une description alternative du groupe fondamental étale (défini dans [2] en termes de revêtements) est une question classique, motivée essentiellement par la volonté de déterminer algébriquement des groupes fondamentaux qui ne sont connus que par voie transcendante.

L'étude systématique du lien entre revêtements de, disons, une variété algébrique projective X, et certain fibrés sur X, commence avec Weil ([33]). Celui-ci montre qu'un revêtement galoisien non ramifié de surfaces de Riemann $Y \to X$ permet d'associer à toute représentation V complexe du groupe de Galois G un fibré sur X : on descend le fibré trivial $Y \times V$ sur Y en $E = Y \times V/G$. Weil remarque que cette opération est compatible avec le produit tensoriel, ce qui confère des propriétés remarquables aux fibrés associés : ils sont en particulier *finis*, au sens qu'il existe deux polynômes distincts f, g à coefficients entiers positifs tels que $f(E) \simeq g(E)$. Il voit dans ces fibrés la généralisation des fibrés en droite de torsion, et commence à les caractériser.

Ce travail trouve son aboutissement dans la formulation de Nori ([25]) : la catégorie des fibrés finis sur X est tannakienne, et le groupe de Tannaka associée est le groupe fondamental (profini) de X. Ceci a l'avantage d'être vérifié pour un schéma X propre, réduit, connexe, sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. En caractéristique p, le groupe de Tannaka de la catégorie des fibrés essentiellement finis (le schéma en groupe fondamental de Nori) se surjecte dans le groupe fondamental de X. Toutefois, comme le souligne Nori, cette description algébrique (les fibrés finis ne dépendant, en fait, que de la topologie de Zariski de X) du groupe fondamental n'a que peu d'utilité, puisque les fibrés finis de rang plus grand que 1 semblent très difficiles à construire ex nihilo (i.e. sans utiliser de revêtement).

Partant du problème de la détermination algébrique du groupe fondamental, l'étude des courbes ouvertes (par exemple la droite projective moins trois points) apparaît plus abordable que celle des courbes complètes. En effet Nori montre dans [26] qu'il existe une équivalence de catégorie tannakiennes entre la catégorie des représentations du groupe fondamental de la courbe ouverte et fibrés *paraboliques* (au sens de Seshadri, [28]) finis. Il semble ardu, mais peut-être pas impossible, de construire algébriquement de tels fibrés.

Cependant, Nori ne fait qu'esquisser une preuve de cette équivalence. Cet article répond au souci d'en donner une démonstration complète et indépendante, suffisamment générale pour être valable en toute dimension. Plus précisément, on définit, donné un schéma X propre, normal, connexe sur un corps k, et $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs irréductibles à croisements normaux simples sur X, la catégorie $\mathrm{FPar}(X, \mathbf{D})$ (resp. $\mathrm{EFPar}(X, \mathbf{D})$) des fibrés paraboliques (modérés) finis (resp. essentiellement finis) , et notre résultat principal (théorème 7) s'énonce :

Théorème 1. *Soit $D = \cup_{i\in I} D_i$, et $x \in X(k)$ un point rationnel, $x \notin D$.*

(i) La paire $(\mathrm{EFPar}(X, \mathbf{D}), x^*)$ *est une catégorie tannakienne.*

(ii) Si k est algébriquement clos de caractéristique 0*, tout fibré parabolique essentiellement fini est fini, et le groupe de Tannaka de* $(\mathrm{FPar}(X, \mathbf{D}), x^*)$ *est canoniquement isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(X - D, x)$.*

Le premier point permet de proposer, en caractéristique positive, une définition du schéma en groupe fondamental modéré $\pi^D(X, x)$ comme groupe de Tannaka de la catégorie $(\mathrm{EFPar}(X, \mathbf{D}), x^*)$. Ce schéma en groupe est un hybride du schéma en groupe fondamental de Nori ([25]) et du groupe fondamental modéré de Grothendieck-Murre ([17]).

Un fait marquant est l'omniprésence de certains champs de Deligne-Mumford, les champs des racines, tout au long de cet article. Ils sont construits à partir de la paire $(X, \mathbf{D})$ en ajoutant une structure d'orbifold le long des diviseurs, et sont en ce sens des "schémas tordus". Bien qu'il soient absents de l'énoncé de notre résultat principal, ils en sont absolument au coeur, leur présence éclairant d'un jour nouveau d'anciens problèmes. Par exemple le curieux produit dans la catégorie galoisienne des revêtements modérés de [17] s'avère être un produit fibré usuel sur un tel champ des racines [1].

1.2 Organisation de l'article

La partie 2 est, en un certain sens, la seule partie originale de ce travail, on y définit les fibrés paraboliques sur un schéma X le long d'une famille régulière de diviseurs $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$, à poids rationnels à dénominateurs dans une famille d'entiers fixée $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$. Ceci se fait en deux temps : on définit d'abord (partie 2.1.1) les faisceaux paraboliques, puis (partie 2.2) la notion de liberté locale pour un tel faisceau. On montre le caractère récursif de cette condition (proposition

1. voir lemme 15 *(ii)*

1), qui se simplifie considérablement lorsque la famille est à croisements normaux simples (proposition 2). On rappelle ensuite (partie 2.4.1) la notion de champ des racines associée à la donnée de X, $\mathbf{D}$, et $\mathbf{r}$ et la partie se termine par le théorème 2 qui identifie les fibrés paraboliques aux fibrés usuels sur le champ des racines.

Les deux parties suivantes sont de nature plus technique.

Le résultat essentiel de la partie 3 est la proposition qui donne une interprétation du groupe fondamental modéré comme limite projective de groupes fondamentaux de champs de racines. C'est une conséquence à peu près immédiate du lemme d'Abhyankar.

La partie 4 étudie le lien entre groupe fondamental d'un champ de Deligne-Mumford convenable et fibrés finis. Ce lien s'exprime par une équivalence de catégories tannakiennes entre systèmes locaux k-vectoriels de rang fini sur le champ et fibrés finis donné par un foncteur "à la Riemann-Hilbert", voir le corollaire 5. Le point crucial (théorème 6) est le fait que les fibrés essentiellement finis sur les champs des racines (et un peu plus généralement sur des schémas tordus) propres et réduits sur un corps forment une catégorie tannakienne. La preuve est littéralement la même que celle donnée dans [25] pour les schémas.

Enfin la dernière partie (partie 5) est une partie de synthèse où l'on assemble les différents éléments pour aboutir au théorème 7.

1.3 Origines de ce travail

Cet article est une suite et une conclusion de [8], nous renvoyons également à l'introduction de cet article.

La définition des fibrés paraboliques par rapport à une famille régulière de diviseurs $\mathbf{D}$ dans la partie 2 est inspirée de celle de Maruyama-Yokogawa [23]. Une différence importante avec ces auteurs est l'emploi d'indices multiples (moralement, autant d'indices que de composantes irréductibles régulières de $\mathbf{D}$).

Les champs des racines ont été introduits par Vistoli ([12]) et Cadman ([10]). L'identification des fibrés paraboliques comme étant des fibrés sur les champs des racines a été initiée dans [8] dans la situation à indice unique. On peut trouver certains précurseurs de ce résultat, en particulier dans le travail de Biswas ([7], [6]), mais ces auteurs n'employant que des fibrés paraboliques à indice unique, ces résultats ne nous semblent corrects que dans le cas d'un diviseur régulier.

D'autres sources d'inspiration importantes sont les travaux de Grothendieck-Murre ([17]) sur le groupe fondamental modéré, ainsi que ceux de Noohi ([24]) et Zoonekynd ([34]) sur le groupe fondamental des champs de Deligne-Mumford.

1.4 Remerciements

Ce travail doit beaucoup à Angelo Vistoli, ses contours n'étant apparus nettement qu'à la suite d'une visite à Bologne en janvier 2006. Je l'en remercie chaleureusement. Je tiens également à remercier Alessandro Chiodo, Michel Emsalem, Boas Erez, Madhav Nori, Martin Olsson et Gabriele Vezzosi pour d'intéressantes discussions sur le sujet.

2 Fibrés paraboliques le long d'une famille régulière de diviseurs

Dans cette partie, on notera X un champ de Deligne-Mumford localement noethérien, I un ensemble fini, $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ une famille de diviseurs de Cartier effectifs sur X, $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers $r_i \geq 1$.

2.1 Faisceaux paraboliques

2.1.1 Définition

Soient d'abord $\mathcal{I}, \mathcal{C}$ deux catégories monoïdales, $\mathcal{I}$ étant supposée stricte. Un foncteur monoïdal $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ permet de voir $\mathcal{C}$ comme un $\mathcal{I}$-module (relâché) sur le monoïde $\mathcal{I}$ via l'opération

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (I, C) &\longrightarrow F(I) \otimes C \end{aligned}$$

On considère à présent $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}^I)^{op}$, $\mathcal{C}_1 = (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op}$, où par définition $\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I = \prod_{i\in I} \frac{1}{r_i}\mathbb{Z}$, et $\mathcal{C}_2 = \mathrm{MOD}\, X$, la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur X. $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}_1$ sont vues comme catégories associées aux ensembles ordonnés correspondants, et munies du produit tensoriel induit par l'addition, quant à $\mathcal{C}_2$, elle est munie de sa structure monoïdale canonique. Enfin, on dispose du foncteur d'inclusion $F_1 : \mathcal{I} \to \mathcal{C}_1$ et du foncteur

$$\begin{aligned} F_2 : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{C}_2 \\ \mathbf{l} = (l_i)_{i\in I} &\longrightarrow \mathcal{O}_X(-\mathbf{l}\mathbf{D}) = \mathcal{O}_X(-\textstyle\sum_{i\in I} l_i D_i) \end{aligned}$$

qui permettent de voir $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ comme des $\mathcal{I}$-monoïdes.

Définition 1. *On définit la* catégorie des faisceaux paraboliques *sur X le long de $\mathbf{D}$ à poids multiples de $\frac{1}{\mathbf{r}}$ comme la catégorie des morphismes de modules sur le monoïde $(\mathbb{Z}^I)^{op}$:*

$$\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D}) = \mathrm{Hom}_{(\mathbb{Z}^I)^{op}}((\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op}, \mathrm{MOD}\, X)$$

Plus en détail, un objet de $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ est un couple $(\mathcal{E}_\cdot, j)$, où $\mathcal{E}_\cdot : (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \to \mathrm{MOD}\, X$ est un foncteur (non nécessairement monoïdal !), et j est un isomorphisme naturel (dit *isomorphisme des pseudo-périodes*) :

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{Z}^I)^{op} \times (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "(\mathbb{Z}^I)^{op}\times\mathcal{E}_\cdot"'] & (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[d, "\mathcal{E}_\cdot"] \\ (\mathbb{Z}^I)^{op} \times \mathrm{MOD}\, X \arrow[r, "\mathcal{O}_X(-\cdot\mathbf{D})\otimes\cdot"'] \arrow[ur, Rightarrow, "j"] & \mathrm{MOD}\, X \end{tikzcd}$$

On omettra souvent j pour alléger les notations. Un morphisme $(\mathcal{E}_\cdot, j) \to (\mathcal{E}'_\cdot, j')$ est une transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd} (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[r, bend left, "\mathcal{E}."] \arrow[r, bend right, "\mathcal{E}'_."'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathrm{MOD}\, X \end{tikzcd}$$

compatible avec j et j', en un sens évident.

2.1.2 Opérations élémentaires sur les faisceaux paraboliques

Pour $\mathbf{l} \in \operatorname{obj} \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ et $\mathcal{E}. \in \operatorname{obj} \mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ on dispose du *décalage* défini de la manière usuelle

$$\mathcal{E}.[\mathbf{l}] : (\tfrac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \xrightarrow{+\mathbf{l}} (\tfrac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \xrightarrow{\mathcal{E}.} \mathrm{MOD}\, X$$

l'isomorphisme des pseudo-périodes étant induit par celui de $\mathcal{E}.$ de la manière évidente.

Passons au *produit tensoriel des faisceaux paraboliques* : donnés $\mathcal{E}., \mathcal{E}'_. \in \operatorname{obj} \mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$, on dispose, pour tout $\mathbf{l} \in \operatorname{obj} \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$, de l'objet $\mathcal{E}_{\mathbf{l}} \otimes \mathcal{E}'_.[-\mathbf{l}]$ de $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ obtenu comme produit tensoriel externe de $\mathcal{E}_{\mathbf{l}} \in \operatorname{obj} \mathrm{MOD}\, X$ par $\mathcal{E}'_.[-\mathbf{l}] \in \operatorname{obj} \mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$.

Cette quantité étant dinaturelle en $\mathbf{l}$, on peut définir $(\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'_.).$ comme la cofin [2] du foncteur de variance mixte correspondant dans $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ (qui est cocomplète vu que $\mathrm{MOD}\, X$ l'est) :

$$(\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'_.). = \int^{\mathbf{l} \in \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I} \mathcal{E}_{\mathbf{l}} \otimes \mathcal{E}'_.[-\mathbf{l}]$$

Ce produit tensoriel est l'adjoint à gauche (enrichi) du foncteur **Hom** interne naturel de $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ (dont nous n'aurons pas usage).

Passons au *structures spéciales* : l'inclusion $\mathbb{Z}^I \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I & \longrightarrow & \mathbb{Z}^I \\ \mathbf{l} & \longrightarrow & -[-\mathbf{l}] \end{array}$$

où $[\mathbf{l}] = ([l_i])_{i \in I}$, $[\cdot]$ désignant la partie entière (on espère que cela n'entraînera pas de confusion avec la notation du décalage).

On en déduit que le foncteur d'oubli (ou d'évaluation en zéro)
$\mathrm{Hom}_{(\mathbb{Z}^I)^{op}}((\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op}, \mathrm{MOD}\, X) \to \mathrm{Hom}_{(\mathbb{Z}^I)^{op}}((\mathbb{Z}^I)^{op}, \mathrm{MOD}\, X) \simeq \mathrm{MOD}\, X$
admet un adjoint à gauche, qu'on notera $\mathcal{E} \to \underline{\mathcal{E}}.$, défini par

$$\underline{\mathcal{E}}. = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X([-\cdot]\mathbf{D}) \tag{1}$$

On appellera $\underline{\mathcal{E}}.$ *le faisceau parabolique à structure spéciale* induit par $\mathcal{E}$.

