Fibrés paraboliques et champ des racines
(version préliminaire)

Niels Borne

22 avril 2006

1 Introduction

1.1 Résultats

Soit X une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos k, et x un point fermé. Un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur X est dit *fini* s'il existe deux polynômes distincts P, Q à coefficients entiers positifs tels que $P(\mathcal{E}) \simeq Q(\mathcal{E})$, l'exemple classique étant donné par les faisceaux inversibles sur X dont une puissance tensorielle est triviale. Nous nous conformerons à la tradition en parlant de *fibrés* finis. Nous nous intéressons aux liens bien connus que ces fibrés ont avec le groupe fondamental de (X, x), ce par quoi nous entendrons toujours groupe fondamental profini ([1]).

Dans [18], Nori utilise la correspondance due à A.Weil, lorsque $\operatorname{car} k = 0$, entre fibrés finis sur X et représentations de $\pi_1(X, x)$, pour définir par extension en caractéristique arbitraire, le *schéma en groupe fondamental de* (X, x), comme groupe fondamental $\pi(X, x)$ de la catégorie tannakienne des fibrés essentiellement finis sur X, munie du foncteur fibre défini par x. Ce nom est justifié par le fait que le groupe proalgébrique $\pi(X, x)$ classifie les torseurs pointés sur X, de groupe structurel un schéma en groupe fini sur k.

Dans un travail publié ultérieurement ([19]), Nori montre que la notion de schéma en groupe fondamental a encore un sens pour une courbe pointée (X, D), ce groupe étant cette fois défini comme le groupe fondamental de la catégorie tannakienne des fibrés *paraboliques* essentiellement finis sur X. Il utilise ici sa propre définition des fibrés paraboliques, la décrivant comme "une légère modification de celle de Seshadri". Il démontre, en suivant l'analogie avec le cas des courbes complètes, que ce groupe fondamental classifie de même les torseurs pointés sur $X - D$, de groupe structurel un schéma en groupe fini sur k.

Ce résultat a de l'intérêt même en caractéristique zéro, puisqu'il donne une réinterprétation algébrique du groupe fondamental étale de $X - D$, comme groupe de Tannaka de la catégorie des fibrés paraboliques finis sur (X, D). Ceci permet de reformuler le problème classique (évoqué dans [1]) d'une preuve "algébrique" (disons, sans utiliser de théorème de type GAGA) des théorèmes de structure des groupes fondamentaux des courbes algébriques. Par exemple, on peut essayer de comprendre l'équivalence entre les fibrés paraboliques finis sur $(\mathbb{P}^1, \{0, 1, \infty\})$ et représentations de $\widehat{F_2}$, le complété profini du groupe libre à deux générateurs, même si ce problème reste probablement très difficile.

Aussi notre attention s'est-elle concentrée sur deux problèmes : déterminer si le théorème de Nori sur les fibrés paraboliques se généralise en dimension supérieure, au moins en caractéristique zéro, et éclaircir le lien entre sa définition des fibrés paraboliques et celle, classique, due à Seshadri. Nous ne résolvons que le second problème dans ce travail (nous comptons revenir sur le premier dans un prochain article).

Nous montrons essentiellement deux résultats, qui sont valables en dimension quelconque. Donnés un entier $r \geq 1$, un schéma (noethérien) X muni d'un diviseur de Cartier effectif D, le premier énoncé (théorème 4) stipule qu'il y a une équivalence de catégories tensorielles entre fibrés paraboliques (au sens de Seshadri) à poids multiples de $\frac{1}{r}$ et faisceaux localement libres sur un certain champ de Deligne-Mumford $\mathfrak{X}$ sur X, qu'on peut appeler le champ des racines r-ièmes de D, où, comme on l'imagine, la structure de champ est concentrée le long du support de D. Le second résultat (théorème 5) affirme que s'il l'on suppose de plus X et D projectifs et lisses sur un corps algébriquement clos de caractéristique première à r, la notion de degré parabolique (définie dans ce cadre de généralité par Maruyama et Yokogawa, [16]) coïncide avec la notion usuelle de degré pour le faisceau correspondant sur $\mathfrak{X}$.

Ces deux résultats permettent de ramener les questions concernant les fibrés paraboliques à des questions concernant des fibrés usuels. Dans le paragraphe 5, nous montrons comment les notions usuelles sur les fibrés paraboliques sur une courbe marquée (X, D) s'interprètent naturellement lorsque l'on considère le(s) champ(s) associé(s). Il s'ensuit par exemple que les fibrés paraboliques finis sont semi-stables de degré 0, la preuve pour les fibrés usuels sur une courbe complète s'adaptant au cas d'une orbicourbe complète. Ceci permet d'obtenir des informations sur la structure des fibrés paraboliques finis sur la droite projective (théorème 6). Ce résultat est en fait une conséquence du théorème de Nori, mais nous n'en faisons pas vraiment usage ici.

1.2 Origines

La définition de Nori (voir [19]) d'un fibré parabolique sur (X, D) est, grossièrement, la donnée d'un fibré usuel sur $X - D$ auquel on recolle des fibrés définis sur un revêtement ramifié d'un voisinage des points du support de D. Dans l'esprit, c'est une définition très proche de celle des fibrés sur le champ $\mathfrak{X}$, qui est en quelque sorte le revêtement ramifié minimal de X sur lequel on peut voir tous les fibrés paraboliques à poids multiples de $\frac{1}{r}$ sur X comme des fibrés usuels.

L'idée d'associer à un revêtement galoisien ramifié de courbes $Y \to X$, de groupe G, et à un G-faisceau cohérent sur Y, un faisceau parabolique sur (X, D), où D est le diviseur de branchement du revêtement, semble due à Biswas ([7]). C'est la procédure que nous adoptons, pour le "revêtement ramifié" $\mathfrak{X} \to X$, pour associer à un fibré sur $\mathfrak{X}$ un fibré parabolique sur (X, D). Biswas décrit également une procédure en sens inverse, et il est mentionné dans [4] qu'il en résulte une équivalence tensorielle entre certains G-faisceaux sur Y et les faisceaux paraboliques sur (X, D). Nous nous distinguons ici de ([7]) en donnant, dans le cadre plus général des champs de racines, une expression plus explicite et intrinsèque de l'équivalence réciproque, en termes de cofins ("coends"). Cette expression rend d'ailleurs le caractère tensoriel évident.

Le champ des racines r-ièmes d'un faisceau inversible munis d'une section sur X de Cadman et Vistoli ([10], [2]) est un outil essentiel. Tout aussi indispensables nous sont les revêtements cycliques uniformes de Arsie-Vistoli ([3]), dont les champs quotient sont les modèles locaux du champ des racines r-ièmes (voir théorème 3).

La définition des fibrés paraboliques que nous adoptons ici est due à Maruyama-Yokogawa ([16], [26]), c'est une adaptation de celle de Seshadri sur les courbes ([21], voir aussi appendice A) à la dimension quelconque.

Notre preuve de l'égalité du degré d'un faisceau parabolique avec le degré du faisceau associé sur le champ des racines r-ièmes repose de manière essentielle sur la formule de Grothendieck-Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford due à Toën ([22],[23]). Nous regroupons les résultats que nous utilisons dans un long appendice (C).

Enfin c'est une note de Edixhoven ([12]) qui a éveillé notre attention sur la structure des fibrés paraboliques finis sur la droite projective.

1.3 Limites de cet article, et possibles applications

Le théorème 4 permet de réinterpréter et de compléter certains travaux antérieurs sur les fibrés paraboliques dans le cadre plus général des champs de Deligne-Mumford. Voici deux exemples. La définition des fibrés principaux à structure parabolique de groupe structurel donné de [4] s'interprète comme celle des fibrés principaux de même groupe structurel sur un champ de racines (et cette interprétation nous semble plus naturelle que la définition originelle en termes de foncteurs tensoriels). Second exemple : on peut utiliser les différentes théories des anneaux de Chow pour les champs de Deligne-Mumford (par exemple celle de [25]) pour donner une définition des classes de Chern des fibrés paraboliques également plus naturelle que celle de [5]. Mentionnons à ce sujet que le "caractère de Chern à coefficient dans les représentations" de [23] permet de calculer la K-théorie de la catégorie des fibrés paraboliques (dont les poids ont des dénominateurs bornés) en termes d'anneaux de Chow d'un champ de Deligne-Mumford (le champ d'inertie du champ des racines), ce qui semble hors de portée des seules techniques paraboliques.

Toutefois, nous ne prenons pas le soin de décrire ces applications en détail, à la fois par manque de place, par volonté de se concentrer sur le lien entre fibrés paraboliques et groupe fondamental, et surtout parce qu'il apparaît a posteriori que la définition des fibrés paraboliques adoptée ici (celle de [26]) ne soit correcte que dans le cas d'un diviseur lisse (et il nous semble à présent que l'équivalence tensorielle de [7], [4] n'est valable que dans ce cadre). En d'autres termes, bien que le théorème 4 soit vrai pour un diviseur quelconque, elle n'est intéressante que pour un diviseur lisse. Nous comptons revenir sur le problème de la définition des fibrés paraboliques relatifs à un diviseur à croisements normaux dans un article ultérieur. Il serait aussi très souhaitable de comprendre le théorème 4 non seulement comme une équivalence de catégories, mais comme un équivalence de champs, puisque cela permettrait de voir [26] sous un jour nouveau.

Mentionnons enfin le lien avec les structures logarithmiques et en particulier avec le travail de Matsuki et Olsson [17], qu'il faudrait aussi expliciter.

1.4 Remerciements

Je tiens à remercier les nombreux mathématiciens qui m'ont permis de mener à bien cet article, et parmi eux, spécialement I.Biswas et D. S.Nagaraj, pour leurs patientes explications sur les fibrés paraboliques, B.Toën, pour de multiples éclaircissements, A.Chiodo, pour d'intéressantes discussions sur les champs de racines, et enfin, de manière générale, M.Emsalem et A.Vistoli.

2 Fibrés paraboliques : la définition de Maruyama-Yokogawa

On fixe un schéma noethérien X, et un diviseur de Cartier effectif D sur X, et $r \geq 1$ un entier.

2.1 Poids à dénominateurs multiples d'un entier donné

On identifie tout ensemble ordonné à la catégorie correspondante.

On appelle $\mathrm{Qcoh}(X)$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X.