Lorsque $\mathbf{D} = \mathbf{rE}$, on dispose d'un faisceau parabolique particulier, défini comme foncteur par

$$\mathbf{l} \to \mathcal{O}_X(-\mathbf{lrE}) \tag{2}$$

2. pour des détails sur la notion de cofin (coend), voir [22], ou bien [8], Appendice B

l'isomorphisme des pseudo-périodes étant défini de la manière évidente. On le notera simplement $\mathcal{O}_X(- \cdot \mathbf{rE})$.

Enfin il est clair que si $f : X' \to X$ est un morphisme plat, la paire de foncteurs adjoints (f^*, f_*) entre les catégories $\operatorname{MOD} X$ et $\operatorname{MOD} X'$ induit une adjonction similaire entre les catégories $\operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ et $\operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X', f^*\mathbf{D})$.

2.2 Fibrés paraboliques

2.2.1 Facette

On va définir certaines applications dont le but est $\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I = \prod_{i \in I} \frac{1}{r_i}\mathbb{Z}$, vu comme ensemble ordonné.

Définition 2. *Soit $J \subset I$ un sous-ensemble, et $(e_i)_{i \in I}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^I$. On appelle* facette *toute application croissante*

$$F : \{0 < 1\}^J \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$$

qui est affine au sens suivant : il existe une famille d'entiers $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_i)_{i \in J}$ vérifiant $\forall i \in J \;\; 1 \leq \epsilon_i \leq r_i$ telle que :

$$\forall \boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i \in J} \in \{0 < 1\}^J \;\; F(\boldsymbol{\mu}) = F(\mathbf{0}) + \sum_{i \in J} \mu_i \frac{\epsilon_i}{r_i} e_i$$

Par la suite, on identifiera une facette entre deux ensembles ordonnés avec le foncteur entre les catégories correspondantes.

La donnée d'une facette équivaut bien entendu à celle de J, $F(\mathbf{0})$, et de la famille $\boldsymbol{\epsilon}$. Dans le cas particulier où $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{r}_{|J}$, on parlera de la *facette spéciale* associée à J, et on la notera F_J, il s'agit simplement de "l'inclusion" $F_J : \{0 < 1\}^J \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$. Plus généralement, lorsque $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, on notera $F_{\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{\mathbf{r}}J}$ la facette correspondante.

2.2.2 Complexe associé à un faisceau parabolique et une facette

On commencer par préciser les conventions utilisées concernant les *complexes multiples* (essentiellement empruntées à [32]). Soit J un ensemble fini. Un complexe (de chaînes) multiple à valeurs dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est un foncteur $C. = (\mathbb{N}^J)^{op} \to \mathcal{A}$ tel que si on note $(e_i)_{i \in J}$ la base canonique de $\mathbb{N}^J$, alors pour tout multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in J}$, et pour tout $j \in J$, les morphismes $d^j_{\boldsymbol{\alpha}} : C_{\boldsymbol{\alpha}} \to C_{\boldsymbol{\alpha} - e_j}$ vérifient $d^j_{\boldsymbol{\alpha} - e_j} \circ d^j_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$.

A un tel complexe, on associe de la manière son *complexe total* $\operatorname{Tot}(C.)$. de la manière usuelle : on commence par transformer $C.$ en complexe anti-commutatif en fixant un ordre total arbitraire sur l'ensemble J et en modifiant les différentielles de la manière suivante : on pose pour tout multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i \in J}$ et pour tout $j \in J$:

$$\delta^j_{\boldsymbol{\alpha}} = (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} d^j_{\boldsymbol{\alpha}}$$

L'appellation complexe anti-commutatif est justifiée par le fait qu'alors $\delta^j\delta^{j'} = -\delta^{j'}\delta^j$, lorsque ces expressions ont un sens, pour tout j, j' dans J. Le complexe total est alors défini par, pour $n \geq 0$:

$$\mathrm{Tot}(C.)_n = \oplus_{\boldsymbol{\alpha}, |\boldsymbol{\alpha}|=n} C_{\boldsymbol{\alpha}}$$

où $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i\in J} \alpha_i$, et les différentielles étant définies par $\delta_n = \oplus_{\boldsymbol{\alpha},|\boldsymbol{\alpha}|=n} \sum_{i\in J} \delta^i_{\boldsymbol{\alpha}}$. Le fait qu'on parte d'un complexe anti-commutatif assure qu'on obtient bien ainsi un complexe (simple).

Définition 3. *Soient* $\mathcal{E}. \in \mathrm{obj}\,\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ *un faisceau parabolique et* $F : \{0 < 1\}^J \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ *une facette.*

On appelle complexe multiple associé *le prolongement par zéro du foncteur composé* $\mathcal{E}. \circ F^{op}$ *à* $(\mathbb{N}^J)^{op}$*, comme dans le diagramme ci-dessous :*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{N}^J)^{op} \arrow[r, dotted] & \mathrm{MOD}\, X \\
(\{0 < 1\}^J)^{op} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\mathcal{E}.\circ F^{op}"'] &
\end{tikzcd}$$

Par abus, on notera encore ce complexe multiple $\mathcal{E}. \circ F^{op}$*.*

Le sens de ces définitions apparaît dans le cas particulier où $\mathcal{E}. = \underline{\mathcal{O}_X}.$, le faisceau structurel muni de la structure parabolique spéciale, et $F = F_J$, la facette spéciale associée à J.

Lemme 1. *Pour* $i \in I$ *on note* $(\mathcal{O}_X(-D_i) \to \mathcal{O}_X)$ *le complexe de chaînes (simple) concentré en degrés* 1 *et* 0*. Pour tout* $J \subset I$*, il existe un isomorphisme naturel de complexes multiples :*

$$\underline{\mathcal{O}_X}. \circ F_J^{op} \simeq \otimes_{i\in J}(\mathcal{O}_X(-D_i) \to \mathcal{O}_X)$$

Démonstration. Cela résulte simplement de l'expression de $\underline{\mathcal{O}_X}.$ donnée par (1),§2.1.2. □

Cet exemple est crucial pour définir les fibrés paraboliques, puisque ceux-ci seront localement somme directe finie de faisceaux décalés du faisceau structurel, i.e. du type $\underline{\mathcal{O}_X}.[\mathbf{l}]$, pour $\mathbf{l} \in \mathrm{obj}\,\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$, ce qui impose des contraintes fortes aux complexes associés à chaque facette.

De manière similaire, on a :

Lemme 2. *Supposons* $\mathbf{D} = \mathbf{rE}$*. Pour tout* $J \subset I$*, et tout* $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_j)_{j\in J}$ *comme dans §2.2.1, il existe un isomorphisme naturel de complexes multiples :*

$$\mathcal{O}_X(- \cdot \mathbf{rE}) \circ F^{op}_{\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{\mathbf{r}}J} \simeq \otimes_{i\in J}(\mathcal{O}_X(-\epsilon_i E_i) \to \mathcal{O}_X)$$

Démonstration. Conséquence directe de la définition 2. □

2.2.3 Définition des fibrés paraboliques

Lemme 3. *Soit* $\mathcal{E}. \in \operatorname{obj}\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ *un faisceau parabolique, et* $F : \{0 < 1\}^J \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ *une facette. Il existe un morphisme naturel de complexes multiples*

$$\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})} \otimes (\underline{\mathcal{O}_{X}}_{.} \circ F_J^{op}) \to \mathcal{E}. \circ F^{op}$$

qui est un isomorphisme en (multi-)degré $\mathbf{0}$*. Supposons de plus* $\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})}$ *localement libre de rang fini, alors si* $i_J : \cap_{i\in J} D_i \to X$ *désigne l'immersion fermée canonique, il existe une surjection naturelle* $i_{J*} i_J^* \mathcal{E}_{F(\mathbf{0})} \twoheadrightarrow H_0(\mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F^{op}))$*.*

On repousse la preuve après la définition suivante. La deuxième assertion montre que, sous les hypothèses du lemme 3, $H_0(\mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F^{op}))$ est à support dans $\cap_{i\in J} D_i$, ce qui donne un sens[3] à la :

Définition 4. *Soit* $\mathcal{E}. \in \operatorname{obj}\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ *un faisceau parabolique. On dit que c'est un* faisceau parabolique localement libre *ou encore un* fibré parabolique *si pour toute facette* $F : \{0 < 1\}^J \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$*, l'homologie* $H_l(\mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F^{op}))$ *du complexe multiple associé est nulle pour* $l > 0$*, et est un faisceau localement libre de rang fini sur* $\cap_{i\in J} D_i$ *pour* $l = 0$*. On notera* $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ *la catégorie des faisceaux paraboliques localement libres sur* X *le long de* $\mathbf{D}$ *à poids multiples de* $\frac{1}{\mathbf{r}}$*.*

Démonstration du lemme 3. La deuxième assertion est une conséquence de la première, puisque celle-ci entraîne l'existence d'un morphisme de complexes simples $\mathrm{Tot}(\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})} \otimes (\underline{\mathcal{O}_{X}}_{.} \circ F_J^{op})) \to \mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F^{op})$ qui est un isomorphisme en degré 0, d'où un épimorphisme $H_0(\mathrm{Tot}(\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})} \otimes (\underline{\mathcal{O}_{X}}_{.} \circ F_J^{op}))) \twoheadrightarrow H_0(\mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F^{op}))$. L'hypothèse sur $\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})}$ donne alors $H_0(\mathrm{Tot}(\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})} \otimes (\underline{\mathcal{O}_{X}}_{.} \circ F_J^{op}))) \simeq \mathcal{E}_{F(\mathbf{0})} \otimes H_0(\mathrm{Tot}((\underline{\mathcal{O}_{X}}_{.} \circ F_J^{op})))$. Le lemme 1 montre que $\mathrm{Tot}((\underline{\mathcal{O}_{X}}_{.} \circ F_J^{op}))$ est le complexe de Koszul associé à la famille $(D_i)_{i\in J}$, ce qui permet de conclure.

Reste à montrer la première assertion. L'hypothèse que F est une facette montre qu'on a en particulier $\forall \boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i\in J} \in \{0 < 1\}^J \quad F(\boldsymbol{\mu}) \leq F(\mathbf{0}) + F_J(\boldsymbol{\mu})$. Cette inégalité entre applications croissantes peut s'interpréter comme l'existence d'une transformation naturelle $\leq$ entre les foncteurs correspondants :

$$\begin{tikzcd} \{0<1\}^J \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F(\mathbf{0})+F_J"'{name=D}] & \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\leq"] \end{tikzcd}$$

En passant aux catégories opposées et en composant avec $\mathcal{E}.$

$$\begin{tikzcd} (\{0<1\}^J)^{op} \arrow[r, bend left, "F^{op}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "(F(\mathbf{0})+F_J)^{op}"'{name=D}] & (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[r, "\mathcal{E}."] \arrow[from=D, to=U, Rightarrow, "\leq^{op}"'] & \mathrm{MOD}\, X \end{tikzcd}$$

on obtient une transformation naturelle : $\mathcal{E}. \circ \leq^{op} : \mathcal{E}. \circ (F(\mathbf{0}) + F_J)^{op} \to \mathcal{E}. \circ F^{op}$.

3. cette définition dépend *a priori* du choix d'un ordre total sur I, mais la proposition 1 et la remarque 1 qui s'ensuit montrent qu'il n'en est rien, au moins pour une famille régulière de diviseurs (voir §2.3.1) qui est le seul cas que nous considérerons

Le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
(\{0<1\}^J)^{op} \arrow[dr, "(\overline{F_J}^{op}{,}F(\mathbf{0}))"] \arrow[drr, bend left, "(F(\mathbf{0})+F_J)^{op}"] \arrow[ddr, bend right, "(F_J^{op}{,}\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})})"'] & & \\
& (\mathbb{Z}^I)^{op} \times (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "(\mathbb{Z}^I)^{op}\times\mathcal{E}."] & (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[d, "\mathcal{E}."] \\
& (\mathbb{Z}^I)^{op} \times \mathrm{MOD}\, X \arrow[r, "\mathcal{O}_X(-\cdot\mathbf{D})\otimes\cdot"'] \arrow[ur, Rightarrow, "j"] & \mathrm{MOD}\, X
\end{tikzcd}
$$

montre que l'isomorphisme de pseudo-périodes j de $\mathcal{E}.$ permet d'identifier $\mathcal{E}.\circ(F(\mathbf{0})+F_J)^{op}$ avec $\mathcal{E}_{F(\mathbf{0})}\otimes(\underline{\mathcal{O}_X}_{.}\circ F_J^{op})$, ce qui conclut la démonstration du lemme.

$\square$

2.3 Fibrés paraboliques et revêtements

Pour montrer la pertinence de la définition 4, on doit montrer l'existence de fibrés paraboliques non triviaux, i.e. autre que les sommes directes de décalés de fibrés à structure spéciale (bien qu'ils soient tous localement de ce type). La manière la plus directe de produire de tels fibrés paraboliques est d'utiliser des revêtements de Kummer ramifiés le long d'une famille régulière de diviseurs. On commence par préciser ces notions.

2.3.1 Famille régulière de diviseurs

On rappelle le lemme folklorique suivant, ainsi qu'une preuve, repoussée après la définition 5, à laquelle il donne un sens.

Lemme 4. *Soit X un schéma localement noethérien, I un ensemble fini, $\mathbf{D}=(D_i)_{i\in I}$ un ensemble de diviseurs de Cartier effectifs sur X, et pour tout $i\in I$, $s_i:\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X(D_i)$ la section canonique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) En tout point x de X, soit une des sections s_i est inversible, soit $(s_i)_{i\in I}$ est une suite[4] régulière (au sens de Serre),*
- *(ii) la section $(s_i)_{i\in I}:\mathcal{O}_X\to\oplus_{i\in I}\mathcal{O}_X(D_i)$ est régulière (i.e. le complexe de Koszul associé au morphisme dual n'a pas d'homologie en degré supérieur ou égal à 1),*
- *(iii) $\cap_{i\in I}D_i\to X$ est une immersion fermée régulière, et si $\mathcal{I}_I$ est l'idéal engendré par les $(s_i)_{i\in I}$, alors en tout point x de $\cap_{i\in I}D_i$, les $(s_i)_{i\in I}$ forment un système minimal (pour le cardinal) de générateurs de $\mathcal{I}_{I,x}$.*

Définition 5. *On dira que $\mathbf{D}=(D_i)_{i\in I}$ est* une famille régulière de diviseurs *si pour tout sous-ensemble $J\subset I$, la sous-famille $\mathbf{D}_J=(D_i)_{i\in J}$ vérifie les conditions équivalentes du lemme 4.*

4. dans un anneau local noethérien, la régularité d'une suite ne dépend pas de l'ordre de ses éléments, ce qui permet de parler de famille régulière

Démonstration du lemme 4. $(i) \implies (ii)$: ceci résulte du fait que le complexe de Koszul associé soit à un morphisme surjectif, soit à une suite régulière, sont sans homologie en degré plus grand que 1.