Soit $\mathcal{E}_\cdot : (\frac{1}{r}\mathbb{Z})^{op} \to \mathrm{Qcoh}(X)$ un foncteur. Pour $i \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}$ on dispose alors du décalage (shift) $\mathcal{E}[i]_\cdot$ défini sur les objets par la formule usuelle $\mathcal{E}[i]_j = \mathcal{E}_{i+j}$, et pour $i \geq j$ de la transformation naturelle $\mathcal{E}[i]_\cdot \to \mathcal{E}[j]_\cdot$.

Définition 1 ([26]). *On définit la catégorie $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X,D)$ des fibrés paraboliques de poids multiples de $\frac{1}{r}$ comme ayant pour objets les couples $(\mathcal{E}_\cdot, j)$, où $\mathcal{E}_\cdot : (\frac{1}{r}\mathbb{Z})^{op} \to \mathrm{Qcoh}(X)$ est un foncteur, et $j : \mathcal{E}_\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D) \simeq \mathcal{E}[1]_\cdot$ est une transformation naturelle faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D) \arrow[rr, "j"] \arrow[dr] & & \mathcal{E}[1]_\cdot \arrow[dl] \\ & \mathcal{E}_\cdot & \end{tikzcd}$$

Les morphismes de $(\mathcal{E}_\cdot, j)$ à $(\mathcal{E}'_\cdot, j')$ sont les transformations naturelles $\alpha : \mathcal{E}_\cdot \to \mathcal{E}'_\cdot$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}. \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha\otimes 1"'] & \mathcal{E}[1]. \arrow[d, "\alpha[1]"] \\
\mathcal{E}'_. \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D) \arrow[r, "j'"'] & \mathcal{E}'[1].
\end{tikzcd}$$

Pour alléger les notations, on omettra souvent de mentionner j pour désigner les objets de $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X, D)$.

Lorsque $r = 1$, il est clair que le foncteur d'oubli $\mathcal{E}. \to \mathcal{E}_0$ (ou évaluation en zéro) $\mathrm{PAR}_1(X, D) \to \mathrm{Qcoh}(X)$ est une équivalence, dont une équivalence réciproque est donnée par $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(- \cdot D)$.

La catégorie $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X, D)$ est munie de Hom internes. Soient en effet $\mathcal{E}.$ et $\mathcal{E}'_.$ deux objets, on dispose déjà du faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}., \mathcal{E}'_.)$ défini par, pour tout ouvert U de X : $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}., \mathcal{E}'_.)(U) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}._{|U}, \mathcal{E}'_{.|U})$. On définit le faisceau parabolique $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}., \mathcal{E}'_.).$ en posant pour tout $i \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}$:

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}., \mathcal{E}'_.)_i = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}., \mathcal{E}'_.[i])$$

On définit alors le produit tensoriel $\mathcal{E}. \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'_.$ de deux fibrés paraboliques $\mathcal{E}.$ et $\mathcal{E}'_.$ par la formule habituelle :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}. \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'_., \mathcal{E}''_.). \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}., \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E}'_., \mathcal{E}''_.).).$$

On désigne par $\mathrm{Vect}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Qcoh}(X)$ dont les objets sont les faisceaux localement libres (de rang fini).

Définition 2 ([26]). *La catégorie $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$ des r-fibrés paraboliques localement libres (de rang fini) est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X, D)$ dont les objets sont les couples $(\mathcal{E}., j)$ vérifiant :*

1. *$\mathcal{E}. : (\frac{1}{r}\mathbb{Z})^{op} \to \mathrm{Qcoh}(X)$ se factorise en $(\frac{1}{r}\mathbb{Z})^{op} \to \mathrm{Vect}(X)$.*
2. *Pour $i \leq i' < i+1$, $\mathrm{coker}(\mathcal{E}_{i'} \to \mathcal{E}_i)$ est localement libre comme $\mathcal{O}_D$-module.*

Remarque 1 ([26]). *Donnés $(\mathcal{E}., j)$ et $(\mathcal{E}'_., j')$ deux objets de $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$, la compatibilité des transformations naturelles de $\mathcal{E}.$ vers $\mathcal{E}'_.$ avec j et j' est automatique.*

2.2 Poids rationnels quelconques

Si $r|r'$, l'inclusion $(\frac{1}{r}\mathbb{Z}) \subset (\frac{1}{r'}\mathbb{Z})$ admet pour adjoint à gauche le foncteur défini sur les objets par : $\frac{l'}{r'} \to -\frac{1}{r}[-\frac{rl'}{r'}]$.

Ce dernier induit un foncteur fidèlement plein $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X, D) \to \mathrm{PAR}_{\frac{1}{r'}}(X, D)$, adjoint à gauche du foncteur de restriction $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r'}}(X, D) \to \mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X, D)$. En particulier pour $r = 1$ on obtient un foncteur $\mathrm{Qcoh}(X) \to \mathrm{PAR}_{\frac{1}{r'}}(X, D)$, adjoint à gauche du foncteur d'oubli (ou évaluation en zéro) $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r'}}(X, D) \to \mathrm{Qcoh}(X)$. Ceci permet de poser :

Définition 3. *On définit la catégorie* $\mathrm{PAR}(X,D)$ *des fibrés paraboliques à poids rationnels comme*

$$\mathrm{PAR}(X,D) = \varinjlim_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X,D)$$

Remarque 2. *On peut aussi définir directement les objets de* $\mathrm{PAR}(X,D)$ *comme des couples* $(\mathcal{E}.,j)$*, où* $\mathcal{E}. : (\mathbb{Q})^{op} \to \mathrm{Qcoh}(X)$ *est un foncteur, et* $j : \mathcal{E}. \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D) \simeq \mathcal{E}[1]$. *une transformation naturelle vérifiant la même relation de commutativité, avec la condition supplémentaire que la longueur de la filtration* $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ *est finie.*

On munit $\mathrm{PAR}(X,D)$ des Homs internes et du produit tensoriel induit par ceux des $\mathrm{PAR}_{\frac{1}{r}}(X,D)$, qui sont évidemment compatibles entre eux.

On définit la catégorie des fibrés paraboliques localement libres (de rang fini) sur (X,D) de la manière évidente, à savoir :

$$\mathrm{Par}(X,D) = \varinjlim_{r\in\mathbb{N}} \mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X,D)$$

Comme on l'a vu, le foncteur d'oubli (ou évaluation en zéro) $\mathrm{Par}(X,D) \to \mathrm{Vect}(X)$ a un adjoint à gauche, qu'on explicite :

Définition 4. *Pour* $\mathcal{F} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{Vect}(X)$*, on dispose du fibré parabolique localement libre sur* (X,D)*, dit* à structure spéciale*, et noté* $\underline{\mathcal{F}}.$*, défini sur les objets par :*

$$\underline{\mathcal{F}}. = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X([-\cdot]D)$$

L'utilité des structures spéciales vient en partie du fait classique suivant.

Théorème 1. *Soit* $\mathcal{E}. \in \mathrm{obj}\,\mathrm{Par}(X,D)$. *Pour tout point* $x \in X$*, il existe un voisinage ouvert (pour la topologie de Zariski)* U *de* X*, il existe une famille finie de nombres rationnels* $(\alpha_a)_{a\in A}$ *telle que*

$$(\mathcal{E}.)_{|U} \simeq \oplus_{a\in A} \underline{\mathcal{O}_U}.[\alpha_a]$$

Démonstration. La démonstration est très proche de celle de la proposition 3, que nous détaillons par la suite. □

2.3 Fibrés paraboliques et revêtements

Définition 5 ([3])**.** *Soit* X *un schéma noethérien. Un* revêtement cyclique uniforme de degré r *de* X *est un morphisme de schémas* $\pi : Y \to X$*, et une action du schéma en groupes* $\boldsymbol{\mu}_r$ *sur* Y*, tels que pour tout point* x *de* X*, il existe un voisinage affine* $U = \mathrm{Spec}\,R$ *de* x *dans* X*, un élément* $s \in R$ *qui n'est pas un diviseur de zéro, et un isomorphisme de* U*-schémas* $\pi^{-1}(U) \simeq \mathrm{Spec}\,R[t]/(t^r - s)$ *qui est* $\boldsymbol{\mu}_r$*-équivariant, où le membre de droite est équipé de l'action évidente.*

L'ensemble de tels couples (U,s) (resp. $(\pi^{-1}(U),t)$), pour U variant sur un recouvrement de X, définit un diviseur de Cartier effectif D sur X (resp. E sur Y), que l'on appelle *le diviseur de branchement* (resp. *le diviseur de ramification*) de π. Ils vérifient la relation $\pi^* D = rE$.

Remarque 3 ([3])**.** *Donné $\pi\colon Y \to X$ un revêtement cyclique uniforme de degré r, $\pi_*\mathcal{O}_Y$ est muni d'une $\mathbb{Z}/r$-graduation naturelle, qu'on écrit $\pi_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \mathcal{L}_{r-1}$. En regardant localement on voit que les $\mathcal{L}_j$ sont des faisceaux inversibles, et que le morphisme canonique $\mathcal{L}_1^{\otimes r} \to \mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{O}_X$ est un monomorphisme d'image $\mathcal{O}_X(-D)$. Ainsi le faisceau $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ est-il muni d'une racine r-ième canonique.*

Réciproquement la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}_1$ sur X et d'un monomorphisme $\mathcal{L}_1^{\otimes r} \to \mathcal{O}_X$ permet de définir un revêtement cyclique uniforme de degré r sur X, en considérant le schéma affine sur X associé au faisceau d'algèbres $\frac{\operatorname{Sym}\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_1^{\otimes r}\to\mathcal{O}_X}$.

Définition 6. *Soit S un schéma de base. Soit Y un S-schéma muni d'une action d'un S-schéma en groupes G. Un G-*faisceau localement libre sur Y *est un morphisme de S-champs $[Y|G] \to \mathcal{VECT}\, S$, où $\mathcal{VECT}\, S$ est le champ des faisceaux localement libres (de rang fini) sur S.*

On note $G\operatorname{Vect}(Y)$ la catégorie des G-faisceaux localement libres sur Y.

Proposition 1. *Soit X un schéma noethérien, $\pi : Y \to X$ un revêtement cyclique uniforme de degré r, $\mathcal{F}$ un $\boldsymbol{\mu}_r$-faisceau localement libre sur Y. Soit D le diviseur de branchement et E le diviseur de ramification de π. Alors l'association*

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{r}\mathbb{Z})^{op} &\longrightarrow \operatorname{Vect}(X) \\ \tfrac{l}{r} &\longrightarrow \pi_*^{\boldsymbol{\mu}_r}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_Y(-lE)) \end{aligned}$$

définit de manière naturelle un r-fibré parabolique sur (X,D).