$(ii) \implies (iii)$: le fait que $\mathcal{I}_I$ soit régulier résulte directement de la définition ([3], exposé VII, Définition 1.4). De plus en notant $\mathcal{E}_I = \oplus_{i\in I}\mathcal{O}_X(D_i)$, et $i_I : \cap_{i\in I}D_i \to X$ l'immersion fermée canonique, la régularité de $s_I = (s_i)_{i\in I}$ montre que $\mathcal{I}_I/\mathcal{I}_I^2 \simeq i_I^*\mathcal{E}_I^\vee$, donc en un point x de $\cap_{i\in I}D_i$, $\mathcal{I}_{I,x}/\mathcal{I}_{I,x}^2$ est libre de rang $\#I$, par conséquent $\mathcal{I}_{I,x}$ ne saurait être engendré par moins de $\#I$ éléments.

$(iii) \implies (i)$ $\cap_{i\in I}D_i \to X$ est une immersion fermée régulière donc en particulier quasi-régulière ([3], exposé VII, Proposition 1.3). Autrement dit $\mathcal{I}_I/\mathcal{I}_I^2$ est localement libre de rang fini sur $\cap_{i\in I}D_i$ et l'homomorphisme surjectif canonique

$$\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_I}(\mathcal{I}_I/\mathcal{I}_I^2) \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{\mathcal{I}_I}(\mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme. En un point x de $\cap_{i\in I}D_i$, le lemme de Nakayama montre que le rang de $\mathcal{I}_{I,x}/\mathcal{I}_{I,x}^2$ sur $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_{I,x}$ est le nombre minimal de générateurs de $\mathcal{I}_{I,x}$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$, à savoir $\#I$. Donc $(s_i)_{i\in I}$ est une base de $\mathcal{I}_{I,x}/\mathcal{I}_{I,x}^2$ et par conséquent les s_i définissent un isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_{I,x}[(S_i)_{i\in I}] \simeq \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_{I,x}}(\mathcal{I}_{I,x}/\mathcal{I}_{I,x}^2)$, où les S_i sont des indéterminées. On en conclut que l'homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_{I,x}[(S_i)_{i\in I}] \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{\mathcal{I}_{I,x}}(\mathcal{O}_{X,x})$ défini par les $(s_i)_{i\in I}$ est un isomorphisme, autrement dit la famille $(s_i)_{i\in I}$ est quasi-régulière au sens de [15], **0** Définition 15.1.7, donc régulière ([15], **0** Corollaire 15.1.11).

□

Lemme 5. *(i) Toute sous-famille d'une famille régulière l'est également.*

(ii) Si $(l_i)_{i\in I}$ est un ensemble d'entiers $l_i \geq 1$, alors la famille $(D_i)_{i\in I}$ est régulière si et seulement si la famille $(l_iD_i)_{i\in I}$ l'est.

Démonstration. (i) est immédiat.

(ii) résulte, par récurrence, de la caractérisation (i) du lemme 4, puisque qu'un élément est diviseur de zéro (resp. inversible) si et seulement une de ses puissances l'est. □

La notion de famille régulière de diviseurs s'étend aux champs de Deligne-Mumford localement noethériens, et le lemme 4 est encore valide. On a de plus le résultat utile suivant.

Proposition 1. *Soit X un champ de Deligne-Mumford localement noethérien, $\mathbf{D}$ une famille régulière de diviseurs. Alors le faisceau parabolique $\mathcal{E}. \in$ obj $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ est localement libre si et seulement si :*

(i) $\forall \mathbf{l} \in \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}$ le faisceau $\mathcal{E}_{\mathbf{l}}$ est localement libre sur X.

(ii) $\forall i \in I\ \forall l_i < l_i' \leq l_i + 1 \in \frac{1}{r_i}\mathbb{Z}$ $\mathrm{coker}((\mathcal{E}_{l_i'}). \to (\mathcal{E}_{l_i}).)$ est localement libre vu comme objet de $\mathrm{PAR}_{(\frac{1}{r_j})_{j\neq i}}(D_i, (D_j \cap D_i)_{j\neq i})$.

Démonstration. Pour démontrer l'équivalence, on peut supposer que *(i)* est vrai. Soit $J \neq \emptyset$, et $i \in J$. La donnée d'une facette $F : \{0 < 1\}^J \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ équivaut à celle d'un triplet $(\tilde{F}, l_i, l'_i)$, où $\tilde{F} : \{0 < 1\}^{J-i} \to \prod_{j \in J-i} \frac{1}{r_j}\mathbb{Z}$ est une facette, et $l_i < l'_i \leq l_i + 1$ dans $\frac{1}{r_i}\mathbb{Z}$, tels que le diagramme suivant (bi)commute.

$$\begin{tikzcd} \{0<1\}^J \arrow[r, "F"] & \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I \\ \{0<1\}^{J-i} \arrow[u, shift right, "0"'] \arrow[u, shift left, "1"] \arrow[r, "\tilde{F}"] & \prod_{j \in J-i} \frac{1}{r_j}\mathbb{Z} \arrow[u, shift right, "l_i"'] \arrow[u, shift left, "l'_i"] \end{tikzcd}$$

En notant F_0^i et F_1^i les deux foncteurs $\{0 < 1\}^{J-i} \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ correspondants, on dispose d'un morphisme de complexes multiples $1 > 0 : \mathcal{E}. \circ F_1^{i\,op} \to \mathcal{E}. \circ F_0^{i\,op}$ et le fait qu'on suppose *(i)* vrai montre que ce morphisme est injectif. Il en est donc de même pour le morphisme induit $\mathrm{Tot}(1 > 0) : \mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F_1^{i\,op}) \to \mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F_0^{i\,op})$, et on vérifie que $\mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F^{op})$ s'identifie canoniquement au cone $\mathrm{cone}(\mathrm{Tot}(1 > 0))$ de celui-ci. On dispose donc d'un morphisme $\mathrm{Tot}(\mathcal{E}. \circ F^{op}) \to \mathrm{coker}\,\mathrm{Tot}(1 > 0)$ qui est un quasi-isomorphisme ([32] 1.5.8), ce qui permet de conclure.

□

Remarque 1. *En particulier, le fait, pour un faisceau parabolique donné, d'être localement libre, ne dépend pas de l'ordre choisi sur l'ensemble d'indices I.*

2.3.2 Fibrés paraboliques relativement à une famille de diviseurs à croisements normaux simples

Définition 6. *Une famille $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$ de diviseurs de Cartier effectifs sur un schéma localement noethérien X est dite à croisements normaux simples si pour tout point x de $\cup_{i \in I} D_i$ on a :*

(i) l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier,

(ii) si $I_x = \{i \in I / x \in D_i\}$, et s_i est une équation locale de D_i en x, alors $\{s_i, i \in I_x\}$ est une partie d'un système régulier de paramètres.

Remarque 2. *1. C'est une légère adaptation de [17], Definition 1.8.2.*

2. Il revient au même ([17], Lemme 8.1.4) de dire que la famille est à croisements normaux et que chacun des D_i est régulier.

3. Comme un système régulier de paramètres est ([15], Définition 17.1.6) une famille régulière, une famille de diviseurs à croisements normaux simples est en particulier une famille régulière au sens de la définition 5.

Comme cette définition est invariante par un changement de base étale, elle a également un sens pour un champ de Deligne-Mumford. On a de plus :

Proposition 2. *Soit X un champ de Deligne-Mumford localement noethérien, $\mathbf{D}$ une famille de diviseurs à croisements normaux simples. Alors le faisceau parabolique $\mathcal{E}. \in \mathrm{obj}\,\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ est localement libre si et seulement si $\forall \mathbf{l} \in \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}$ le faisceau $\mathcal{E}_{\mathbf{l}}$ est localement libre sur X.*

Démonstration. Comme, pour tout $i \in I$, la famille $(D_j \cap D_i)_{j \neq i}$ est à croisements normaux simples sur D_i (voir [15], preuve de la Proposition 17.1.7), on peut raisonner par récurrence sur $\#I$. On conclut à l'aide de la proposition 1 et du lemme suivant (je remercie Angelo Vistoli pour m'avoir fourni le principe de la preuve) :

Lemme 6. *Soit R un anneau local noethérien régulier, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, $t \in \mathfrak{m}$, $t \notin \mathfrak{m}^2$. Soient de plus M et N deux modules libres de rang fini tel que $tM \subset N \subset M$. Alors M/N est libre comme R/t-module.*

Démonstration. De [15], Corollaire 17.1.8, on déduit que l'anneau local R/t est régulier, et [15], Proposition 16.3.7 montre qu'il est de dimension $\dim R - 1$. La formule d'Auslander-Buchsbaum ([15], Proposition 17.3.4) montre que le résultat à démontrer équivaut à $\operatorname{prof}_{R/t} M/N = \dim R - 1$. Or [15], proposition 16.4.8 montre que $\operatorname{prof}_{R/t} M/N = \operatorname{prof}_R M/N$. De plus, [15], Corollaire 16.4.4 donne pour tout R-module de type fini P : si $k = R/\mathfrak{m}$ est le corps résiduel, $\operatorname{prof}_R P = \inf\{m \geq 0 / \operatorname{Ext}^m_R(k, P) \neq 0\}$. La suite exacte longue de cohomologie associée au foncteur $\operatorname{Hom}_R(k, \cdot)$ et à la suite exacte courte de R-modules $0 \to N \to M \to M/N \to 0$, et une nouvelle application de la formule d'Auslander-Buchsbaum, permettent de conclure.

□

□

2.3.3 Revêtements de Kummer

La définition des revêtements de Kummer adoptée ici est celle de [17], §1 : donné un ensemble fini I, $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ un ensemble d'entiers $r_i \geq 1$, des schémas localement noethériens X et Y, $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in I}$ un ensemble de sections régulières de $\mathcal{O}_X$, un morphisme $p : Y \to X$ est dit *revêtement de Kummer* si Y est muni d'une action du schémas en groupes $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} = \prod_{i \in I} \boldsymbol{\mu}_{r_i}$ tel qu'il existe un X-isomorphisme $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$-équivariant de Y avec

$$\mathbf{Spec}(\mathcal{O}_X[(t_i)_{i \in I}]/(t_i^{r_i} - s_i)_{i \in I})$$

Alors $p : Y \to X$ est l'application naturelle vers le quotient schématique.

Pour $i \in I$, on notera D_i (resp. E_i) le diviseur de Cartier associé à s_i (resp. t_i), et $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$ (resp. $\mathbf{E} = (E_i)_{i \in I}$) la famille correspondante.

Lemme 7. *On suppose que $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$ est une famille régulière de diviseurs sur X. Alors la famille $\mathbf{E} = (E_i)_{i \in I}$ est une famille régulière de diviseurs sur Y.*

Démonstration. Comme p est plat, la famille $p^*\mathbf{D} = (p^*D_i)_{i \in I}$ est régulière, par exemple d'après le lemme 4 (*ii*). Or $(p^*D_i)_{i \in I} = (r_i D_i)_{i \in I}$, avec $r_i \geq 1$, et on peut appliquer le lemme 5 (*ii*). □

2.3.4 Fibrés paraboliques associés à un revêtement de Kummer

Soit $p : Y \to X$ un revêtement de Kummer. On conserve les notations de la partie 2.3.3. On appellera $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$-objet (ou objet $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$-équivariant) d'un certain type sur Y tout objet du même type sur le champ quotient $[Y|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}]$. On notera $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{MOD} Y$ la catégorie des faisceaux $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$-équivariants sur Y, $p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}} : \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{MOD} Y \to \operatorname{MOD} X$ l'image directe le long de $[Y|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}] \to X$, et $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(Y, p^*\mathbf{D})$ la catégorie des $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$-faisceaux paraboliques sur Y le long de $p^*\mathbf{D}$ à poids multiples de $\frac{1}{\mathbf{r}}$ (ici $p^*\mathbf{D} = (p^*D_i)_{i\in I}$ est considérée comme une famille de diviseurs de Cartier effectifs $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$-équivariants sur Y de la manière canonique).

Vu la platitude de $[Y|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}] \to X$ et la fonctorialité de $\operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(Y, p^*\mathbf{D})$ en X (§2.1.2), on dispose d'un foncteur canonique

$$p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}} : \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(Y, p^*\mathbf{D}) \to \operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$$

qu'on peut détailler ainsi : donné un objet $(\mathcal{F}., k)$ de $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(Y, p^*\mathbf{D})$ (k désignant l'isomorphisme des pseudo-périodes), on lui associe $(\mathcal{E}., j)$, où $\mathcal{E}. = p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}} \circ \mathcal{F}.$ (encore noté $p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F}.)$), et j est donné par la 2-composition :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}^I)^{op} \times (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "(\mathbb{Z}^I)^{op}\times\mathcal{F}."'] & (\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I)^{op} \arrow[d, "\mathcal{F}."] \\
(\mathbb{Z}^I)^{op} \times \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{MOD} Y \arrow[r, "\mathcal{O}_Y(-\cdot p^*\mathbf{D})\otimes\cdot"'] \arrow[d, "(\mathbb{Z}^I)^{op}\times p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "k"] & \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{MOD} Y \arrow[d, "p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}"] \\
(\mathbb{Z}^I)^{op} \times \operatorname{MOD} X \arrow[r, "\mathcal{O}_X(-\cdot\mathbf{D})\otimes\cdot"'] \arrow[ur, Rightarrow, "proj"] & \operatorname{MOD} X
\end{tikzcd}$$

la 2-flèche *proj* étant donnée par la formule de projection le long de $[Y|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}] \to X$.

En composant ce foncteur avec le foncteur $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{MOD} Y \to \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(Y, p^*\mathbf{D})$ donné par $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(- \cdot \mathbf{rE})$ (voir §2.1.2) on obtient :

Définition 7. *On notera* $\widehat{\cdot}.$ *le foncteur* $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} \operatorname{MOD} Y \to \operatorname{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ *donné sur les objets par* $\widehat{\mathcal{F}}. = p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(- \cdot \mathbf{rE}))$.