Remarque 4. *1. Ce type d'association est du à I.Biswas ([7]).*

2. *Posons $\mathcal{E}_\cdot = \pi_*^{\boldsymbol{\mu}_r}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_Y(-\cdot rE))$. Pour ne pas alourdir la proposition nous n'avons défini $\mathcal{E}_\cdot$ que sur les objets. La définition sur les flèches est claire : pour $l \le l'$, le morphisme $\mathcal{E}_{\frac{l'}{r}} \to \mathcal{E}_{\frac{l}{r}}$ est induit par la multiplication par $t^{l'-l}$, où $t : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y(E)$ est la section canonique. Le morphisme $j : \mathcal{E}_\cdot \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-D) \simeq \mathcal{E}[1]$. est donné par la relation $\pi^*D = rE$ et la formule de projection pour les $\boldsymbol{\mu}_r$-faisceaux. Enfin le fait que j vérifie la condition de commutativité de la définition 1 vient de la relation $\pi^* s = t^r$.*
3. *Nous verrons que cette opération définit un foncteur $\boldsymbol{\mu}_r\operatorname{Vect}(Y) \to \operatorname{Par}_{\frac{1}{r}}(X,D)$ qui est en fait une équivalence de catégories tensorielles.*

Démonstration de la proposition 1. On commence par remarquer que pour $\mathcal{F}$ un $\boldsymbol{\mu}_r$-faisceau localement libre sur Y, $\pi_*^{\boldsymbol{\mu}_r}\mathcal{F}$ est localement libre sur X : en effet $\boldsymbol{\mu}_r$ étant diagonalisable c'est un facteur direct de $\pi_*\mathcal{F}$, qui est localement libre car $\mathcal{F}$ l'est, π est fini et plat, et X est noethérien.

Il reste à voir que $l \le l' < l+r$, $\operatorname{coker}(\mathcal{E}_{\frac{l'}{r}} \to \mathcal{E}_{\frac{l}{r}})$ est localement libre comme $\mathcal{O}_D$-module. Cela résulte clairement du lemme suivant :

Lemme 1. *Pour tout $\boldsymbol{\mu}_r$-faisceau $\mathcal{F}$ localement libre sur Y, pour tout $0 \leq l < r$, le faisceau $\pi_*^{\boldsymbol{\mu}_r}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{lE})$ est localement libre comme $\mathcal{O}_D$-module.*

Démonstration. La propriété à démontrer est locale sur X et on peut donc supposer $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} R[t]/(t^r - s)$ comme dans la définition 5. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} lE \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ D \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

On a $\pi_*^{\boldsymbol{\mu}_r}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{lE}) = \pi_*^{\boldsymbol{\mu}_r}(j_*j^*\mathcal{F}) = i_*(p_*^{\boldsymbol{\mu}_r}j^*\mathcal{F})$. Il s'agit donc de voir que $p_*^{\boldsymbol{\mu}_r}j^*\mathcal{F}$ est localement libre sur D. Or c'est un facteur direct de $p_*j^*\mathcal{F}$, qui est localement libre sur D, car $p : lE = \operatorname{Spec} \frac{R}{s}[t]/t^l \to \operatorname{Spec} \frac{R}{s} = D$ est fini et plat, D est noethérien, et $j^*\mathcal{F}$ est localement libre sur lE. $\square$

$\square$

3 Champ des racines r-ièmes d'un faisceau inversible muni d'une section

On fixe un entier $r \geq 1$, un schéma noethérien $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[r^{-1}]$, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X, $s \in H^0(X, \mathcal{L})$.

3.1 Définition

Définition 7 ([10])**.** *On définit une catégorie $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ fibrée en groupoïdes sur* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[r^{-1}]$ *par*

1. *les objets de $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ sont les quadruplets $(f, \mathcal{M}, t, \phi)$ où $f : S \to X$ est un morphisme de schémas, $\mathcal{M}$ un faisceau inversible sur S, $t \in H^0(S, \mathcal{M})$, et $\phi : \mathcal{M}^{\otimes r} \simeq f^*\mathcal{L}$ un isomorphisme tel que $\phi(t^{\otimes r}) = f^*s$,*
2. *les morphismes de $(f, \mathcal{M}, t, \phi)$ (au dessus de S) à $(g, \mathcal{N}, u, \psi)$ (au dessus de T) sont les couples (h, ρ), où $h : S \to T$ est un morphisme de schémas tel que $g \circ h = f$, et $\rho : \mathcal{M} \simeq h^*\mathcal{N}$ est un isomorphisme de faisceaux tel que $\rho(t) = h^*(u)$ et le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{\otimes r} \arrow[r, "\rho^{\otimes r}"] \arrow[d, "\phi"'] & h^*\mathcal{N}^{\otimes r} \arrow[d, "h^*\psi"] \\ f^*\mathcal{L} \arrow[r, equal] & h^*g^*\mathcal{L} \end{tikzcd}$$

Théorème 2 ([10], Theorem 2.2)**.** *$X_{(\mathcal{L},s,r)}$ est un champ de Deligne-Mumford (pour la topologie étale) sur* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[r^{-1}]$.

On appellera $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ le *champ des racines r-ièmes* de $(\mathcal{L}, s)$.

Proposition 2 ([10], Proposition 2.4)**.** *Si $f : X' \to X$ est un morphisme de schémas alors il existe un isomorphisme naturel $X' \times_X X_{(\mathcal{L},s,r)} \simeq X'_{(f^*\mathcal{L},f^*s,r)}$.*

Théorème 3 ([10], version 1, Proposition 3.2)**.** *Supposons qu'il existe un faisceau inversible $\mathcal{N}$ sur X et un isomorphisme $\psi : \mathcal{N}^{\otimes r} \simeq \mathcal{L}$.*

Si $Y = \mathbf{Spec}(\frac{\mathrm{Sym}(\mathcal{N}^\vee)}{\mathcal{N}^{\vee\otimes r} \simeq \mathcal{L}^\vee})$, où la structure d'algèbre est définie par $\psi^\vee$ et $s^\vee$, alors il existe un isomorphisme naturel $[Y|\boldsymbol{\mu}_r] \simeq X_{(\mathcal{L},s,r)}$.

Démonstration. On rappelle brièvement le principe de la preuve.

Soit $\pi : Y \to X$ le morphisme structurel, $u : \mathcal{O}_Y \to \pi^*\mathcal{N}$ la section canonique. Alors $\xi : (\pi, \pi^*\mathcal{N}, u, \pi^*\psi)$ définit un objet de $X_{(\mathcal{L},s,r)}(Y)$.

Donné un objet (p, h) de $[Y|\boldsymbol{\mu}_r](S)$, composé d'un $\boldsymbol{\mu}_r$-torseur $p : T \to S$, et d'un morphisme $\boldsymbol{\mu}_r$-équivariant $h : T \to Y$, on dispose donc d'un objet $\boldsymbol{\mu}_r$-équivariant $h^*\xi$. Comme $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ est un champ celui-ci se descend en un objet η de $X_{(\mathcal{L},s,r)}(S)$.

Réciproquement fixons un objet $(f, \mathcal{M}, t, \phi)$ de $X_{(\mathcal{L},s,r)}(S)$. L'isomorphisme $\mathcal{M}^{\otimes r} \simeq f^*\mathcal{L} \simeq f^*\mathcal{N}^{\otimes r}$ déduit de ϕ et $f^*\psi$ définit un $\boldsymbol{\mu}_r$-torseur sur S

$$T = \mathbf{Spec}(\frac{\mathrm{Sym}(\mathcal{M} \otimes f^*\mathcal{N}^\vee)}{\mathcal{M}^{\otimes r} \simeq f^*\mathcal{N}^{\otimes r}})$$

et $t : \mathcal{O}_S \to \mathcal{M}$ induit un morphisme $\boldsymbol{\mu}_r$-équivariant $T \to Y$. On dispose donc d'un objet de $[Y|\boldsymbol{\mu}_r](S)$, et on vérifie que ces deux constructions définissent des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre.

□

Corollaire 1. *Pour tout point x de X, il existe un voisinage affine $U = \operatorname{Spec} R$ de x dans X, un élément $\sigma \in R$ et un isomorphisme naturel de U-champs :*

$$[\mathrm{Spec}(\frac{R[\tau]}{\tau^r - \sigma})|\boldsymbol{\mu}_r] \simeq U_{(\mathcal{L}_{|U}, s_{|U}, r)}$$

Corollaire 2. *Le morphisme canonique $\pi : X_{(\mathcal{L},s,r)} \to X$ est fini.*

Démonstration. On doit montrer que π est quasi-fini et propre.

Commençons par la quasi-finitude : d'après [10], on dispose d'un atlas étale $U \to X_{(\mathcal{L},s,r)}$ de type fini sur X, donc π est de type fini. Donné un point géométrique $\operatorname{Spec} \Omega \to X$, on sait que $\operatorname{Spec} \Omega \times_X X_{(\mathcal{L},s,r)} \simeq \operatorname{Spec} \Omega_{(\mathcal{L}_{|\operatorname{Spec}\Omega}, s_{|\operatorname{Spec}\Omega}, r)}$, et d'après le théorème 3, ce champ admet bien un atlas étale fini sur $\operatorname{Spec} \Omega$. Donc π est quasi-fini.

Prouvons que π est propre. On s'assure aisément que π vérifie le critère valuatif usuel ([25]) pour les morphismes universellement fermés. Reste à voir que π est séparé, ou de manière équivalente que le morphisme diagonal $X_{(\mathcal{L},s,r)} \to X_{(\mathcal{L},s,r)} \times_X X_{(\mathcal{L},s,r)}$ est propre. Soit $(X_i \to X)$ un revêtement Zariski de X trivialisant $\mathcal{L}$, et $\mathcal{L}_i$, s_i les restrictions. D'après ([24]), Proposition 2.36, il suffit de montrer que $X_{i(\mathcal{L}_i,s_i,r)} \to X_{i(\mathcal{L}_i,s_i,r)} \times_{X_i} X_{i(\mathcal{L}_i,s_i,r)}$ est propre. On peut donc supposer $\mathcal{L}$ trivial, et d'après le théorème 3, que $X_{(\mathcal{L},s,r)} \simeq [Y|\boldsymbol{\mu}_r]$, où $Y \to X$ est fini.

Le changement de base du morphisme diagonal $[Y|\boldsymbol{\mu}_r] \to [Y|\boldsymbol{\mu}_r] \times_X [Y|\boldsymbol{\mu}_r]$ par l'atlas étale $Y \times_X Y$ de $[Y|\boldsymbol{\mu}_r] \times_X [Y|\boldsymbol{\mu}_r]$ donne le morphisme (a, pr_2) : $\boldsymbol{\mu}_r \times Y \to Y \times_X Y$, où a désigne le morphisme d'action. Or celui-ci est fini (et donc propre), car fini composé avec $pr_2 : Y \times_X Y \to Y$, qui est séparé car obtenu par changement de base à partir du morphisme affine $Y \to X$. □

Corollaire 3. *$X_{(\mathcal{L},s,r)}$ admet X comme espace des modules grossier.*

Démonstration. C'est un conséquence immédiate du fait que $X_{(\mathcal{L},s,r)} \to X$ est séparé, donc admet un espace des modules grossier (voir [14]), et que X est un quotient catégorique pour $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ (i.e. est universel pour les morphismes de $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ vers un schéma) comme montré dans [10], §2.4. □

Corollaire 4. *Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement cyclique uniforme de degré r. Soit D le diviseur (resp. E) de branchement (resp. de ramification), et s (resp. t) la section canonique de $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ (resp. $\mathcal{N} = \mathcal{O}_Y(E)$). Soit de plus ϕ : $\mathcal{N}^{\otimes r} \simeq \pi^*\mathcal{L}$ le morphisme découlant de l'égalité $\pi^*D = rE$.*

Alors le morphisme $Y \to X_{(\mathcal{L},s,r)}$ défini par $(\pi, \mathcal{N}, t, \phi)$ induit un isomorphisme de X-champs $[Y|\boldsymbol{\mu}_r] \simeq X_{(\mathcal{L},s,r)}$

Démonstration. Cela découle du théorème 3 et de la remarque 3. □

Corollaire 5. *Supposons que $s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ est un monomorphisme, et notons $D = \operatorname{div}(s)$. Supposons de plus donné un morphisme lisse $X \to S_0$, où $S_0 \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[r^{-1}]$ est une base, tel que D est lisse sur S_0. Alors $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ est lisse sur S_0.*

Démonstration. La lissité est une propriété locale, il s'agit donc de voir que $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ admet un atlas lisse sur S_0. Quitte à recouvrir X par des ouverts trivialisant $\mathcal{L}$, on peut se ramener, d'après le théorème 3, au cas où $X_{(\mathcal{L},s,r)} \simeq [Y|\boldsymbol{\mu}_r]$, où $Y \to X$ est un revêtement cyclique uniforme. Mais alors $[Y|\boldsymbol{\mu}_r]$ admet $Y \to [Y|\boldsymbol{\mu}_r]$ comme atlas étale, et $Y \to S_0$ est lisse d'après [3], Proposition 2.5.

□

Lemme 2. *Soient D, D' deux diviseurs de Cartier effectifs à supports disjoints, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_X(D')$, et s, s' les sections canoniques. Il existe un isomorphisme canonique $X_{(\mathcal{L},s,r)} \times_X X_{(\mathcal{L}',s',r)} \simeq X_{(\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}',s\otimes s',r)}$.*

Démonstration. Le morphisme canonique $X_{(\mathcal{L},s,r)} \times_X X_{(\mathcal{L}',s',r)} \to X_{(\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}',s\otimes s',r)}$ est un isomorphisme au dessus de $U = X - \operatorname{supp}(D)$ et $U' = X - \operatorname{supp}(D')$, qui par hypothèse recouvrent X.

□

3.2 Faisceaux inversibles sur ce champ

Sur $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ on dispose d'un faisceau inversible canonique $\mathcal{N}$ défini par $(f,\mathcal{M},t,\phi) \to \mathcal{M}$. Il est muni d'une section canonique $u : \mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}} \to \mathcal{N}$ définie localement par $t : \mathcal{O}_S \to \mathcal{M}$.

De plus, il existe un isomorphisme canonique $\psi : \mathcal{N}^{\otimes r} \simeq \pi^*\mathcal{L}$, défini localement par $\phi : \mathcal{M}^{\otimes r} \simeq f^*\mathcal{L}$, il vérifie $\psi(u^{\otimes r}) = \pi^* s$.

Lemme 3. *On suppose que* $\operatorname{div} s$ *est un diviseur de Cartier effectif. Pour tout entier* l *le morphisme naturel :*

$$\mathcal{L}^{\otimes[l/r]} \to \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes l})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après la formule de projection, on a pour tout entiers a, b : $\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes ar+b}) \simeq \mathcal{L}^{\otimes a}\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes b})$, on peut donc se contenter de montrer la formule pour r entiers consécutifs.

Soit $0 < l \leq r$. La suite exacte

$$0 \to \mathcal{N}^{\otimes -l} \to \mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}} \to \mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}/\mathcal{N}^{\otimes -l} \to 0$$

correspond localement à une suite de $\boldsymbol{\mu}_r$-faisceaux

$$0 \to \frac{t^l R[t]}{t^r - s} \to \frac{R[t]}{t^r - s} \to \frac{R/s[t]}{t^l} \to 0$$

En prenant les fixes il vient

$$0 \to (\frac{t^l R[t]}{t^r - s})^{\boldsymbol{\mu}_r} \to R \to R/s \to 0$$

Comme s est l'équation locale définissant $\mathcal{L}$, on en déduit que $\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l}) = \mathcal{L}^{\otimes -1}$, d'où la conclusion.

□

3.3 Faisceaux localement libres sur ce champ

Pour $\mathfrak{X}$ un champ de Deligne-Mumford sur le schéma X, un faisceau localement libre sur $\mathfrak{X}$ est par définition un morphisme de champs $\mathfrak{X} \to \mathcal{VECT}\,X$, où $\mathcal{VECT}\,X$ est le champ des faisceaux localement libres sur X. On note $\operatorname{Vect}\mathfrak{X}$ la catégorie des faisceaux localement libres sur $\mathfrak{X}$.

3.3.1 Situation locale

Proposition 3. *On suppose que* $\operatorname{div} s$ *est un diviseur de Cartier effectif. Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau localement libre sur* $X_{(\mathcal{L},s,r)}$*. Pour tout point* x *de* X*, il existe un voisinage* U *(pour la topologie de Zariski) de* x *tel que* $\mathcal{F}_{|\pi^{-1}U}$ *est une somme de faisceaux inversibles.*

Démonstration. D'après le corollaire 1, on peut identifier $X_{(\mathcal{L},s,r)} \to X$ à $[(\operatorname{Spec} R[t]/(t^r - s))|\boldsymbol{\mu}_r] \to \operatorname{Spec} R$, pour R un anneau, s un élément de R ne divisant pas zéro. Soit $R' = R[t]/(t^r - s)$. La donnée de $\mathcal{F}$ équivaut à celle d'un R'-module libre M, avec une $\mathbb{Z}/r$-graduation compatible avec celle de R' et l'action de R' sur M, on la notera $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_{r-1}$.

On peut de plus supposer que R est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Si $s \notin \mathfrak{m}$ il n'y a rien à démontrer, puisque alors $\boldsymbol{\mu}_r$ agit librement sur $\operatorname{Spec} R[t]/(t^r - s)$ et donc $[(\operatorname{Spec} R[t]/(t^r - s))|\boldsymbol{\mu}_r] \simeq \operatorname{Spec} R$.

On peut donc supposer que $s \in \mathfrak{m}$. Alors $R' = R[t]/(t^r - s)$ est aussi local. En effet, si $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de R', alors R'/R étant finie, on a $R \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{m}$, et donc $s \in \mathfrak{n}$. Donc $t \in \mathfrak{n}$, et $\mathfrak{n}$ peut-être vu comme un idéal maximal de R'/t, comme $R'/t \simeq R/s$ est local, $\mathfrak{n}$ est unique.

Notons que pour l entier, on a un isomorphisme naturel de R'-modules gradués $R'[l] \simeq t^l R'$, en particulier pour $l = 1$ on obtient un isomorphisme :

$$\frac{M}{tM} \simeq \oplus_j \frac{M_j}{M_{j+1}}$$

de R'/t-modules libres, respectant la graduation. Pour chaque j, choisissons un n_j-uplet $(e_1^j, \cdots, e_{n_j}^j)$ dans M_j tel que son image forme une base de $\frac{M_j}{M_{j+1}}$, et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ le n-uplet obtenu par concaténation.

Comme $M_j \simeq \operatorname{Hom}_{R'}(R'[j], M)$ (morphismes de R'-modules gradués) ce n-uplet définit un morphisme de R'-modules gradués

$$\oplus_j R'[j]^{\oplus n_j} \to M$$

Comme R' est local, et $t \in \mathfrak{n}$, le lemme de Nakayama implique que ce morphisme est surjectif. Comme les deux R'-modules sont libres de même rang ce doit être un isomorphisme de R'-modules, et donc un isomorphisme de R'-modules gradués.

□

3.3.2 Situation globale

Théorème 4. *Soit r un entier naturel, $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[r^{-1}]$ un schéma noethérien, D un diviseur de Cartier effectif, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, s la section canonique, alors le foncteur F :*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Vect}(X_{(\mathcal{L},s,r)}) & \longrightarrow & \operatorname{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D) \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & ((\tfrac{1}{r}\mathbb{Z})^{op} \longrightarrow \operatorname{Vect}(X)) \\ & & \tfrac{l}{r} \longrightarrow \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \mathcal{F}) \end{array}$$

est une équivalence de catégories tensorielles.

3.4 Preuve

3.4.1 F est bien défini

Lemme 4. *Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ localement libre sur $X_{(\mathcal{L},s,r)}$, le foncteur $\frac{l}{r} \to \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \mathcal{F})$ définit un r-fibré parabolique sur (X, D).*

Démonstration. Posons $\mathcal{E}_{\frac{l}{r}} = \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \mathcal{F})$. Il s'agit de voir que $\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}$ est localement libre sur X et que pour $l \leq l' < l+r$, $\operatorname{coker}(\mathcal{E}_{\frac{l'}{r}} \to \mathcal{E}_{\frac{l}{r}})$ est localement libre comme $\mathcal{O}_D$-module. Ce sont des affirmations locales sur X. En trivialisant $\mathcal{L}$ on se ramène au cas où $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ est un champ quotient issu d'un revêtement cyclique uniforme, comme dans le corollaire 1, et on peut alors appliquer la proposition 1.