Proposition 3. *On suppose que* $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ *est une famille régulière de diviseurs sur* X*, et que* $\mathcal{F}$ *est un* $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$*-faisceau localement libre de rang fini sur* Y*. Alors le faisceau parabolique sur* X *associé* $\widehat{\mathcal{F}}.$ *est un fibré parabolique sur* X *(au sens de la définition 4).*

Démonstration. Soit $F : \{0 < 1\}^J \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}^I$ une facette correspondant à la donnée de J, $F(\mathbf{0})$, et de la famille $\boldsymbol{\epsilon}$ (voir définition 2). Il s'agit de calculer l'homologie du complexe

$$\operatorname{Tot}(\widehat{\mathcal{F}}.\circ F^{op}) \simeq p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\operatorname{Tot}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(-\cdot\mathbf{rE})\circ F^{op})) \simeq p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F}\otimes\operatorname{Tot}(\mathcal{O}_X(-\cdot\mathbf{rE})\circ F^{op}))$$

vu que le foncteur Tot commute à tout foncteur conservant les sommes directes. Or il est clair d'après la définition 2 que $F = F(\mathbf{0}) + F_{\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{\mathbf{r}}J}$ et donc :

$$\mathcal{O}_X(-\cdot \mathbf{rE}) \circ F^{op} \simeq \mathcal{O}_Y(-\mathbf{r}F(\mathbf{0})\mathbf{E}) \otimes (\mathcal{O}_X(-\cdot \mathbf{rE}) \circ F^{op}_{\frac{\boldsymbol{\epsilon}}{\mathbf{r}}J})$$

Le lemme 2 montre qu'on doit calculer l'homologie du complexe

$$p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(-\mathbf{r}F(\mathbf{0})\mathbf{E}) \otimes \mathrm{Tot}(\otimes_{i\in J}(\mathcal{O}_Y(-\epsilon_i E_i) \to \mathcal{O}_Y)))$$

Le foncteur $p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(-\mathbf{r}F(\mathbf{0})\mathbf{E})) \otimes \cdot)$ étant exact (en effet p est affine donc p_* est exact [[14] 1.3.2], et $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$ est diagonalisable), on trouve donc

$$p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_Y(-\mathbf{r}F(\mathbf{0})\mathbf{E}) \otimes H_l(\mathrm{Tot}(\otimes_{i\in J}(\mathcal{O}_Y(-\epsilon_i E_i) \to \mathcal{O}_Y))))$$

Comme $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ est une famille régulière de diviseurs sur X, il en est de même, d'après le lemme 7, pour $\mathbf{E} = (E_i)_{i\in I}$. La définition 2 d'une facette impose que $\forall i \in J$, $\epsilon_i \geq 1$, et le lemme 5 montre que la famille $\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}_{|J} = (\epsilon_i E_i)_{i\in J}$ est également une famille régulière de diviseurs.

On déduit du lemme 4 *(ii)* que $H_l(\mathrm{Tot}(\otimes_{i\in J}(\mathcal{O}_Y(-\epsilon_i E_i) \to \mathcal{O}_Y)))$ est nul pour $l > 0$, et est isomorphe à $\mathcal{O}_{\cap_{i\in J}\epsilon_i E_i}$ pour $l = 0$. On peut conclure à l'aide du lemme suivant :

Lemme 8. *Pour tout $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$-faisceau $\mathcal{F}$ localement libre de rang fini sur Y, le faisceau $p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\cap_{i\in J}\epsilon_i E_i})$ est localement libre comme $\mathcal{O}_{\cap_{i\in J}D_i}$-module.*

Démonstration. Vu la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \cap_{i\in J}\epsilon_i E_i \arrow[r, "j_J"] \arrow[d, "q"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ \cap_{i\in J}D_i \arrow[r, "i_J"'] & X \end{tikzcd}$$

on a $p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\cap_{i\in J}\epsilon_i E_i}) \simeq p_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}} j_{J*}{j_J}^*\mathcal{F} \simeq i_{J*}q_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}{j_J}^*\mathcal{F}$, et il s'agit donc de vérifier que $q_*^{\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}}{j_J}^*\mathcal{F}$ est localement libre. Comme $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$ est diagonalisable, c'est un facteur direct de $q_*{j_J}^*\mathcal{F}$, et vu que $\mathcal{F}$ localement libre de rang fini sur Y, il suffit de prouver que q est fini et plat. Il est clairement fini comme composé de l'immersion fermée $\cap_{i\in J}\epsilon_i E_i \to p^*(\cap_{i\in J}D_i)$ (on rappelle que pour tout i on a $\epsilon_i \leq r_i$) et de $p^*(\cap_{i\in J}D_i) \to \cap_{i\in J}D_i$ (fini car p l'est). Pour la platitude on peut clairement supposer X affine, soit $X = \operatorname{spec} R$. Mais alors $\cap_{i\in J}\epsilon_i E_i = \operatorname{spec}(\otimes_{i\in J}\frac{R}{s_i}\frac{[t_i]}{t_i^{\epsilon_i}} \otimes_R \otimes_{i\notin J}\frac{R[t_i]}{t_i^{r_i}-s_i})$. Or pour $i \in J$ (resp. $i \notin J$) $t_i^{\epsilon_i}$ (resp. $t_i^{r_i} - s_i$) est unitaire, donc $\frac{R}{s_i}\frac{[t_i]}{t_i^{\epsilon_i}}$ (resp. $\frac{R[t_i]}{t_i^{r_i}-s_i}$) est plat sur $\frac{R}{s_i}$ (resp. sur R), donc $\otimes_{i\in J}\frac{R}{s_i}\frac{[t_i]}{t_i^{\epsilon_i}} \otimes_R \otimes_{i\notin J}\frac{R[t_i]}{t_i^{r_i}-s_i}$ est plat sur $\otimes_{i\in J}\frac{R}{s_i}$, qui est l'anneau définissant $\cap_{i\in J}D_i$.

□

□

2.4 Fibrés paraboliques et champ des racines

Soit X un champ de Deligne-Mumford, qu'on supposera toujours localement noethérien.

2.4.1 Champ des racines

Soit r un entier supérieur ou égal à 1.

Définition 8 ([12],[10]). *(i) Soit un couple $(\mathcal{L}, s)$ constitué d'un faisceau inversible sur X et d'une section de ce faisceau. Soit $\mathcal{U} = [\mathbb{A}^1|\mathbb{G}_m]$ le champ classifiant les faisceaux inversibles muni d'une section. On appelle champ des racines r-ièmes de $(\mathcal{L}, s)$ le champ*

$$\sqrt[r]{(\mathcal{L}, s)/X} = X \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}$$

où le produit fibré est pris par rapport aux morphismes $(\mathcal{L}, s) : X \to \mathcal{U}$, et l'élévation à la puissance r : $\cdot^{\otimes r} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$.

(ii) Soit D un diviseur de Cartier effectif sur X, s_D la section canonique de $\mathcal{O}_X(D)$. On note $\sqrt[r]{D/X}$ le champ $\sqrt[r]{(\mathcal{O}_X(D), s_D)/X}$.

Soit I un ensemble fini, $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ un ensemble d'entiers $r_i \geq 1$.

Définition 9. *1. Soit $(\mathcal{L}, \mathbf{s}) = (\mathcal{L}_i, s_i)_{i\in I}$ un ensemble de faisceaux inversibles sur X muni chacun d'une section. On note $\sqrt[\mathbf{r}]{(\mathcal{L}, \mathbf{s})/X}$ le champ $\times_{i\in I} \sqrt[r_i]{(\mathcal{L}_i, s_i)/X}$.*

2. Soit $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ un ensemble de diviseurs de Cartier effectifs sur X. On note $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ le champ $\times_{i\in I} \sqrt[r_i]{D_i/X}$.

Proposition 4. *Soit $(\mathcal{L}, \mathbf{s}) = (\mathcal{L}_i, s_i)_{i\in I}$ un ensemble de faisceaux inversibles sur X munis de sections. Supposons qu'on dispose sur X de faisceaux inversibles $\mathcal{N}_i$ et d'isomorphismes $\psi_i : \mathcal{N}_i^{\otimes r_i} \simeq \mathcal{L}_i$. Il existe alors un isomorphisme naturel de champs sur X :*

$$\sqrt[\mathbf{r}]{(\mathcal{L}, \mathbf{s})/X} \simeq [\mathbf{Spec}(\frac{\mathrm{Sym}(\oplus_{i\in I}\mathcal{N}_i^\vee)}{(\mathcal{N}_i^{\otimes r_i} \simeq \mathcal{L}_i)_{i\in I}})|\boldsymbol{\mu}_\mathbf{r}]$$

Démonstration. Le cas où $\#I = 1$ est traité dans [10], version 1, Proposition 3.2, (voir aussi [8], théorème 4), et le cas général en résulte immédiatement. □

Corollaire 1. *Soit $\mathbf{s} = (s_i)_{i\in I}$ un ensemble de sections régulières de $\mathcal{O}_X$, $D_i = (s_i)$ les diviseurs de Cartier correspondants. Alors il existe un isomorphisme naturel de champs sur X :*

$$\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \simeq [\mathbf{Spec}(\mathcal{O}_X[(t_i)_{i\in I}]/(t_i^{r_i} - s_i)_{i\in I})|\boldsymbol{\mu}_\mathbf{r}]$$

Démonstration. Découle directement de la proposition 4. □

2.4.2 La correspondance : énoncé

Soit $(\mathcal{L},\mathbf{s}) = (\mathcal{L}_i, s_i)_{i\in I}$ un ensemble de faisceaux inversibles sur X munis de sections. Sur $\sqrt[\mathbf{r}]{(\mathcal{L},\mathbf{s})/X}$, on dispose d'une racine $\mathbf{r}$-ième canonique $(\mathcal{N},\mathbf{t}) = (\mathcal{N}_i, t_i)_{i\in I}$ de $(\mathcal{L},\mathbf{s})$.

On note $\pi : \sqrt[\mathbf{r}]{(\mathcal{L},\mathbf{s})/X} \to X$ le morphisme canonique.

Dans le cas particulier où les couples $(\mathcal{L}_i, s_i)$ sont associés à des diviseurs effectifs D_i sur X (i.e. $(\mathcal{L}_i, s_i) = (\mathcal{O}_X(D_i), s_{D_i})$ pour tout $i \in I$), les relations $\pi^* s_i = t_i^{\otimes r_i}$, et le fait que π est plat, montrent que les $t_i : \mathcal{O}_{\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}} \to \mathcal{N}_i$ sont des monomorphismes (i.e. les t_i sont des sections régulières), si bien que les couples $(\mathcal{N}_i, t_i)$ sont associés à des diviseurs de Cartier effectifs E_i sur $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$.

En imitant la construction du §2.3.4 on obtient un foncteur :

$$\widehat{\cdot} : \qquad \mathrm{MOD}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) \longrightarrow \mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$$

$$\mathcal{F} \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}}_\cdot = \pi_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}}(- \cdot \mathbf{r}\mathbf{E}))$$

Théorème 2. *On suppose que* $\mathbf{D}$ *est une famille régulière de diviseurs sur le champ de Deligne-Mumford* X*. Alors le foncteur* $\widehat{\cdot}$ *induit une équivalence de catégories tensorielles entre* $\mathrm{Vect}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$ *et* $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$.

2.4.3 Bonne définition

Il s'agit de voir que si $\mathcal{F} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{Vect}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$, alors le faisceau parabolique $\widehat{\mathcal{F}}_\cdot$ est localement libre. Comme il s'agit d'une question locale pour la topologie étale sur X, on peut, quitte à prendre un atlas étale, supposer que X est un schéma. Quitte à localiser encore de façon à trivialiser chacun des diviseurs de la famille $\mathbf{D}$, le corollaire 1 montre qu'on peut supposer que $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \to X$ est du type $[Y|\boldsymbol{\mu}_\mathbf{r}] \to X$, où $Y \to X$ est un revêtement de Kummer ramifié le long de $\mathbf{D}$. Mais alors la proposition 3 permet de conclure.

2.4.4 Équivalence réciproque

Soit $\mathcal{E}_\cdot \in \mathrm{obj}\,\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D})$. On pose

$$\widehat{\mathcal{E}_\cdot} = \int^{\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}} \pi^*\mathcal{E}_\cdot \otimes \mathcal{N}^{\otimes \mathbf{r}\cdot}$$

où $\int^{\frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}}$ désigne la cofin (coend), voir [22]. C'est à priori un élément de $\mathrm{MOD}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$, mais on va voir que c'est en fait un faisceau localement libre.

Lemme 9. *On fixe* $i \in I$*. Soient les foncteurs*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{PAR}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X,\mathbf{D}) & & \mathrm{PAR}_{(\frac{1}{r_j})_{j\neq i}}(\sqrt[r_i]{D_i/X}, (\pi_i^* D_j)_{j\neq i}) \\
L_i : \mathcal{E}_\cdot & \longrightarrow & L_i\mathcal{E}_\cdot = \int^{l_i \in \frac{1}{r_i}\mathbb{Z}} \pi_i^*(\mathcal{E}_{l_i})_\cdot \otimes \mathcal{N}_i^{\otimes r_i l_i} \\
R_i\mathcal{F}_\cdot : (l_i \to \pi_{i*}(\mathcal{F}_\cdot \otimes \mathcal{N}_i^{\otimes - l_i r_i})) & \longleftarrow & \mathcal{F}_\cdot : R_i
\end{array}$$

où $\pi_i : \sqrt[r_i]{D_i/X} \to X$ désigne la projection canonique, $\mathcal{N}_i$ la racine r_i-ème canonique de $\mathcal{O}_X(D_i)$ sur $\sqrt[r_i]{D_i/X}$, et $(\mathcal{E}_{l_i}).$ la restriction de $\mathcal{E}.$ via le foncteur $\prod_{j\neq i} \frac{1}{r_j}\mathbb{Z} \to \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}$ induit par l_i.

Ces foncteurs sont adjoints, L_i étant adjoint à gauche et R_i adjoint à droite.