□

3.4.2 Définition d'un foncteur quasi-inverse G

Pour les bouts, voir l'appendice B.

Proposition 4. *Soit $\mathcal{E}. \in \operatorname{obj} \operatorname{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$.*

Le bout universel $\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})$ existe dans $\operatorname{Vect}(X_{(\mathcal{L},s,r)})$.

Démonstration. On commence par remarquer que la question a un sens : en effet $(\frac{l}{r}, \frac{l'}{r}) \to \mathcal{N}^{\otimes l'} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})$ définit un foncteur de variance mixte $(\frac{1}{r}\mathbb{Z})^{op} \times \frac{1}{r}\mathbb{Z} \to \operatorname{Vect}(X_{(\mathcal{L},s,r)})$, la contravariance en la première variable venant de la structure de r-faisceau parabolique de $\mathcal{E}.$, et la covariance en la seconde venant de la multiplication par une puissance convenable de $u : \mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}} \to \mathcal{N}$.

Un bout universel est une colimite ([15]), et on peut donc la construire localement : en effet, le caractère universel des limites locales rend les conditions de recollement automatiques. Plus précisément, on utilise le lemme folklorique suivant, qu'on donne ici sans démonstration.

Lemme 5. *Soit $\mathfrak{X}$ un champ algébrique, $\mathcal{E} : I \to \operatorname{Vect} \mathfrak{X}$ un diagramme, $(\mathfrak{X}_\alpha \to \mathfrak{X})_\alpha$ un recouvrement par des ouverts. Si*

$$\varinjlim_{I} \mathcal{E}_{i|\mathfrak{X}_\alpha}$$

existe dans $\operatorname{Vect} \mathfrak{X}_\alpha$ pour tout α, alors

$$\varinjlim_{I} \mathcal{E}_i$$

existe dans $\operatorname{Vect} \mathfrak{X}$.

Grâce au théorème 1, en raisonnant localement sur X, on peut donc se contenter de montrer l'existence de $\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})$ lorsque $\mathcal{E}. = \underline{\mathcal{O}_X}.[\frac{m}{r}]$, i.e. $\mathcal{E}.$ est un décalé du faisceau structurel muni de la structure spéciale. Or $\underline{\mathcal{O}_X}.[\frac{m}{r}]$ est défini sur les objets par $(\underline{\mathcal{O}_X}.[\frac{m}{r}])_{\frac{l}{r}} = \mathcal{L}^{\otimes [-\frac{l+m}{r}]}$ et sur les flèches par multiplication par une puissance convenable de $s : \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$. Il reste à prouver le lemme suivant :

Lemme 6.
$$\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*\mathcal{L}^{\otimes[-\frac{l+m}{r}]} \simeq \mathcal{N}^{\otimes -m}$$

Démonstration. L'isomorphisme $\psi : \mathcal{N}^{\otimes r} \simeq \pi^*\mathcal{L}$, et la relation $\psi(u^{\otimes r}) = \pi^* s$, montrent que les foncteurs $(l, l') \to \mathcal{N}^{\otimes l'} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*\mathcal{L}^{\otimes[-\frac{l+m}{r}]}$ et $(l, l') \to \mathcal{N}^{\otimes l' + r[-\frac{l+m}{r}]}$ sont isomorphes (les flèches du second sont définies par multiplication par une puissance convenable de $u : \mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}} \to \mathcal{N}$). Or pour tout l entier on a : $-m-r < l + r[-\frac{l+m}{r}] \leq -m$, et la multiplication par u fournit un morphisme $\mathcal{N}^{\otimes l + r[-\frac{l+m}{r}]} \to \mathcal{N}^{\otimes -m}$, évidemment dinaturel. Comme $l + r[-\frac{l+m}{r}]$ prend la valeur $-m$ lorsque l varie, ce bout est universel, d'où $\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l + r[-\frac{l+m}{r}]} \simeq \mathcal{N}^{\otimes -m}$, et la conclusion. □

□

La proposition 4 permet de poser $G(\mathcal{E}.) = \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})$. La dinaturalité du bout rend cette expression fonctorielle en $\mathcal{E}.$, si bien qu'on a défini un foncteur $G : \mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D) \to \mathrm{Vect}(X_{(\mathcal{L},s,r)})$.

3.4.3 Preuve de l'équivalence

$\boxed{G \circ F \simeq 1}$

On doit construire un isomorphisme

$$\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \mathcal{F}) \to \mathcal{F}$$

naturel en $\mathcal{F} \in \mathrm{obj}\,\mathrm{Vect}(X_{(\mathcal{L},s,r)})$.

L'existence d'un morphisme naturel est donné par le lemme suivant.

Lemme 7. *Soit* $adj : \mathrm{Hom}(\pi^*\mathcal{E}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \pi_*\mathcal{F})$ *le morphisme d'adjonction. La famille de morphismes*

$$1 \otimes adj^{-1}(1) : \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \mathcal{F}) \to \mathcal{F}$$

est dinaturelle en $l \in \mathrm{obj}\,\mathbb{Z}$.

Démonstration. Il s'agit de voir la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{F}) \arrow[dr, "1\otimes adj^{-1}(1)"] & \\ \mathcal{N}^{\otimes l'} \otimes \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{F}) \arrow[ur, "u^{l-l'}\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes \pi^*\pi_*(u^{l-l'}\otimes 1)"'] & & \mathcal{F} \\ & \mathcal{N}^{\otimes l'} \otimes \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l'} \otimes \mathcal{F}) \arrow[ur, "1\otimes adj^{-1}(1)"'] & \end{tikzcd}$$

ou de manière équivalente celle du diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{N}^{\otimes l-l'} \otimes \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{F}) \arrow[dr, "1\otimes adj^{-1}(1)"] & \\
\pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{F}) \arrow[ur, "u^{l-l'}"] \arrow[dr, "\pi^*\pi_*(u^{l-l'}\otimes 1)"'] & & \mathcal{N}^{\otimes -l'} \otimes \mathcal{F} \\
 & \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l'} \otimes \mathcal{F}) \arrow[ur, "adj^{-1}(1)"'] &
\end{tikzcd}$$

ce qui équivaut encore à celle du diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{F} \arrow[dr, "u^{l-l'}\otimes 1"] & \\
\pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes \mathcal{F}) \arrow[ur, "adj^{-1}(1)"] \arrow[dr, "\pi^*\pi_*(u^{l-l'}\otimes 1)"'] & & \mathcal{N}^{\otimes -l'} \otimes \mathcal{F} \\
 & \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l'} \otimes \mathcal{F}) \arrow[ur, "adj^{-1}(1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Or adj envoie ces deux flèches sur $\pi_*(u^{l-l'} \otimes 1)$, d'où la conclusion. $\square$

Vérifier que le morphisme naturel : $\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \mathcal{F}) \to \mathcal{F}$ est un isomorphisme est une question locale, et on peut donc supposer que $X = \operatorname{Spec} R$, où R est un anneau local. On peut aussi supposer que $\mathcal{F}$ est un faisceau inversible d'après la proposition 3. Or R étant local, $\operatorname{Pic}(X_{(\mathcal{L},s,r)})$ est cyclique d'ordre r, et engendré par $\mathcal{N}$. On peut donc prendre $\mathcal{F} = \mathcal{N}^{\otimes -m}$.

Finalement d'après le lemme 3 $\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes \pi^*\pi_*\mathcal{N}^{\otimes -l-m} \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes \pi^*\mathcal{L}^{\otimes[-\frac{l+m}{r}]}$ et on peut conclure à l'aide du lemme 6.

$\boxed{F \circ G \simeq 1}$

On doit montrer l'existence d'un inverse pour le morphisme naturel :

$$\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -m} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})) \leftarrow \mathcal{E}_{\frac{m}{r}}$$

Le foncteur $\mathcal{N}^{\otimes -l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \cdot$ étant une équivalence on a :

$$\pi_*(\mathcal{N}^{\otimes -m} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})) \simeq \pi_*(\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l-m} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}))$$

Comme $\boldsymbol{\mu}_r$ est diagonalisable, π_* est exact à droite, et commute aux sommes finies, donc aux colimites finies, et on a donc :

$$\pi_*(\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l-m} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})) \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes l-m} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}))$$

Comme $\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}$ est localement libre, on a d'après la formule de projection :

$$\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes l-m} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L},s,r)}}} \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}})) \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes l-m}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_{\frac{l}{r}}$$

Le lemme 3 donne

$$\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \pi_*(\mathcal{N}^{\otimes l-m}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_{\frac{l}{r}} \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes[\frac{l-m}{r}]} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_{\frac{l}{r}}$$

Finalement, $\mathcal{E}.$ est un fibré parabolique, donc muni d'un isomorphisme $\mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}. \simeq \mathcal{E}.[1]$, qui induit

$$\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes[\frac{l-m}{r}]} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_{\frac{l}{r}} \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{E}_{\frac{l}{r}-[\frac{l-m}{r}]}$$

Finalement le fait que le morphisme naturel

$$\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{E}_{\frac{l}{r}-[\frac{l-m}{r}]} \leftarrow \mathcal{E}_{\frac{m}{r}}$$

est un isomorphisme résulte du fait que $\frac{l}{r} - [\frac{l-m}{r}]$ prend la valeur $\frac{m}{r}$ lorsque l varie, et de l'unicité des bouts universels.

3.4.4 Preuve du caractère tensoriel

D'après [20], I 4.4 on peut se contenter de montrer que le foncteur G est compatible avec le produit tensoriel. On commence par réinterpréter le produit tensoriel des fibrés paraboliques en termes de bout.