Démonstration. Cela résulte de la définition des cofins. □

Lemme 10. *Le foncteur L_i envoie $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ sur $\mathrm{Par}_{(\frac{1}{r_j})_{j\neq i}}(\sqrt[r_i]{D_i/X}, (\pi_i^* D_j)_{j\neq i})$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $\#I$. On commence par le cas où $\#I = 1$. Le cas où X est un schéma est traité dans [8]. Le cas général s'y ramène grâce au lemme suivant :

Lemme 11. *Soit X un champ de Deligne-Mumford, $\mathcal{E} : K \to \mathrm{Vect}\, X$ un diagramme, $p : X_0 \to X$ un atlas étale. Si $\varinjlim_{k\in K} p^*\mathcal{E}_k$ existe dans $\mathrm{Vect}\, X_0$, alors $\varinjlim_{k\in K} \mathcal{E}_k$ existe dans $\mathrm{Vect}\, X$.*

Démonstration. C'est à peu près direct à partir de la description suivante des objets de $\mathrm{Vect}\, X$: soit $X_1 = X_0 \times_X X_0$, et $s, b : X_1 \rightrightarrows X_0$ le groupoïde correspondant. La catégorie $\mathrm{Vect}\, X$ est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{E}_0, \alpha)$, où $\mathcal{E}_0 \in \mathrm{obj}\,\mathrm{Vect}\, X_0$, et $\alpha : s^*\mathcal{E}_0 \simeq b^*\mathcal{E}_0$ est une donnée de descente, i.e. vérifie la condition de descente : $m^*\alpha = pr_1^*\alpha \circ pr_2^*\alpha$, où $pr_1, pr_2, m : X_1 \times_{X_0} X_1 \to X_1$ désignent respectivement, les projections et la multiplication dans le groupoïde.

□

On revient au cas général ($\#I$ quelconque) : pour montrer que $\int^{l_i\in\frac{1}{r_i}\mathbb{Z}} \pi_i^*(\mathcal{E}_{l_i}).\otimes \mathcal{N}_i^{\otimes r_i l_i}$ est un faisceau parabolique localement libre, le plus simple est d'appliquer la proposition 1. La partie (i) du critère résulte du cas $\#I = 1$. Pour vérifier la partie (ii) de ce critère, on fixe $j \neq i$, et $l'_j < l_j \leq l_j + 1 \in \frac{1}{r_j}\mathbb{Z}$. Il s'agit de voir que

$$\mathrm{coker}(\int^{l_i\in\frac{1}{r_i}\mathbb{Z}} \pi_i^*(\mathcal{E}_{l_i l'_j}).\otimes \mathcal{N}_i^{\otimes r_i l_i} \to \int^{l_i\in\frac{1}{r_i}\mathbb{Z}} \pi_i^*(\mathcal{E}_{l_i l_j}).\otimes \mathcal{N}_i^{\otimes r_i l_i})$$

est un objet de $\mathrm{Par}_{(\frac{1}{r_k})_{k\neq i,j}}(\pi_i^* D_j, (\pi_i^*(D_k \cap D_j))_{k\neq i,j})$. Mais comme le foncteur L_i est adjoint à gauche (lemme 9), donc exact à droite, et $\pi_i^* D_j = \sqrt[r_i]{D_j \cap D_i/D_j}$, cela résulte de l'hypothèse de récurrence.

□

2.4.5 Preuve de l'équivalence

Lemme 12. *Le foncteur R_i envoie $\mathrm{Par}_{(\frac{1}{r_j})_{j\neq i}}(\sqrt[r_i]{D_i/X}, (\pi_i^* D_j)_{j\neq i})$ sur $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$, et est une équivalence réciproque de la restriction de L_i à $\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$.*

Démonstration. On commence par remarquer que si la première assertion est vérifiée, la seconde à un sens, et est vraie : en effet on peut se contenter de vérifier que L_i et R_i sont des isomorphismes après évaluation des variables, et on se ramène donc au cas où $\#I = 1$. C'est de nouveau un problème local pour la topologie étale, et on peut donc se ramener au cas où X est un schéma. Pour ce dernier cas, on renvoie à [8].

On montre l'ensemble des deux assertions par récurrence sur $\#I$. Pour le cas où $\#I = 1$: la première assertion résulte de la partie 2.4.3, la seconde s'ensuit. Pour I quelconque on applique l'hypothèse de récurrence qui permet de dire que $\operatorname{Vect} \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \simeq \operatorname{Par}_{(\frac{1}{r_j})_{j\neq i}}(\sqrt[r_i]{D_i/X}, (\pi_i^* D_j)_{j\neq i})$, et à nouveau la partie 2.4.3 permet de conclure à la validité de la première assertion, et donc de la seconde. □

2.4.6 Preuve du caractère tensoriel

Vu l'expression du produit tensoriel donnée §2.1.2, le fait que l'équivalence soit compatible au produit tensoriel résulte de la formule de Fubini pour les cofins (voir [22], et [8] pour le détail dans le cas où $\#I = 1$).

3 Groupe fondamental modéré comme groupe fondamental champêtre

3.1 Groupe fondamental champêtre

Noohi ([24]) et Zoonekynd ([34]) ont étendu la théorie classique du groupe fondamental profini de [2] du cas d'un schéma à celui d'un champ de Deligne-Mumford. On rappelle brièvement leur définition.

Définition 10 ([2],[24],[34]). *Soit X un champ de Deligne-Mumford. On note $\operatorname{Rev} X$ la 2-sous-catégorie pleine de la 2-catégorie $\operatorname{Champs} X$ des champs sur X dont les objets sont les morphismes $Y \to X$ représentables étales finis. On note $\operatorname{Cat}\operatorname{Rev} X$ la catégorie associée (i.e. la catégorie dont les morphismes sont les classes de 2-isomorphisme de 1-morphismes dans $\operatorname{Rev} X$).*

Théorème 3 ([24] Theorem 4.2, [34] §3). *Si X est un champ de Deligne-Mumford connexe, et $x : \operatorname{spec}\Omega \to X$ un point géométrique, la paire $(\operatorname{Cat}\operatorname{Rev} X, x^*)$ est une catégorie galoisienne au sens de [2].*

Définition 11. *Avec les notations du théorème, on notera $\pi_1(X, x)$ le groupe fondamental de la catégorie galoisienne $(\operatorname{Cat}\operatorname{Rev} X, x^*)$.*

3.2 Groupe fondamental modéré

On rappelle le résultat suivant :

Théorème 4 ([17] Theorem 2.4.2). *Soit X un schéma localement noethérien, normal, connexe, D un diviseur à croisements normaux, et $x : \operatorname{spec}\Omega \to X$*

un point géométrique, $x \notin D$. La catégorie $\mathrm{Rev}^D(X)$ des revêtements de X modérément ramifiés le long de X est une catégorie galoisienne, dont on note $\pi_1^D(X,x)$ le groupe fondamental.

On va se restreindre à étudier le cas d'une famille de diviseurs à croisements normaux simples (définition 6). Le but de ce paragraphe est de démontrer :

Proposition 5. *Avec les hypothèses du théorème 4, si on suppose de plus X défini sur un corps k, et D est la réunion d'une famille $\mathbf{D} = (D_i)_{i\in I}$ de diviseurs irréductibles à croisements normaux simples, alors il existe un isomorphisme naturel :*

$$\pi_1^D(X,x) \simeq \varprojlim_{\mathbf{r}} \pi_1(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}, x)$$

où la limite est prise sur les multi-indices $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ d'entiers non divisibles par la caractéristique p de k.

Dans le reste de ce paragraphe 3, on conservera les hypothèses de la proposition 5. On va montrer que l'on a une équivalence naturelle de catégories galoisiennes [5] :

$$\mathrm{Rev}^D(X) \simeq \varinjlim_{\mathbf{r}} \mathrm{Cat}\,\mathrm{Rev}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$$

La compatibilité de cet isomorphisme aux foncteurs fibres induits par x impliquera bien la proposition 5 [6].

3.3 Le foncteur C

Lemme 13. *Soit $\pi : Y \to X$ dans $\mathrm{obj}\,\mathrm{Rev}^D(X)$ galoisien de groupe G (au sens de [17] 2.4.5), de multi-indice de ramification $\mathbf{r}$. Alors le morphisme naturel de champs $[Y|G] \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Cela résulte, essentiellement, de l'hypothèse que D est à croisements normaux simples, et du lemme d'Abhyankar.

En détail : on précise d'abord la définition du morphisme naturel $[Y|G] \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$. Soit $\mathbf{E} = (E_i)_{i\in I}$ la famille de diviseurs sur Y défini par $\forall i \in I\ E_i = (\pi^* D_i)_{red}$, si bien que $\forall i \in I\ \pi^* D_i = r_i E_i$.

Soit S un schéma, et (f,p) un objet de $[Y|G](S)$, i.e. une paire constituée d'un G-torseur $p : T \to S$ et d'un morphisme G-équivariant $f : T \to Y$. On a les quotients schématiques $S = T/G$ et $X = Y/G$, si bien qu'il existe un unique morphisme $g : S \to X$ tel que $g \circ p = \pi \circ f$. Pour tout $i \in I$, le faisceau $\mathcal{O}_T(f^* E_i)$ définit une racine r_i-ème de D_i sur T, comme ce faisceau est G-équivariant, on peut le descendre canoniquement le long du G-torseur $p : T \to S$, et les racines r_i-ièmes $p_*^G(\mathcal{O}_T(f^* E_i))$ de D_i sur S définissent un objet de $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}(S)$.

5. la notion de 2-limite filtrée de catégories utilisée ici et par la suite est précisée dans l'appendice A

6. Comme $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ admet X pour espace des modules, x définit aussi un point géométrique de ce champ

Pour montrer que ce morphisme $[Y|G] \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ est un isomorphisme, il suffit de le vérifier sur les fibres géométriques, et on peut donc supposer que $X = \operatorname{spec} R$, où R est un anneau local noethérien strictement hensélien. Comme c'est évident en dehors du support de $\mathbf{D}$, on peut supposer de plus R régulier.

On choisit pour tout $i \in I$ une équation locale s_i de D_i. On pose $R' = \frac{R[(T_i)_{i\in I}]}{(T_i^{r_i} - s_i)_{i\in I}}$, où les $(T_i)_{i\in I}$ sont des indéterminées, et $X' = \operatorname{spec} R'$. Le morphisme $X' \to X$ est modérément ramifié ([17] Example 2.2.4). Comme les s_i sont tous dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, R' est un anneau local. Vu que la famille $(D_i)_{i\in I}$ est à croisements normaux simples, R' est même régulier ([17], Proposition 1.8.5).

On a encore $Y = \operatorname{spec} S$, où S est une R-algèbre finie, donc un produit fini d'anneaux locaux strictement henséliens (en effet l'hypothèse de modération impose que les extensions résiduelles sont séparables [[17] Definition 2.1.2], donc ici triviales). On réduit facilement le problème au cas où Y est irréductible. Vu que les r_i sont non nuls résiduellement, on peut choisir des équations t_i des E_i telles que $t_i^{r_i} = s_i$ dans S. Celles-ci définissent un X-morphisme $Y \to X'$.

Soit Y' le produit fibré de Y et X sur X' dans $\operatorname{Rev}^D(X)$, c'est à dire la normalisation du produit fibré schématique $Y \times_X X'$. On a donc $Y = \operatorname{spec} S'$, où S' est la clôture intégrale de R' dans l'extension des anneaux de fractions totaux $R(Y)/R(X)$. Comme celle-ci est finie étale d'après l'hypothèse de modération, le morphisme $Y' \to X'$ est fini. Comme $Y' \to X$ est modéré, toute composante irréductible de Y' domine X, et donc toute composante irréductible de Y' domine X'. On peut donc appliquer le théorème de pureté de Zariski-Nagata ([2], X Théorème 3.1) pour voir que le lieu où $Y' \to X'$ est ramifié est de pure codimension 1. Mais le lemme d'Abhyankar ([2], X Lemme 3.6) montre que ce morphisme n'est pas non plus ramifié en codimension 1. Il est donc étale, et comme X' est strictement local, c'est un revêtement trivial de X'.

Comme $Y' \to Y$ est séparé (car affine), la section définie par le morphisme $Y \to X'$ ci-dessus est une immersion fermée. L'égalité des dimensions, et le fait que Y et Y' sont réduits (car normaux), impliquent que cette section identifie Y à une composante irréductible de Y'. Donc le morphisme $Y \to X'$ construit au départ est en fait un isomorphisme au dessus de X. Le groupe $G = \operatorname{Aut}_X Y$ s'identifie canoniquement à $\operatorname{Aut}_X X' = \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}$, et on conclut grâce au corollaire 1 (ou plutôt, grâce à sa preuve, qui donne une version explicite de l'isomorphisme).

□

Lemme 14. *Soit $Y \to X$ dans un objet de $\operatorname{Rev}^D(X)$, $Z \to X$ un objet galoisien de $\operatorname{Rev}^D(X)$, de groupe G, dominant $Y \to X$, $\mathbf{r}$ les indices de ramification de $Z \to X$, H le groupe de Galois de $Z \to Y$. Le morphisme de champs $[Z|H] \to [Z|G]$ est étale, et composé avec l'isomorphisme canonique $[Z|G] \simeq \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ défini dans la proposition 13 il définit un objet de $\varinjlim_{\mathbf{r}} \operatorname{Cat} \operatorname{Rev}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$, qui est, à isomorphisme près, indépendant du choix de Z.*

Définition 12. *On notera $C(Y \to X)$ l'objet de $\varinjlim_{\mathbf{r}} \operatorname{Cat} \operatorname{Rev}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$ défini dans le lemme 14.*

Il est clair qu'on a en fait défini un foncteur

$$C : \mathrm{Rev}^D(X) \to \varinjlim_{\mathbf{r}} \mathrm{Cat}\,\mathrm{Rev}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$$

3.4 Le foncteur M

Lemme 15. *Soit $\mathbf{r} = (r_i)_{i\in I}$ une famille d'entiers non divisibles par la caractéristique p de k et $T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ un revêtement étale. Soit $N(T)$ la fermeture intégrale de X dans $R(T)/R(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) = R(X)$.*

(i) Il existe un unique morphisme de champs $T \to N(T)$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, dotted] \arrow[d] & N(T) \arrow[d] \\ \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

et ce morphisme est surjectif.

(ii) Le morphisme canonique $N(T) \to X$ est un revêtement modérément ramifié de X le long de D, et le foncteur obtenu

$$\mathrm{Rev}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) \longrightarrow \mathrm{Rev}^D(X)$$

commute au produit fibré.

(iii) Si de plus $T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ est galoisien de groupe G, $N(T) \to X$ l'est également, de multi-indice de ramification $\mathbf{r}'$ divisant $\mathbf{r}$, et le morphisme $N(T) \to [N(T)|G] \simeq \sqrt[\mathbf{r}']{\mathbf{D}/X}$ défini dans le lemme 13 s'inscrit dans un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & N(T) \arrow[d] \\ \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \arrow[r] & \sqrt[\mathbf{r}']{\mathbf{D}/X} \end{tikzcd}$$

Démonstration. *(i)* Pour l'existence et l'unicité du morphisme : soit $T_0 \to T$ un atlas étale, et $s, b : T_1 \rightrightarrows T_0$ le groupoïde correspondant. Il résulte de [17] Proposition 1.8.5 et [2] Exposé I, Corollaire 9.10, que T_1 et T_0 sont normaux. L'affirmation résulte alors de la propriété universelle de la fermeture intégrale ([13] 6.3.9).

Pour montrer la surjectivité, on peut supposer $X = \operatorname{spec} R$, où R est un anneau. On pose $R' = \frac{R[(T_i)_{i\in I}]}{(T_i^{r_i} - s_i)_{i\in I}}$, où les $(T_i)_{i\in I}$ sont des indéterminées, et $X' = \operatorname{spec} R'$ (quitte à renommer I, on peut supposer qu'aucun des s_i n'est inversible). D'après le corollaire 1 il existe un isomorphisme naturel de champs sur X : $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \simeq [X'|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}]$. Posons $T' = X' \times_{[X'|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}]} T$, c'est un atlas étale de T. De plus $T' \to X$ est fini (car $T' \to T$ et $T \to X$ le sont) et $N(T) \to X$ est séparé (car affine), et donc $T' \to N(T)$ est fini, et en particulier entier. Comme ce morphisme est de plus dominant (car $T' \to T$ est surjectif, et $T \to N(T)$ est birationnel), il est surjectif, d'après le théorème de Cohen-Seidenberg.

(ii) $N(T) \to X$ est modérément ramifié le long de D : il faut vérifier les cinq conditions de la Définition 2.2.2 de [17].

1) $N(T) \to X$ est fini : ça résulte de la finitude de la fermeture intégrale d'un anneau noethérien normal dans une extension séparable finie ([9], V, Proposition 18, Corollaire 1).

2) $N(T) \to X$ est étale au dessus de $U = X - D$: posons $V = T \times_{\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}} U$, c'est un revêtement étale de U, et comme U est normal, V s'identifie d'après [16], Corollaire 18.10.12.à la fermeture intégrale de U dans $R(V) = R(T)$, qui n'est autre que $N(T) \times_X U$.

3) Toute composante irréductible de $N(T)$ domine X : les composantes irréductibles de $N(T)$ sont les mêmes que celle de son ouvert dense V, or $V \to U$ étant étale, toute composante irréductible de V domine U.

4) $N(T)$ est normal : clair d'après [13] Proposition 6.3.7, ou simplement d'après la propriété universelle définissant $N(T)$.

5) Pour tout point générique x de D, $N(T)$ est modérément ramifié au dessus de $\mathcal{O}_{X,x}$: c'est également clair d'après (i), qui permet d'appliquer [17] Lemma 2.2.5, vu qu'un revêtement de Kummer est modérément ramifié ([17] Example 2.2.4). On en tire également la propriété sur les indices de ramification du (iii).

Le foncteur obtenu commute au produit fibré : donnés $T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$, $T' \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ deux revêtements étales, on a un morphisme canonique $N(T \times_{\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}} T') \to N(T) \times_X N(T')$ (produit fibré schématique), comme ce morphisme est entier et birationnel, et $N(T \times_{\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}} T')$ est normal, il identifie $N(T \times_{\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}} T')$ à la normalisation de $N(T) \times_X N(T')$, qui par définition est le produit fibré de $N(T)$ et $N(T')$ sur X dans $\mathrm{Rev}_D(X)$.

(iii) La première assertion résulte de la seconde affirmation de (ii). Pour la seconde assertion, il suffit de remarquer que le morphisme naturel $T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X} \times_{\sqrt[\mathbf{r}']{\mathbf{D}/X}} N(T)$ est un morphisme birationnel de revêtements étales de $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$, c'est donc un isomorphisme d'après [16], Corollaire 18.10.12. □

Le lemme 15 permet de poser :

Définition 13. *On définit un foncteur* $M : \varinjlim_{\mathbf{r}} \mathrm{Cat}\,\mathrm{Rev}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) \to \mathrm{Rev}^D(X)$ *sur les objets en posant, pour une famille* $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ *d'entiers non divisibles par la caractéristique* p *de* k : $M(T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) = N(T) \to X$.

3.5 Conclusion

Preuve de la proposition 5. Il suffit de montrer que le foncteur C est une équivalence.

Le fait qu'un revêtement modéré est par définition normal permet de définir une transformation naturelle $1 \to MC$, et la propriété universelle de la normalisation montre que c'est un isomorphisme.

Le lemme 15 *(ii)* permet à son tour de définir une transformation naturelle $(T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) \to CM(T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$ dans $\varinjlim_{\mathbf{r}} \operatorname{Cat}\operatorname{Rev}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X})$, et le point *(iii)* montre que c'est un isomorphisme pour $T \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ galoisien, et on en déduit que c'est vrai pour tout objet. Donc C et M sont des équivalences de catégories réciproques.

$\square$

4 Faisceaux localement constants et fibrés finis sur un champ de Deligne-Mumford

Dans cette partie, on fixe à nouveau un champ de Deligne-Mumford localement noethérien X.

4.1 Topologies

La définition suivante est une adaptation [7] de [34], Lemme 1.2.

Définition 14. *On définit le* site étale X_{et} *(resp. le site étale fini X_{etf}) du champ X comme le site dont la catégorie sous-jacente a pour objets les morphismes représentables étales $f : T \to X$ d'un champ de Deligne-Mumford vers X, a pour flèches les classes d'isomorphismes de couples (ϕ, α)*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & T' \arrow[dl, "f'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

où ϕ est un morphisme représentable, α un 2-isomorphisme, et dont les recouvrements sont les familles épimorphiques (resp. les familles épimorphiques $(T_i \to T)_{i \in I}$ constituée de morphismes finis*).*

On parlera aussi de topologie étale pour X_{et}, et de topologie étale finie globale pour X_{etf}.

Remarque 3 ([34] Lemme 1.2)**.** *On obtient une topologie équivalente à X_{et} si dans la définition des objets, on impose à T d'être un schéma.*

4.2 Systèmes locaux ensemblistes et groupe fondamental

Zoonekynd ([34]) a remarqué que l'on pouvait interpréter la définition 11 comme un cas particulier du groupe fondamental d'un topos donnée par Leroy ([20]).

7. je remercie l'auteur pour avoir fourni le fichier source de son texte, me permettant ainsi de reproduire les diagrammes

4.2.1 Systèmes locaux ensemblistes

Définition 15 ([20],[34]). *Donné un topos $\mathcal{T}$, on définit la sous-catégorie* $\mathrm{LC}(\mathcal{T})$ *(resp.* $\mathrm{LCF}(\mathcal{T})$*) comme celle des objets localement constants (resp. localement constants finis) et* $\mathrm{SLC}(\mathcal{T})$ *(resp.* $\mathrm{SLCF}(\mathcal{T})$*) comme celle des unions disjointes d'objets de* $\mathrm{LC}(\mathcal{T})$ *(resp. de* $\mathrm{LCF}(\mathcal{T})$*).*

$\mathrm{SLC}(\mathcal{T})$ (resp. $\mathrm{SLCF}(\mathcal{T})$) est un topos galoisien (resp. un topos galoisien fini). Si on suppose $\mathcal{T}$ connexe, et que l'on fixe un point géométrique x de $\mathcal{T}$, on associe canoniquement à cette catégorie un progroupe strict $\pi_1(\mathcal{T}, x)$ (resp. un groupe profini $\hat{\pi_1}(\mathcal{T}, x)$), vérifiant $\mathrm{SLC}(\mathcal{T}) \simeq \pi_1(\mathcal{T}, x) - \mathrm{Ens}$ (resp. $\mathrm{SLCF}(\mathcal{T}) \simeq \hat{\pi_1}(\mathcal{T}, x) - \mathrm{Ens}$), les ensembles étant munis d'action continues des pro-groupes considérés. De plus $(\mathrm{LCF}(\mathcal{T}), x^*)$ est une catégorie galoisienne dont le groupe fondamental s'identifie à $\hat{\pi_1}(\mathcal{T}, x) - \mathrm{Ens}$.

4.2.2 Systèmes locaux ensemblistes et revêtements

On dispose d'un foncteur naturel $\mathrm{Cat\,Rev}\, X \to \mathrm{LCF}(\widetilde{X_{et}})$ donné sur les objets par $(Y \to X) \to \mathrm{Hom}_X(\cdot, Y)$, où $\mathrm{Hom}_X(\cdot, Y)$ est donné comme foncteur sur les objets par $(T \to X) \to \mathrm{Hom}_T(T, T \times_Y X)$. Pour voir que cela définit bien un préfaisceau d'ensembles, on peut, en utilisant la remarque 3, supposer que T est un schéma, mais ça résulte alors du fait que $Y \to X$ est représentable, donc que $T \times_Y X$ est également un schéma. Le fait que $\mathrm{Hom}_X(\cdot, Y)$ est effectivement un faisceau sur X_{et} découle immédiatement du fait que c'est vrai lorsque X est un schéma ([4], VII.2, [30]).

On dispose également d'un foncteur naturel dans la direction opposée $\mathrm{LCF}(\widetilde{X_{et}}) \to \mathrm{Cat\,Rev}\, X$. En effet, soit $p : X_0 \to X$ un atlas étale, $X_1 = X_0 \times_X X_0$, et $s, b : X_1 \rightrightarrows X_0$ le groupoïde correspondant. Soit $\mathbf{E} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{LCF}(\widetilde{X_{et}})$, on peut l'interpréter ([30], Example 4.11) comme un faisceau localement constant fini équivariant sur X_0, c'est à dire un couple $(\mathbf{F}, \psi)$, où $\mathbf{F} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{LCF}(\widetilde{X_{0et}})$, et $\phi : s^*\mathbf{F} \to b^*\mathbf{F}$ est un isomorphisme vérifiant la condition de cocycle habituelle. L'équivalence de catégories usuelle $\mathrm{LCF}(\widetilde{X_{iet}}) \simeq \mathrm{Rev}\, X_i$ pour $i \in \{0, 1\}$, permet d'interpréter cette donnée comme un revêtement étale $Y_0 \to X_0$, muni d'un isomorphisme $\phi : X_{1 \searrow s} \times_{X_0} Y_0 \simeq X_{1 \searrow b} \times_{X_0} Y_0$. En posant $Y_1 = X_{1 \searrow s} \times_{X_0} Y_0$, on obtient un nouveau groupoïde $(pr_2, pr_2 \circ \phi : Y_1 \rightrightarrows Y_0)$ et l'on obtient ainsi un champ $Y = [Y_1 \rightrightarrows Y_0]$ et même en fait un objet de $\mathrm{Cat\,Rev}\, X$.

Théorème 5 ([34], Théorème 3.1). *Les foncteurs ci-dessus définissent des équivalence de catégories réciproques* $\mathrm{Cat\,Rev}\, X \simeq \mathrm{LCF}(\widetilde{X_{et}})$*.*

Corollaire 2. *Si X est un champ de Deligne-Mumford connexe, et $x : \mathrm{spec}\, \Omega \to X$ un point géométrique, on a un isomorphisme naturel*

$$\hat{\pi_1}(\widetilde{X_{et}}, x) \simeq \pi_1(X, x)$$

Remarque 4. *$\pi_1(\widetilde{X_{et}}, x)$ porte le nom de groupe fondamental élargi de X (voir [1] X 7.6 pour le cas d'un schéma).*

4.2.3 Interprétation à l'aide de la topologie étale finie globale

Proposition 6. *Soit X champ de Deligne-Mumford connexe. Le foncteur* $\mathrm{SLC}(\widetilde{X_{etf}}) \to \mathrm{SLC}(\widetilde{X_{et}})$ *induit un isomorphisme de* $\mathrm{SLC}(\widetilde{X_{etf}})$ *sur* $\mathrm{SLCF}(\widetilde{X_{et}})$. *En particulier, si x est un point géométrique, on a un isomorphisme naturel* $\hat{\pi_1}(\widetilde{X_{et}}, x) \simeq \pi_1(\widetilde{X_{etf}}, x)$.

Démonstration. Le morphisme de sites $f : X_{etf} \to X_{et}$ induit un morphisme de topos $(f^*, f_*) : \widetilde{X_{et}} \to \widetilde{X_{etf}}$ dont l'adjoint à gauche f^* induit un foncteur fidèlement plein $\mathrm{SLC}(\widetilde{X_{etf}}) \to \mathrm{SLC}(\widetilde{X_{et}})$, et dont on va montrer que l'image essentielle est $\mathrm{SLCF}(\widetilde{X_{et}})$. Via l'équivalence $\mathrm{SLC}(\mathcal{T}) \simeq \pi_1(\mathcal{T}, x) - \mathrm{Ens}$, ce foncteur s'interprète comme la restriction le long du morphisme $\pi_1(\widetilde{X_{et}}, x) \to \pi_1(\widetilde{X_{etf}}, x)$.

Soit d'abord $\mathbf{E} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}})$. Il existe une famille couvrante $(T_i \to X)_{i \in I}$ constituée de morphismes représentables étales finis telle que pour tout $i \in I$, $\mathbf{E}_{|T_i}$ soit constant. L'image de $T_i \to X$ est ouverte car le morphisme est étale, et fermé car il est fini, c'est donc $\emptyset$ ou X. On peut donc se ramener à une famille couvrante à un élément $T \to X$, revêtement qu'on peut supposer de plus galoisien. Soit G son groupe de Galois. Alors $\mathbf{E}$ correspond (via l'équivalence $\pi_1(\widetilde{X_{etf}}, x) - \mathrm{Ens} \simeq \mathrm{SLC}(\widetilde{X_{etf}})$) à un G-ensemble E, qui se décompose en $E = \coprod_{j \in J} E_j$, ses orbites sous G. Chaque ensemble E_j est fini car G l'est, donc correspond (via l'équivalence $\pi_1(\widetilde{X_{et}}, x) - \mathrm{Ens} \simeq \mathrm{SLC}(\widetilde{X_{et}})$) à un $\mathbf{E}_j \in \mathrm{obj}\,\mathrm{LCF}(\widetilde{X_{et}})$. Donc $\mathbf{E} = \coprod_{j \in J} \mathbf{E}_j$ s'envoie sur un objet de $\mathrm{SLCF}(\widetilde{X_{et}})$.

Réciproquement si $\mathbf{E} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{LCF}(\widetilde{X_{et}})$, alors le théorème 5 montre que $\mathbf{E}$ définit un revêtement $Y \to X$, dont une clôture galoisienne trivialise $\mathbf{E}$, donc $\mathbf{E}$ vient bien d'un objet de $\mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}})$.