Lemme 8. *Soient $\mathcal{E}.$, $\mathcal{E}'.$ deux objets de* $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$. *Alors*

$$(\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'.)_{\frac{l}{r}} \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{E}_{\frac{m}{r}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'_{\frac{l-m}{r}}$$

Démonstration. D'après la remarque 1, on peut plonger $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$ comme une sous-catégorie pleine de la catégorie de foncteurs $\mathrm{Func}((\frac{1}{r}\mathbb{Z})^{op}, \mathrm{Qcoh}\, X)$, catégorie dans laquelle on peut donc calculer le produit tensoriel $\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'.$. La formule de convolution donnée résulte alors de [11], §4. □

Il s'agit de comparer

$$G(\mathcal{E}.) \otimes G(\mathcal{E}'.) = \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}}) \otimes \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l'} \otimes \pi^*(\mathcal{E}'_{\frac{l'}{r}}) \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l+l'} \otimes \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{l}{r}} \otimes \mathcal{E}'_{\frac{l'}{r}})$$

et

$$G(\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'.) = \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes \pi^*((\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'.)_{\frac{l}{r}}) \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes \pi^*(\int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{E}_{\frac{m}{r}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'_{\frac{l-m}{r}})$$

π^* est adjoint à gauche, donc commute aux colimites, et donc

$$G(\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'.) \simeq \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \int^{\frac{1}{r}\mathbb{Z}} \mathcal{N}^{\otimes l} \otimes \pi^*(\mathcal{E}_{\frac{m}{r}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}'_{\frac{l-m}{r}})$$

On peut donc conclure en appliquant le théorème de Fubini pour les bouts universels (théorème 7 de l'appendice B).

4 Degrés

Dans toute cette partie, on fixe $r \geq 1$ un entier naturel, X une variété projective lisse sur un corps k algébriquement clos de caractéristique première à r. On note $\mathcal{O}(1)$ un faisceau inversible très ample sur X. On se fixe de plus D un diviseur de Cartier effectif sur X, lisse sur k. On note n la dimension de X.

4.1 Définitions

4.1.1 Degré parabolique

Définition 8 ([16]). *Soit $\mathcal{E}.$ un objet de $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$, de rang ρ. On définit sa* caractéristique d'Euler parabolique *par :*

$$\chi_{par}(\mathcal{E}.) = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{r} \chi(X, \mathcal{E}_{\frac{l}{r}})$$

Son degré parabolique $\deg_{par}(\mathcal{E}.)$ *est par définition le nombre rationnel défini par :*

$$\deg_{par}(\mathcal{E}.) = (n-1)! \times \{\textit{coefficient de } m^{n-1} \textit{dans } \chi_{par}(\mathcal{E}.(m)) - \chi_{par}(\underline{\mathcal{O}_X}_{.}^{\oplus \rho}(m))\}$$

4.1.2 Degré sur un champ de Deligne-Mumford projectif

Définition 9. *Soit $\mathfrak{X} \to S$ un champ de Deligne-Mumford séparé, $\pi : \mathfrak{X} \to M$ le morphisme vers son espace des modules grossier, qu'on suppose projectif sur S, de dimension n, et muni d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}(1)$. On note alors, pour $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur $\mathfrak{X}$:*

$$\deg_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F}) = \int_{\mathfrak{X}}^{et} c_1^{et}(\mathcal{F}) \cdot \pi^* c_1^{et}(\mathcal{O}(1))^{n-1}$$

Pour des détails sur la théorie de l'intersection utilisée ici, on renvoie à C.2.1. Intuitivement on peut comprendre ceci de la manière suivante : $\pi^* : \mathrm{Pic}\, M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathrm{Pic}\, \mathfrak{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme, et l'on peut voir $\deg_{\mathfrak{X}}$ défini grâce à $\deg_M$.

4.1.3 Comparaison des deux notions

Théorème 5. *$r \geq 1$ un entier naturel, X une variété projective lisse sur k algébriquement clos de caractéristique première à r, $\mathcal{O}(1)$ un faisceau inversible très ample sur X, D un diviseur de Cartier effectif sur X, lisse sur k, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, s la section canonique, $\mathfrak{X} = X_{(\mathcal{L},s,r)}$ le champ des racines r-ièmes, $\mathcal{E}.$ un objet de $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$, $\mathcal{F} = G(\mathcal{E}.)$ le faisceau localement libre sur $\mathfrak{X}$ associé via la correspondance du théorème 4. Alors on a :*

$$\deg_{par}(\mathcal{E}.) = \deg_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F})$$

Remarque 5. *On peut écrire formellement* $\deg_{par}(\mathcal{E}.) = \int_{-1}^{0} \deg(\mathcal{E}_t)dt$*, ce qui a un sens, en définissant convenablement la mesure* dt*, ou bien en redéfinissant* $\mathcal{E}.$ *comme une fonction localement constante. On retrouve alors la définition 8. Malgré l'analogie des notations, je n'ai pas trouvé de démonstration simple du théorème 5 en inversant les signes* $\int$.

Corollaire 6. *Soient* $\mathcal{E}.$, $\mathcal{E}'.$ *deux objets de* $\mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$*. On a :*

$$\deg_{par}(\mathcal{E}. \otimes \mathcal{E}'.) = \mathrm{rk}\, \mathcal{E}.\, \deg_{par}(\mathcal{E}'.) + \mathrm{rk}\, \mathcal{E}'.\, \deg_{par}(\mathcal{E}.)$$

Remarque 6. *Lorsque* $\dim X = 1$*, ce corollaire est énoncé comme une facile (?) conséquence de la définition du produit tensoriel des fibrés paraboliques dans [6].*

4.2 Preuve

4.2.1 Expression champêtre de $\chi_{par}(\mathcal{E}.)$

Lemme 9. *Avec les notations du théorème 5, si de plus* $\mathcal{N}$ *est la racine* r*-ième canonique de* $\mathcal{L}$ *sur le champ* $\mathfrak{X} = X_{(\mathcal{L},s,r)}$*, on a alors :*

$$\chi_{par}(\mathcal{E}.) = \frac{1}{r}\chi(\mathfrak{X}, \mathcal{F} \otimes \oplus_{l=1}^{r} \mathcal{N}^{\otimes -l})$$

Démonstration. Il suffit d'observer que si $F : \mathrm{Vect}(X_{(\mathcal{L},s,r)}) \to \mathrm{Par}_{\frac{1}{r}}(X, D)$ désigne la correspondance du théorème 4, alors on a $F(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}^{\otimes -l}) = F(\mathcal{F})[\frac{l}{r}]$. □

Remarque 7. *On suppose que l'on est dans la situation du corollaire 4, i.e. que l'on dispose d'un morphisme* $p : Y \to \mathfrak{X}$*, où* Y *est un schéma, tel que le morphisme composé* $\pi \circ p : Y \to X$ *est un revêtement cyclique uniforme, induisant un isomorphisme* $[Y|\boldsymbol{\mu}_r] \simeq \mathfrak{X}$*. Alors la formule de projection et le lemme 9 donnent* $\chi_{par}(\mathcal{E}.) = \frac{1}{r}\chi(Y, p^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}^{\otimes -1}))$*, ce dont on conclut* $\deg_{par}(\mathcal{E}.) = \frac{1}{r}\deg_Y(p^*\mathcal{F})$ *(où* $\deg_Y(\cdot)$ *est pris relativement à l'image réciproque sur* Y *du fibré très ample* $\mathcal{O}(1)$ *sur* X*), d'où le théorème 5 dans ce cas. Toutefois, en l'absence d'une telle présentation de* $\mathfrak{X}$*, on est contraint de procéder autrement.*

4.2.2 Application de GRR

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford, du à B.Toën ([23], voir aussi appendice C), permet d'obtenir une première expression pour $\deg_{par}(\mathcal{E}.)$.

Précisons tout d'abord une notation : l'isomorphisme de schémas $I_X \simeq X$ (voir C.3.1) induit en cohomologie un isomorphisme d'algèbres $H^*_{et}(X) \simeq H^*_{et}(I_X) = H^*_{rep}(X)$, et pour $x \in K_0(X)$, on notera $c_i^{rep}(x)$ l'image de $c_i^{et}(x)$ par cet isomorphisme (c'est seulement dans ce cas que l'on s'autorisera à parler de classes de Chern à coefficients dans les représentations).

Lemme 10.

$$\deg_{par}(\mathcal{E}.) = \frac{1}{r}\int_{\mathfrak{X}}^{rep} \mathrm{td}^{rep}(\mathfrak{X})\cdot(\mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{F})-\mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^{\oplus\rho}))\cdot\mathrm{ch}^{rep}(\oplus_{l=1}^{r}\mathcal{N}^{\otimes -l})\cdot\pi^* c_1^{rep}(\mathcal{O}(1))^{n-1}$$

Démonstration. On note tout d'abord que puisque $\mathcal{F} = G(\mathcal{E}.)$, on a $G(\mathcal{E}.(m)) \simeq \mathcal{F}\otimes\pi^*\mathcal{O}(m)$. D'après les corollaires 2, 5, le morphisme $\mathfrak{X}\to \operatorname{Spec} k$ est propre et lisse. La formule donnée est donc une conséquence directe de la définition 8, du lemme 9, du corollaire 7 de l'appendice C, et de l'expression standard

$$\mathrm{ch}^{et}(\mathcal{O}(m)) = \sum_{l=0}^{n} c_1^{et}(\mathcal{O}(1))^l \frac{m^l}{l!}$$

□

Posons pour simplifier

$$x = \mathrm{td}^{rep}(\mathfrak{X})\cdot(\mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{F})-\mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^{\oplus\rho}))\cdot\mathrm{ch}^{rep}(\oplus_{l=1}^{r}\mathcal{N}^{\otimes -l})\cdot\pi^* c_1^{rep}(\mathcal{O}(1))^{n-1}$$

On sait d'après C.4.3 que :

$$\int_{\mathfrak{X}}^{rep} x = \int_{I_{\mathfrak{X}}}^{et} x = \int_{\mathfrak{X}}^{et} x_1 + \int_{I_{\mathfrak{X}}-\mathfrak{X}}^{et} x_{\neq 1}$$

Le premier terme se laisse facilement calculer :

Lemme 11.

$$\int_{\mathfrak{X}}^{et} x_1 = r\deg_{\mathfrak{X}}\mathcal{F}$$

Démonstration. Rappelons que $y \to y_1$ est un morphisme d'anneaux. Le lemme résulte donc des lemmes 16 et 17 de l'appendice C, ainsi que du fait facile $(\pi^* c_1^{rep}(\mathcal{O}(1))^{n-1})_1 = \pi^* c_1^{et}(\mathcal{O}(1))^{n-1}$. □

Le théorème 5 résultera donc de la preuve de $\int_{I_{\mathfrak{X}}-\mathfrak{X}}^{et} x_{\neq 1} = 0$.

4.2.3 Étude du champ d'inertie

Pour analyser l'expression ci-dessus on a besoin de comprendre la géométrie du champ d'inertie $I_{\mathfrak{X}}$ (voir C.3.1) du champ $\mathfrak{X} = X_{(\mathcal{L},s,r)}$. Pour ceci, on peut travailler dans un cadre plus général.