□

Corollaire 3. *Si X est un champ de Deligne-Mumford connexe, et $x : \mathrm{spec}\,\Omega \to X$ un point géométrique, on a un isomorphisme naturel*

$$\pi_1(\widetilde{X_{etf}}, x) \simeq \pi_1(X, x)$$

4.3 La catégorie tannakienne des systèmes locaux de k-vectoriels

Définition 16 ([27], chapitre VI, 1.1.2)**.** *Donné un topos $\mathcal{T}$ connexe localement connexe, et un corps k, on définit la catégorie* $\mathrm{LC}(\mathcal{T}, k)$ *des systèmes locaux de k-vectoriels de rang fini.*

Si on choisit de plus un point géométrique x, c'est une catégorie tannakienne. Son groupe de Tannaka est alors l'enveloppe k-algébrique du progroupe strict $\pi_1(\mathcal{T}, x)$, au sens suivant.

Proposition 7 ([27], chapitre VI, 1.1.2.1)**.** *Si* $\pi_1(\mathcal{T}, x) = (G_i)_{i \in I}$ *et H_i est l'enveloppe k-algébrique de G_i, alors le groupe de Tannaka de* $(\mathrm{LC}(\mathcal{T}, k), x^*)$ *est canoniquement isomorphe à* $\varprojlim_{i \in I} H_i$.

On déduit du corollaire 3 et de la proposition 7 :

Corollaire 4. *Soit X champ de Deligne-Mumford connexe, et x un point géométrique. Le groupe de Tannaka de $(\mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}}, k), x^*)$ est canoniquement isomorphe au groupe fondamental profini $\pi_1(X, x)$.*

Remarque 5.
1. *Il vaudrait mieux ici parler du k-groupe proconstant associé à $\pi_1(X, x)$.*
2. *Le groupe de Tannaka de $(\mathrm{LC}(\widetilde{X_{et}}, k), x^*)$ est, d'après ce qui précède, isomorphe l'enveloppe k-algébrique du groupe fondamental élargi de X.*

Lemme 16. *Soit X champ de Deligne-Mumford connexe. Si $\mathbf{V} \in \operatorname{obj} \mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}}, k)$, alors il existe un revêtement $Y \to X$ de X trivialisant $\mathbf{V}$.*

Démonstration. C'est immédiat à partir du corollaire 4. □

4.4 Foncteur à la Riemann-Hilbert

4.4.1 Définition

Donné un champ de Deligne-Mumford X, on peut définir la catégorie $\operatorname{Vect} X$ des fibrés vectoriels sur X comme la catégorie $[X, \operatorname{Vect}]$ des morphismes de champs de X vers le champ Vect des fibrés vectoriels, parfois appelés représentations du champ X, c'est le point de vue que l'on a adopté jusqu'à présent.

La théorie de la descente des fibrés vectoriels (et plus généralement des faisceaux quasi-cohérents [2]) fournit un point de vue alternatif, en effet les faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{F}$ sur X_{et}, tels qu'il existe un atlas étale $X' \to X$, tel que $\mathcal{F}_{|X'}$ est libre, forment une catégorie équivalente ([19], chapitre 13). On utilisera librement cette équivalence par la suite. La définition suivante est inspirée de [27] VI 1.2.4.

Définition 17. *Soit X un champ de Deligne-Mumford localement noethérien sur un corps k. On définit le foncteur à la Riemann-Hilbert*

$$\mathrm{RH} : \mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}}, k) \to \operatorname{Vect} X$$

comme le foncteur composé du foncteur canonique $\mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}}, k) \to \mathrm{LC}(\widetilde{X_{et}}, k)$ et du foncteur $\mathrm{LC}(\widetilde{X_{et}}, k) \to \operatorname{Vect} X$ donné sur les objets par $\mathbf{V} \to \mathcal{O}_X \otimes_k \mathbf{V}$.

4.4.2 Propriétés du foncteur RH

Proposition 8. *Soit X un champ de Deligne-Mumford localement noethérien sur un corps k.*

1. *Le foncteur* RH *est fidèle.*
2. *Si X est de plus complet, réduit, et k est algébriquement clos, il est fidèlement plein.*

Démonstration. Pour $\mathbf{V} \in \operatorname{obj} \mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}}, k)$, on note $\phi_{X,\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathcal{O}_X \otimes_k \mathbf{V}$ le morphisme de faisceaux sur X_{etf} défini à partir du morphisme canonique $\mathbf{k} \to \mathcal{O}_X$. Quitte à remplacer $\mathbf{V}$ par $\mathbf{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, il suffit de voir :

1. $H^0(X, \phi_{X,\mathbf{V}})$ est injectif.
2. Si X est complet et réduit sur k algébriquement clos, $H^0(X, \phi_{X,\mathbf{V}})$ est bijectif.

Le premier point est évident car $\mathbf{k} \to \mathcal{O}_X$ est injectif, et les foncteurs $\cdot \otimes_k \mathbf{V}$ et $H^0(X, \cdot)$ sont exacts à gauche.

Pour le second point, X étant localement noethérien (ce qui assure que les composantes connexes sont ouvertes), on peut supposer X connexe. Le lemme 16 donne l'existence d'un revêtement $\pi : Y \to X$ trivialisant $\mathbf{V}$. On peut supposer π galoisien de groupe G.

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X,\mathbf{V}) \arrow[r, "\pi^{-1}"] \arrow[d, "H^0(X,\phi_{X,\mathbf{V}})"] & H^0(Y,\pi^{-1}\mathbf{V}) \arrow[r, shift left, "pr_1^{-1}"] \arrow[r, shift right, "pr_2^{-1}"'] \arrow[d, "H^0(Y,\phi_{Y,\pi^{-1}\mathbf{V}})"] & H^0(Y \times_X Y, p^{-1}\mathbf{V}) \arrow[d, "H^0(Y\times_X Y,\phi_{Y,p^{-1}\mathbf{V}})"] \\
0 \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{O}_X \otimes_k \mathbf{V}) \arrow[r, "\pi^*"] & H^0(Y,\mathcal{O}_Y \otimes_k \pi^{-1}\mathbf{V}) \arrow[r, shift left, "pr_1^*"] \arrow[r, shift right, "pr_2^*"'] & H^0(Y \times_X Y, \mathcal{O}_{Y\times_X Y} \otimes_k p^{-1}\mathbf{V})
\end{tikzcd}$$

où p désigne le morphisme canonique $p : Y \times_X Y \to X$.

Y étant encore propre (car fini sur X) et réduit ([2] I Proposition 9.2) on s'est donc ramené au cas où $\mathbf{V}$ est trivial. On peut à nouveau supposer X connexe, et donc $\mathbf{V} = s_X^{-1} V$, où $s_X : X \to \operatorname{spec} k$ est le morphisme structurel, et V un k-vectoriel de rang fini. On est alors immédiatement ramené à $V = k$, et il s'agit de voir que le morphisme naturel $k \to H^0(X, \mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme, mais ça résulte du fait que X est propre, réduit, connexe, et k algébriquement clos.

□

4.5 Fibrés finis

Définition 18. *On appellera* schéma tordu *un champ de Deligne-Mumford X admettant pour espace des modules un schéma M, tel qu'il existe un ouvert dense U de M, tel que $X \to M$ soit un isomorphisme en restriction à U.*

On adapte les définitions de [25], [26] au cas d'un schéma tordu X modéré (au sens de [5], définition 2.3.2) réduit sur un corps k, dont l'espace des modules M est propre et connexe sur k.

Définition 19 ([25], [26])**.** *Un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur X est dit* fini *s'il existe deux polynômes distincts P, Q à coefficients entiers positifs tels que $P(\mathcal{E}) \simeq Q(\mathcal{E})$.*

Pour identifier l'image essentielle du foncteur RH, on va suivre la stratégie de Nori, qui consiste à plonger la catégorie des fibrés finis dans la catégorie abélienne des fibrés semi-stables sur X.

Définition 20. *Une* orbicourbe *dans X est un morphisme birationnel sur son image $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/C} \to X$, où C est une courbe projective, connexe, et lisse sur k, $\mathbf{D} = (D_i)_{i \in I}$ un ensemble de diviseurs de Cartier effectifs réduits sur C.*

Définition 21 ([25], [26])**.** *Un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur X est dit* semi-stable *s'il est semi-stable de degré* 0 *en restriction à toute orbicourbe dans X. On notera $\mathrm{SS}_0\, X$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Vect}\, X$ des faisceaux localement libres semi-stables sur X.*

Proposition 9. *La catégorie $\mathrm{SS}_0\, X$ est une catégorie abélienne.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de [25], Lemma 3.6, (b) : étant donné un morphisme $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ dans $\mathrm{SS}_0\, X$, le point clé est de voir que $\ker f$ et $\operatorname{coker} f$ sont localement libres. Il est aisé de voir qu'ils sont sans torsion [8], et donc localement libres si X est une orbicourbe. Dans le cas général, X étant réduit cela revient à voir que la fonction qui à un point géométrique $x : \operatorname{spec} \overline{k} \to X$ associe le rang de $x^*f : x^*\mathcal{E} \to x^*\mathcal{E}'$ est constant sur X. Or, le cas particulier envisagé ci-dessus montre que cette fonction est constante sur toute orbicourbe dans X. On peut donc conclure à l'aide du lemme suivant :

Lemme 17. *La relation d'équivalence sur les points $x : \operatorname{spec} \overline{k} \to X$ engendrée par $x \sim x'$ s'il existe une orbicourbe dans X dont l'image contient x et x' admet une unique orbite.*

Démonstration. Dans le cas où X est un schéma, on se ramène au cas où X est projectif sur k grâce au lemme de Chow ([13], 5.6), où c'est un fait classique.

Dans le cas général, on note U comme dans la définition 18 un ouvert de l'espace de modules M de X tel que la flèche $X \to M$ de X vers son espace de modules M soit un isomorphisme en restriction à U. Soit y, y' les images respectives de x, x' dans M, on peut supposer que $y \in U$. D'après le cas particulier ci-dessus, il existe une courbe C dans M (au sens de [25], ou de la définition 20) contenant y et y'. Le champ de Deligne-Mumford $C \times_M X$ admet C pour espace des modules, et il en est de même de $(C \times_M X)_{red}$ ([5] Lemma 2.3.3 ou [11] Corollary 3.3). D'après [10], Theorem 4.1, on a un isomorphisme $(C \times_M X)_{red} \simeq \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/C}$ sur X pour un choix convenable d'une famille $\mathbf{D}$ de diviseurs effectifs et d'une famille d'entiers naturels $\mathbf{r}$. Comme on dispose d'un morphisme birationnel surjectif $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}_{red}/C} \to \sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/C}$, comme de plus $(C \times_M X)_{red}$ est birationnel sur son image dans X et que celle-ci contient x et x', on a terminé.

□

□

Proposition 10. *Tout fibré fini sur X est semi-stable.*

8. les arguments généraux de [29], §3 s'appliquent ici, à l'aide de [8], §5 pour les adapter au cas des orbicourbes ; comme c'est par ailleurs bien connu dans le cadre -équivalent- des fibrés paraboliques sur les courbes (voir [28]), nous ne rentrons pas dans les détails

Démonstration. Comme la restriction d'un fibré fini l'est encore, il suffit de le vérifier sur les orbicourbes. Mais on peut alors adapter la preuve de [25] au cas des orbicourbes : voir [8], Proposition 6. □

Définition 22 ([25], [26]). *Un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur X est dit* essentiellement fini *si c'est un quotient de deux sous-fibrés semi-stables d'un fibré fini. On notera* $\mathrm{EF}\,X$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{SS}_0\,X$ *des faisceaux localement libres essentiellement finis sur* X.

Théorème 6. *Soit X un schéma tordu modéré et réduit sur un corps k, dont l'espace des modules M est propre et connexe sur k, et $x \in X(k)$ un point rationnel. La paire* $(\mathrm{EF}\,X, x^*)$ *est une catégorie tannakienne.*

Démonstration. Compte tenu de la proposition 9, la preuve est la même que celle donnée dans [25], §3. □

Corollaire 5. *Si on suppose, en plus des hypothèses du théorème 6, que k est algébriquement clos de caractéristique* 0, *alors tout fibré essentiellement fini est fini, et le foncteur* RH *induit une équivalence de catégories tensorielles entre* $\mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}}, k)$ *et* $\mathrm{F}\,X$. *En particulier* $(\mathrm{F}\,X, x^*)$ *est une catégorie tannakienne dont le groupe est canoniquement isomorphe à* $\pi_1(X, x)$.

Démonstration. Soit $\mathbf{V} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{LC}(\widetilde{X_{etf}}, k)$. Le fait que $\mathrm{RH}(\mathbf{V})$ soit fini résulte du lemme 16 : si $\pi : Y \to X$ est un revêtement galoisien de groupe G trivialisant $\mathbf{V}$, il existe une représentation V de G sur le corps k telle que $\pi^{-1}\mathbf{V} = V_Y$. On suit alors l'argument de [25] Proposition 3.8 : cette représentation se plonge dans un $k[G]$-module libre et est donc essentiellement finie, comme la caractéristique de k est 0, elle en en fait finie. Or le morphisme naturel $\mathrm{RH}(\mathbf{V}) \to \pi_*^G(\mathcal{O}_Y \otimes_k V)$ est un isomorphisme, et donc $\mathrm{RH}(\mathbf{V})$ est lui-même fini.

La proposition 8 montre que le foncteur RH est fidèlement plein.

Soit à présent $\mathcal{E}$ un fibré essentiellement fini. Soit $< \mathcal{E} >$ la sous-catégorie tannakienne engendrée, et G son groupe de Tannaka (i.e. le groupe d'holonomie de $\mathcal{E}$). Comme $\mathcal{E}$ est essentiellement fini, G est un schéma en groupe fini sur k ([25] Theorem 1.2), comme ce corps est de caractéristique 0, G est réduit d'après un théorème de Cartier ([31], Chapter 11), donc étale, et k étant de plus algébriquement clos, G est donc constant.

Le foncteur tensoriel $G\,\mathrm{Rep} \to \mathrm{Vect}\,X$ correspond d'après [25] Proposition 2.9 [9] à un G-revêtement $\pi : Y \to X$, et $\mathcal{E}$ s'identifie via l'équivalence $< \mathcal{E} > \simeq G\,\mathrm{Rep}$ à une représentation V de G. Si $\mathbf{V}$ est le système local correspondant, on a vu ci-dessus que $\mathrm{RH}(\mathbf{V})$ est isomorphe à $\pi_*^G(\mathcal{O}_Y \otimes_k V)$, lui-même isomorphe à $\mathcal{E}$. D'où les deux premières assertions.