On fixe un entier r, et comme schéma de base $S_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[r^{-1}](\boldsymbol{\mu}_r))$. Donné un schéma noethérien $X \to S$, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X, on peut lui associer sa gerbe (sur X) des racines r-ièmes de la manière suivante : on reprend la définition de $X_{(\mathcal{L},s,r)}$ en oubliant la condition sur les sections, c'est-à-dire :

Définition 10 ([10])**.** *On définit une catégorie $X_{(\mathcal{L},r)}$ fibrée en groupoïdes sur S par*

1. *les objets de $X_{(\mathcal{L},r)}$ sont les triplets $(f, \mathcal{M}, \phi)$ où $f : S \to X$ est un morphisme de schémas, $\mathcal{M}$ un faisceau inversible sur S, et $\phi : \mathcal{M}^{\otimes r} \simeq f^*\mathcal{L}$ un isomorphisme,*
2. *les morphismes de $(f, \mathcal{M}, \phi)$ à $(g, \mathcal{N}, \psi)$ (tous deux au dessus de S) sont les isomorphisme de faisceaux $\nu : \mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ tels que $\psi \circ \nu^{\otimes r} = \phi$.*

On peut à présent énoncer une proposition à propos de $I_{\mathfrak{X}}$:

Proposition 5. *Soit r un entier, X un schéma noethérien sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[r^{-1}](\boldsymbol{\mu}_r))$, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X, s une section globale de $\mathcal{L}$, $D = Z(s)$ le lieu des zéros, $\mathfrak{X} = X_{(\mathcal{L},s,r)}$ le champ des racines r-ièmes de $\mathcal{L}$ sur X, $\mathfrak{D} = D_{(\mathcal{L}_{|D},r)}$ la gerbe des racines r-ièmes de $\mathcal{L}_{|D}$ sur D. On a alors un isomorphisme canonique :*

$$I_{\mathfrak{X}} \simeq \mathfrak{X} \coprod \mathfrak{D}^{\amalg \boldsymbol{\mu}_r(S_0)-\{1\}}$$

Démonstration. On note tout d'abord qu'on a un morphisme canonique $\mathfrak{i} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{X}$ composé des morphismes évidents $D_{(\mathcal{L}_{|D},r)} \to D_{(\mathcal{L}_{|D},0,r)}$ et de $D_{(\mathcal{L}_{|D},0,r)} \to X_{(\mathcal{L},s,r)}$, comme les deux sont des immersions fermées ($D_{(\mathcal{L}_{|D},0,r)}$ est le r-ième voisinage infinitésimal de $D_{(\mathcal{L}_{|D},r)}$ dans $X_{(\mathcal{L},s,r)}$, voir [10]) $\mathfrak{D} \to \mathfrak{X}$ l'est aussi. Il en résulte un morphisme canonique $I_{\mathfrak{D}} \to I_{\mathfrak{X}}$, c'est d'ailleurs également une immersion fermée (car en fait obtenue par changement de base à partir de la précédente).

On note d'autre part qu'on a un morphisme canonique $I_{\mathfrak{X}} \to \boldsymbol{\mu}_{r,S}$. En effet soit un objet $(f, \mathcal{M}, t, \phi)$ de $\mathfrak{X}$ au dessus de $f : S \to X$, alors l'isomorphisme canonique $a_{\mathcal{M}} : \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \simeq \mathcal{O}_S$ induit un morphisme de schémas en groupes sur S :

$$\underline{\mathrm{Aut}}_S(f, \mathcal{M}, t, \phi) \to \boldsymbol{\mu}_{r,S}$$

On en déduit le morphisme recherché, en associant à l'objet $((f, \mathcal{M}, t, \phi), \nu)$ de $I_{\mathfrak{X}}$ au dessus de $f : S \to X$ l'élément $a_{\mathcal{M}}(S)(\nu)$ de $\boldsymbol{\mu}_r(S)$.

Pour $\zeta : S_0 \to \boldsymbol{\mu}_{r,S}$ on note $I_{\mathfrak{D}}^{\zeta} \to I_{\mathfrak{X}}^{\zeta}$ la fibre correspondante de $I_{\mathfrak{D}} \to I_{\mathfrak{X}}$. Vu le choix de la base S_0, $\boldsymbol{\mu}_{r,S}$ est constant sur S_0, et donc $I_{\mathfrak{X}} = \coprod_{\zeta \in \boldsymbol{\mu}_r(S_0)} I_{\mathfrak{X}}^{\zeta}$. Il est clair que $I_{\mathfrak{X}}^1$ est l'image de la section canonique $\mathfrak{X} \to I_{\mathfrak{X}}$. On vérifie d'autre part facilement que pour tout ζ dans $\boldsymbol{\mu}_r(S_0)$, le composé $I_{\mathfrak{D}}^{\zeta} \to I_{\mathfrak{D}} \to \mathfrak{D}$ est un isomorphisme (on a un inverse évident). Il reste donc à vérifier que pour $\zeta \neq 1$ dans $\boldsymbol{\mu}_r(S_0)$, le morphisme $I_{\mathfrak{D}}^{\zeta} \to I_{\mathfrak{X}}^{\zeta}$ est un isomorphisme. Au dessus de S, ce morphisme est donné par $((g, \mathcal{M}, \phi), \nu) \to ((i \circ g, \mathcal{M}, 0, \phi), \nu)$ où $g : S \to D$ est un morphisme de schémas et $i : D \to X$ est l'inclusion canonique. Ceci définit clairement un foncteur fidèlement plein $I_{\mathfrak{D}}^{\zeta}(S) \to I_{\mathfrak{X}}^{\zeta}(S)$. Pour vérifier qu'il est essentiellement surjectif, on fixe un objet $((f, \mathcal{M}, t, \phi), \nu)$ dans $I_{\mathfrak{X}}^{\zeta}(S)$. Donc $a_{\mathcal{M}}(S)(\nu)$ vaut ζ sur chaque composante connexe de S, et comme $1 - \zeta$ est inversible sur S_0, $\mathrm{id} - \rho$ est inversible. On déduit alors de $\rho(t) = t$ le fait que $t = 0$, et en conséquence $f^*s = t^{\otimes r} = 0$, donc $f : S \to X$ se factorise à travers $i : D \to X$, comme souhaité.

□

4.2.4 Réduction

Il résulte de la proposition 5 que l'immersion fermée $\mathfrak{i} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{X}$ induit un isomorphisme $\tilde{\mathfrak{i}} = I\mathfrak{i}_{|I_{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}} : I_{\mathfrak{D}} - \mathfrak{D} \to I_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}$ et donc

$$\int_{I_{\mathfrak{X}}-\mathfrak{X}}^{et} x_{\neq 1} = \int_{I_{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}}^{et} \tilde{\mathfrak{i}}^*(x_{\neq 1}) = \int_{I_{\mathfrak{D}}-\mathfrak{D}}^{et} (\mathfrak{i}^* x)_{\neq 1}$$

Or il est clair que $\int_{\mathfrak{D}}^{et}(\mathfrak{i}^*x)_1 = 0$, en effet ceci résulte du fait que $\dim \mathfrak{D} = n-1$, de $(\mathfrak{i}^*\pi^* c_1^{rep}(\mathcal{O}(1))^{n-1})_1 = \mathfrak{i}^*\pi^* c_1^{et}(\mathcal{O}(1))^{n-1}$, et du lemme 16 qui entraîne $(\mathrm{ch}^{rep}(\mathfrak{i}^*\mathcal{F}) - \mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}^{\oplus\rho}))_1 = \mathrm{ch}^{et}(\mathfrak{i}^*\mathcal{F}) - \mathrm{ch}^{et}(\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}^{\oplus\rho})$, expression dont la composante de degré 0 est nulle. On conclut que $\int_{I_{\mathfrak{X}}-\mathfrak{X}}^{et} x_{\neq 1} = \int_{\mathfrak{D}}^{rep} \mathfrak{i}^* x$, et il ne reste donc qu'à montrer la nullité de cette dernière expression.

Cela résultera du lemme suivant. Remarquons que d'après preuve de la proposition 5, il existe un isomorphisme canonique $I_{\mathfrak{D}} \simeq \mathfrak{D}^{\amalg \boldsymbol{\mu}_r(S_0)}$, qui induit un isomorphisme $H^*_{rep}(\mathfrak{D}) \simeq H^*_{et}(\mathfrak{D})^{\boldsymbol{\mu}_r(S_0)}$.

Lemme 12. *Soit χ le caractère de la représentation canonique $\boldsymbol{\mu}_r \subset \mathbb{G}_m$, et $\Lambda = \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_\infty)$. Pour tout entier $l \in \mathbb{Z}$, l'isomorphisme canonique $H^*_{rep}(\mathfrak{D})_\Lambda \simeq H^*_{et}(\mathfrak{D})_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}_r(S_0)}$ envoie $\mathrm{ch}^{rep}(\mathfrak{i}^*\mathcal{N}^{\otimes l})$ sur $\chi^l\,\mathrm{ch}^{et}(\mathfrak{i}^*\mathcal{N}^{\otimes l})$.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{i}^*\mathcal{N} = \mathcal{N}_{|\mathfrak{D}}$, et $\pi_{\mathfrak{D}} : I_{\mathfrak{D}} \to \mathfrak{D}$ la projection canonique. Pour calculer $\mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{N}_{|\mathfrak{D}}^{\otimes l})$ on doit essentiellement déterminer la décomposition de $\pi_{\mathfrak{D}}^*\mathcal{N}_{|\mathfrak{D}}^{\otimes l}$ en sous-fibrés propres. On note celle-ci

$$\pi_{\mathfrak{D}}^*\mathcal{N}_{|\mathfrak{D}}^{\otimes l} = \oplus_{\zeta' \in \boldsymbol{\mu}_\infty} (\pi_{\mathfrak{D}}^*\mathcal{N}_{|\mathfrak{D}}^{\otimes l})^{(\zeta')}$$

Le lemme alors résulte de la définition de $\mathrm{ch}^{rep}(\cdot)$ (et plus particulièrement de celle du caractère de Frobénius C.3.2) et du sous-lemme :

Lemme 13.