La dernière résulte alors du corollaire 4. □

9. qui, du fait de sa fonctorialité, vaut aussi pour les champs de Deligne-Mumford, voir sur le sujet [21]

5 Théorème de Weil-Nori

5.1 Fibrés paraboliques modérés

Soit X un schéma localement noethérien sur un corps k, $\mathbf{D}$ une famille de diviseurs irréductibles à croisements normaux simples sur X.

5.1.1 Fibrés paraboliques finis

Définition 23. 1. *On définit la catégorie* $\mathrm{Par}(X, \mathbf{D})$ *des fibrés paraboliques modérés sur* $(X, \mathbf{D})$ *par :*

$$\mathrm{Par}(X, \mathbf{D}) = \varinjlim_{\mathbf{r}} \mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$$

où les multi-indices varient parmi les familles $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ *d'entiers non divisibles par la caractéristique* p *de* k.

2. $\mathrm{Par}(X, \mathbf{D})$ *est munie d'un produit tensoriel vérifiant, pour* $\mathcal{E}_\cdot, \mathcal{E}'_\cdot \in \mathrm{obj}\,\mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$, *la formule de convolution suivante :*

$$(\mathcal{E}_\cdot \otimes \mathcal{E}'_\cdot)_{\mathbf{m}} = \int^{\mathbf{l} \in \frac{1}{\mathbf{r}}\mathbb{Z}} \mathcal{E}_{\mathbf{l}} \otimes \mathcal{E}'_{\mathbf{m}-\mathbf{l}}$$

où $\int$ *désigne la cofin (coend), voir §2.1.2.*

3. *Un fibré parabolique modéré* $\mathcal{E}_\cdot$ *sur* $(X, \mathbf{D})$ *est dit* fini *s'il existe deux polynômes distincts* P, Q *à coefficients entiers positifs tels que* $P(\mathcal{E}_\cdot) \simeq Q(\mathcal{E}_\cdot)$. *On notera* $\mathrm{FPar}(X, \mathbf{D})$ *la catégorie des fibrés paraboliques modérés sur* $(X, \mathbf{D})$.

Remarque 6. *Ces notions sont compatibles, via l'équivalence* $\mathrm{Vect}(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}) \simeq \mathrm{Par}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D})$ *du théorème 2, avec les notions champêtres du §4.5, voir [8].*

5.1.2 Fibrés paraboliques essentiellement finis

Définition 24. 1. *Un fibré parabolique modéré* $\mathcal{E}_\cdot$ *sur* $(X, \mathbf{D})$ *à poids multiples de* $\frac{1}{\mathbf{r}}$ *est dit semi-stable si le faisceau localement libre sur* $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ *associé par la correspondance du théorème 2 est semi-stable au sens de la définition 21. On notera* $\mathrm{SS}_0\,\mathrm{Par}(X, \mathbf{D})$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Par}(X, \mathbf{D})$ *dont les objets sont semi-stables.*

2. *Un fibré parabolique modéré semi-stable* $\mathcal{E}_\cdot$ *est dit* essentiellement fini *si c'est un quotient de deux sous-fibrés paraboliques modérés semi-stables d'un fibré parabolique modéré fini. On notera* $\mathrm{EFPar}(X, \mathbf{D})$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{SS}_0\,\mathrm{Par}(X, \mathbf{D})$ *dont les objets sont essentiellement finis.*

Remarque 7. 1. *La définition de semi-stabilité est indépendante du choix de* $\mathbf{r}$.

2. *Il serait intéressant de donner une définition de la semi-stabilité ne faisant intervenir que la topologie de Zariski.*

5.2 Lien avec le groupe fondamental

5.2.1 Énoncé

Théorème 7. *Soit X un schéma propre, normal, connexe sur un corps k, $\mathbf{D}$ une famille de diviseurs irréductibles à croisements normaux simples sur X, $D = \cup_{i \in I} D_i$, $x \in X(k)$ un point rationnel, $x \notin D$.*

(i) La paire $(\mathrm{EFPar}(X, \mathbf{D}), x^*)$ est une catégorie tannakienne.

(ii) Si k est algébriquement clos de caractéristique 0, tout fibré parabolique modéré essentiellement fini est fini, et le groupe de Tannaka de $(\mathrm{FPar}(X, \mathbf{D}), x^*)$ est canoniquement isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(X - D, x)$.

Démonstration. On commence par remarquer que $\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}$ est normal ([17], Proposition 1.8.5).

(i) Ceci résulte alors des théorèmes 2 et 6.

(ii) La première assertion découle du théorème 2 et du corollaire 5. Pour la seconde, notons π ce schéma en groupe. Alors $\pi \simeq \varprojlim_{\mathbf{r}} \pi_{\mathbf{r}}$, où $\pi_{\mathbf{r}}$ est le groupe de Tannaka de la catégorie $(\mathrm{FPar}_{\frac{1}{\mathbf{r}}}(X, \mathbf{D}), x^*)$, avec des notations évidentes. D'après la proposition 5, il suffit de voir qu'on a des isomorphismes naturels $\pi_{\mathbf{r}} \simeq \pi_1(\sqrt[\mathbf{r}]{\mathbf{D}/X}, x)$, compatibles avec les systèmes projectifs (vu qu'on est en caractéristique zéro, on a un isomorphisme naturel $\pi_1(X - D, x) \simeq \pi_1^D(X, x)$ donné, au niveau des revêtements, par le foncteur de normalisation). On conclut donc en appliquant à nouveau le théorème 2 et le corollaire 5.

□

5.2.2 Schéma en groupe fondamental modéré

On est naturellement conduit à poser :

Définition 25. *Avec les notations du théorème 7, on appellera schéma en groupe fondamental modéré de (X, D) le groupe fondamental $\pi^D(X, x)$ de la catégorie tannakienne $(\mathrm{EFPar}(X, \mathbf{D}), x^*)$.*

Remarque 8.

1. *Ce schéma en groupe $\pi^D(X, x)$ est une limite inverse de schémas en groupes finis, se spécialise sur le schéma en groupe fondamental de Nori ([25]) lorsque $D = \emptyset$, et sur le groupe fondamental modéré de Grothendieck-Murre ([17]) lorsque k est algébriquement clos de caractéristique 0, d'où son nom.*
2. *Lorsque k est quelconque, les arguments de corollaire 5 montrent qu'on a un morphisme $\pi^D(X, x) \to \pi_1^D(X, x)$ qui est un épimorphisme lorsque k est algébriquement clos.*
3. *Toutefois, il conviendrait de préciser la nature des "torseurs modérément ramifiés" que $\pi^D(X, x)$ classifie.*

A 2-limite inductive filtrée de catégories

A.1 2-limite

On emprunte les définitions de [18]. On note $\mathfrak{Cat}$ la 2-catégorie dont les objets sont les catégories, les 1-flèches les foncteurs, les 2-flèches les transformations naturelles.

Soit $\mathfrak{C}$ une 2-catégorie, I une catégorie usuelle.

Pour tout objet $\mathcal{D}$ de $\mathfrak{C}$, on note $c_{\mathcal{D}}$ le foncteur constant $I \to \mathfrak{C}$ envoyant tout objet de I sur $\mathcal{D}$, et toute flèche de I sur l'identité.

On note de plus $(I, \mathfrak{C})$ la 2-catégorie des pseudo-foncteurs de I dans $\mathfrak{C}$.

Si $\mathcal{F}, \mathcal{F}' : I \to \mathfrak{C}$ sont deux pseudo-foncteurs, on note $(I, \mathfrak{C})(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ la catégorie des transformations naturelles de pseudo-foncteurs entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

Définition 26. *Soit $\mathcal{F} : I \to \mathfrak{C}$ un pseudo-foncteur. On appelle* 2-limite inductive *de $\mathcal{F}$ le 2-foncteur :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{Cat} \\ \mathcal{D} &\longrightarrow (I, \mathfrak{C})(\mathcal{F}, c_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

Si ce foncteur est 2-représentable, on appelle aussi 2-limite inductive et on note $\varinjlim_I \mathcal{F}(i)$ l'objet de $\mathfrak{C}$ le représentant.

Plus précisément, un représentant est un couple $(\mathcal{C}, \lambda)$, où $\mathcal{C}$ est un objet de $\mathfrak{C}$, et $\lambda : \mathcal{F} \to c_{\mathcal{C}}$ est une transformation naturelle entre pseudo-foncteurs, qui est 2-universelle au sens suivant : pour tout objet $\mathcal{D}$ de $\mathfrak{C}$, et toute transformation naturelle $\mu : \mathcal{F} \to c_{\mathcal{D}}$, il existe un couple (f, θ) formé d'un 1-morphisme $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ de $\mathfrak{C}$ et d'un 2-isomorphisme θ de $(I, \mathfrak{C})$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\mu"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\theta}{\Longleftarrow}"] & c_{\mathcal{C}} \arrow[dl, "c_f"] \\ & c_{\mathcal{D}} & \end{tikzcd}$$

qui est unique à 2-isomorphisme unique près : si (f', θ') est un autre tel couple, il existe un unique 2-isomorphisme ρ de $\mathfrak{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\rho"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

tel que $\theta \circ (c_\rho \circ \lambda) = \theta'$.

A.2 Cas des catégories

On suppose désormais que la catégorie I est filtrante et que $\mathfrak{C} = \mathfrak{Cat}$. Dans ce cas, on dispose d'une description naturelle et probablement bien connue de la 2-limite d'un pseudo-foncteur $\mathcal{F} : I \to \mathfrak{Cat}$. Pour $f : i \to j$, on note $f_* : \mathcal{F}(i) \to \mathcal{F}(j)$, plutôt que $\mathcal{C}(f)$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie

1. dont les objets sont les couples (i, C), où i est un objet de I, et C est un objet de $\mathcal{F}(i)$,
2. dont les morphismes $(i, C) \to (j, D)$ sont les classes d'équivalence[10] de triplets (f, g, α) :

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "f"] & \\ & k, \\ j \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad f_*C \xrightarrow{\alpha} g_*D$$

pour la relation

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr, "f"] & \\ & k, \\ j \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad f_*C \xrightarrow{\alpha} g_*D \qquad \sim \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[dr, "f'"] & \\ & k', \\ j \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd} \qquad f'_*C \xrightarrow{\alpha'} g'_*D$$

s'il existe

$$\begin{tikzcd} k \arrow[dr, "h"] & \\ & l \\ k' \arrow[ur, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

tel que $h \circ f = h' \circ f'$, $h \circ g = h' \circ g'$ et $h_*\alpha = h'_*\alpha'$.

Proposition 11. *La catégorie $\mathcal{C}$, munie de la transformation naturelle canonique $\mathcal{F} \to c_{\mathcal{C}}$, est une 2-limite pour $\mathcal{F}$.*

Démonstration. C'est une vérification longue mais directe de la définition 26 dans ce cas précis.

$\square$

Références

[1] *Schémas en groupes. II : Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 152. Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.

[2] *Revêtements étales et groupe fondamental.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. [arXiv:math.AG/0206203].

[3] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6), Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 225.

10. on ignore délibérément les problèmes d'univers en omettant de vérifier qu'il s'agit d'un ensemble, pour être correct, il faut probablement supposer la catégorie I petite

[4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 270.

[5] Alessandro Arsie and Angelo Vistoli : Stacks of cyclic covers of projective spaces. *Compos. Math.*, 140(3) :647–666, 2004.

[6] Vikraman Balaji, Indranil Biswas, and Donihakkalu S. Nagaraj : Principal bundles over projective manifolds with parabolic structure over a divisor. *Tohoku Math. J. (2)*, 53(3) :337–367, 2001.

[7] Indranil Biswas : Parabolic bundles as orbifold bundles. *Duke Math. J.*, 88(2) :305–325, 1997.

[8] Niels Borne : Fibrés paraboliques et champ des racines. [arXiv:math.AG/0604458].

[9] N. Bourbaki : *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1308. Hermann, Paris, 1964.

[10] Charles Cadman : Using stacks to impose tangency conditions on curves. [arXiv:math.AG/0312349].

[11] Angelo Vistoli Dan Abramovich, Martin Olsson : Tame stacks in positive characteristic. [arXiv:math.AG/0703310].

[12] Angelo Vistoli Dan Abramovich, Tom Graber : Gromov–Witten theory of Deligne–Mumford stacks. [arXiv:math.AG/0603151].

[13] A. Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8) :222, 1961.

[14] A. Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11) :167, 1961.

[15] A. Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20) :259, 1964.

[16] A. Grothendieck : Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32) :361, 1967.

[17] Alexander Grothendieck and Jacob P. Murre : *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme.* Springer-Verlag, Berlin, 1971. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 208.

[18] Monique Hakim : *Topos annelés et schémas relatifs.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 64.

[19] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly : *Champs algébriques*, volume 39 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[20] Olivier Leroy : *Groupoïde fondamental et théorème de van Kampen en théorie des topos*, volume 17 of *Cahiers Mathématiques Montpellier [Montpellier Mathematical Reports]*. Université des Sciences et Techniques du Languedoc U.E.R. de Mathématiques, Montpellier, 1979.

[21] Jacob Lurie : Tannaka Duality for Geometric Stacks. [arXiv:math.AG/0412266].

[22] Saunders MacLane : *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[23] M. Maruyama and K. Yokogawa : Moduli of parabolic stable sheaves. *Math. Ann.*, 293(1) :77–99, 1992.

[24] B. Noohi : Fundamental groups of algebraic stacks. *J. Inst. Math. Jussieu*, 3(1) :69–103, 2004. [arXiv:math.AG/0201021].

[25] Madhav V. Nori : On the representations of the fundamental group. *Compositio Math.*, 33(1) :29–41, 1976.

[26] Madhav V. Nori : The fundamental group-scheme. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 91(2) :73–122, 1982.

[27] Neantro Saavedra Rivano : *Catégories Tannakiennes*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265.

[28] C. S. Seshadri : *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, volume 96 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982. Notes written by J.-M. Drezet from a course at the École Normale Supérieure, June 1980.

[29] Carlos T. Simpson : Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (79) :47–129, 1994.

[30] Angelo Vistoli : Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. [arXiv:math.AG/0412512].

[31] William C. Waterhouse : *Introduction to affine group schemes*, volume 66 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979.

[32] Charles A. Weibel : *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[33] André Weil : Généralisation des fonctions abéliennes. *J. Math. Pures Appl., IX. Sér.*, 17 :47–87, 1938.

[34] Vincent Zoonekynd : Théorème de van Kampen pour les champs algébriques. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 9(1) :101–145, 2002. [arXiv:math.AG/0111073].