$$(\pi_{\mathfrak{D}}^*\mathcal{N}_{|\mathfrak{D}}^{\otimes l})^{(\zeta')}_{|I_{\mathfrak{D}}^{\zeta}} = \begin{cases} \mathcal{N}_{|I_{\mathfrak{D}}^{\zeta}}^{\otimes l} & \text{si } \zeta' = \zeta^l \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. C'est à peu près tautologique vu que l'action de ζ (vu comme automorphisme de $\mathfrak{D}$) sur $\mathcal{N}_{|I_{\mathfrak{D}}^{\zeta}}$ se fait par multiplication par ζ (vu comme élément de Λ), et ceci d'après les définitions de $I_{\mathfrak{D}}$ et $\mathcal{N}$. □

□

On peut achever la démonstration du théorème 5. En effet, le lemme 12 implique que l'image de $\mathrm{ch}^{rep}(\oplus_{l=1}^r \mathfrak{i}^*\mathcal{N}^{\otimes -l})$ par le morphisme d'anneaux composé $H^*_{rep}(\mathfrak{D})_\Lambda \simeq H^*_{et}(\mathfrak{D})_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}_r(S_0)} \to H^0_{et}(\mathfrak{D})_\Lambda^{\boldsymbol{\mu}_r(S_0)}$ est le caractère de la représentation régulière de $\boldsymbol{\mu}_r$. D'autre part, le lemme 16 montre que l'image de $(\mathrm{ch}^{rep}(\mathfrak{i}^*\mathcal{F}) - \mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}^{\oplus\rho}))$ par ce même morphisme s'annule en 1. On en conclut que le produit $\mathrm{ch}^{rep}(\oplus_{l=1}^r \mathfrak{i}^*\mathcal{N}^{\otimes -l}) \cdot (\mathrm{ch}^{rep}(\mathfrak{i}^*\mathcal{F}) - \mathrm{ch}^{rep}(\mathcal{O}_{\mathfrak{D}}^{\oplus\rho}))$ s'envoie sur 0 par $H^*_{rep}(\mathfrak{D})_\Lambda \to H^0_{rep}(\mathfrak{D})_\Lambda$, ce qui suffit à montrer que $\int_{\mathfrak{D}}^{rep} \mathfrak{i}^* x = 0$, comme souhaité.

5 Fibrés paraboliques sur les courbes

Dans cette partie, on fixe $r \geq 1$ un entier, X une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos k, D un diviseur effectif réduit sur X, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, $s = s_D$ la section canonique, $\mathfrak{X} = X_{(\mathcal{L},s,r)}$ le champ des racines r-ièmes.

5.1 Fibrés paraboliques semi-stables

Définition 11. *Soit $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ deux faisceaux localement libres sur $\mathfrak{X}$, et $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ un monomorphisme. On dit que $\mathcal{F}'$ est un* sous-fibré *de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ est localement libre.*

Remarque 8. *Pour conserver un vocabulaire symétrique (alors que la situation ne l'est pas !) on parlera de* fibré quotient *pour tout faisceau localement libre $\mathcal{F}''$ quotient de $\mathcal{F}$.*

Définition 12. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur $\mathfrak{X}$. On définit sa* pente *par $\mu(\mathcal{F}) = \deg_{\mathfrak{X}} \mathcal{F}/\operatorname{rk}\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est* semi-stable *s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

1. *pour tout sous-fibré $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$, on a $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$,*
2. *pour tout fibré quotient $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}$, on a $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{F}'')$.*

Définition 13. *Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ deux faisceaux localement libres sur $\mathfrak{X}$, et $i : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ un monomorphisme. On désigne par $\mathcal{F}'^{\hookrightarrow \mathcal{F}}$ le plus petit sous-fibré de $\mathcal{F}$ contenant $\mathcal{F}'$.*

On peut définir $\mathcal{F}'^{\hookrightarrow \mathcal{F}}$ de manière équivalente par $\mathcal{F}'^{\hookrightarrow \mathcal{F}} = \ker(\mathcal{F} \twoheadrightarrow \operatorname{coker} i/\mathcal{T}(\operatorname{coker} i))$, où $\mathcal{T}(\cdot)$ désigne le sous-faisceau de torsion. Donc l'injection $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}'^{\hookrightarrow \mathcal{F}}$ est génériquement un isomorphisme, et en particulier $\operatorname{rk}\mathcal{F}'^{\hookrightarrow \mathcal{F}} = \operatorname{rk}\mathcal{F}'$. De plus, si $\pi : \mathfrak{X} \to X$ désigne la projection canonique, on a : $\pi_*(\mathcal{F}'^{\hookrightarrow \mathcal{F}}) = (\pi_*\mathcal{F}')^{\hookrightarrow \pi_*\mathcal{F}}$.

Lemme 14. *Avec les notations de la définition 13 on a : $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F}'^{\hookrightarrow \mathcal{F}})$*

Démonstration. Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 15. *Soit $\mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ un monomorphisme de faisceaux inversibles sur $\mathfrak{X}$. Alors $\deg_{\mathfrak{X}} \mathcal{K}' \leq \deg_{\mathfrak{X}} \mathcal{K}$.*

Démonstration. On peut supposer que $\mathcal{K}' = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Notons $D = P_1 + \cdots P_m$, où les P_i sont les points de X dans le support de D, $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_X(P_i)$ et s_i les sections canoniques correspondantes. D'après le lemme 2, on a $\mathfrak{X} \simeq X_{\mathcal{L}_1,s_1,r} \times_X \cdots \times_X X_{\mathcal{L}_m,s_m,r}$. Soit $\mathcal{N}_i$ l'image réciproque de la racine r-ième canonique de $\mathcal{L}_i$ par le morphisme $\mathfrak{X} \to X_{\mathcal{L}_i,s_i,r}$. On peut vérifier de manière élémentaire l'existence d'entiers r_i, $1 \leq i \leq m$, tels que $\mathcal{K} \simeq \pi^*\pi_*\mathcal{K} \otimes \otimes_{i=1}^m \mathcal{N}_i^{\otimes r_i}$ (ou encore utiliser le théorème 4). D'après le lemme 3, chaque r_i est un entier compris entre 0 et $r-1$, uniquement déterminé par cette écriture. Le monomorphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{K}$ donne en projection un monomorphisme $\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{K}$, et le théorème de Riemann-Roch sur X implique $\deg_X \pi_*\mathcal{K} \geq 0$. Donc $\deg_{\mathfrak{X}} \mathcal{K} = \deg_X \pi_*\mathcal{K} + \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{r} \geq 0$.

□

Remarque 9. *Pour mesurer le confort donné par les champs, on pourra comparer cette preuve à sa version parabolique dans [8], Lemma 3.7.*

□

Définition 14. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur $\mathfrak{X}$.*

1. *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur X et $\mathcal{E} \to \pi_*\mathcal{F}$ un monomorphisme vers le faisceau sous-jacent à $\mathcal{F}$. On appelle* sous-fibré induit par *$\mathcal{E}$ le sous-fibré de $\mathcal{F}$: $\pi^*\mathcal{E}^{\hookrightarrow \mathcal{F}}$.*
2. *Soit $\mathcal{E}'$ un faisceau localement libre sur X qui est quotient $\pi_*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{E}'$ du faisceau sous-jacent à $\mathcal{F}$. On appelle* fibré quotient induit par *$\mathcal{E}'$ et on note $\pi^*\mathcal{E}'_{\twoheadleftarrow \mathcal{F}}$ le fibré quotient de $\mathcal{F}$: $\mathrm{coker}(\pi^*\mathcal{E}^{\hookrightarrow \mathcal{F}} \to \mathcal{F})$, où $\mathcal{E} = \ker(\pi_*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{E}')$.*

Remarque 10.

1. *Il est clair que $\pi_*(\pi^*\mathcal{E}^{\hookrightarrow \mathcal{F}}) = \mathcal{E}^{\hookrightarrow \pi_*\mathcal{F}}$ et $\pi_*(\pi^*\mathcal{E}'_{\twoheadleftarrow \mathcal{F}}) = \mathcal{E}'$. Il est facile de se convaincre qu'on retrouve les notions de sous-fibré parabolique induit et fibré parabolique quotient induit de [21], voir définitions 18 et 19 de l'appendice A.*
2. *Le théorème 5 et la remarque 12 de l'appendice A montrent que $\mathcal{F}$ est semi-stable si et seulement si le faisceau parabolique $\mathcal{E}.$ sur (X, D) associé est semi-stable au sens de Seshadri.*

5.2 Fibrés paraboliques finis

Définition 15 ([18])**.** *Un faisceau localement libre $\mathcal{F}$ sur $\mathfrak{X}$ est dit* fini *s'il existe deux polynômes* distincts *$P, Q \in \mathbb{N}[X]$ tels que $P(\mathcal{F}) \simeq Q(\mathcal{F})$.*

Proposition 6. *Tout faisceau localement libre fini sur $\mathfrak{X}$ est semi-stable de degré 0.*

Démonstration. La preuve est mot pour mot celle des courbes usuelles [18], §3, grâce à l'aide du lemme 14. □

On suppose désormais que $X = \mathbb{P}^1$, la droite projective, et que $D = P_1 + \cdots + P_m$.

Théorème 6. *Soit $\mathcal{E}.$ un fibré parabolique* fini *sur $(\mathbb{P}^1, D)$, où D est un diviseur effectif réduit de degré m. Supposons que les poids associés à $\mathcal{E}.$ ont des dénominateurs premiers à la caractéristique du corps de base k et que le faisceau sous-jacent se décompose sous la forme*

$$\mathcal{E}_0 = \oplus_{j=1}^{\mathrm{rk}\,\mathcal{E}} \mathcal{O}(d_j)$$

Alors pour tout j on a : $-m < d_j \leq 0$.

Démonstration. Le principe de la preuve suivante m'a été communiqué par I.Biswas.

Soit $\mathcal{F}$ le faisceau sur $\mathfrak{X}$ correspondant à $\mathcal{E}.$. Il est fini, donc semi-stable de degré 0. L'hypothèse est donc que $\pi_*\mathcal{F} \simeq \oplus_{j=1}^{\mathrm{rk}\,\mathcal{E}} \mathcal{O}(d_j)$. Fixons j. On considère d'une part $\pi^*\mathcal{O}(d_j)^{\hookrightarrow\mathcal{F}}$ le sous-fibré de $\mathcal{F}$ induit par $\mathcal{O}(d_j)$. La semi-stabilité donne $\mu(\pi^*\mathcal{O}(d_j)^{\hookrightarrow\mathcal{F}}) \leq 0$, ce qui implique, au vu du lemme 14, que $d_j \leq 0$. Soit d'autre part $\pi^*\mathcal{O}(d_j)_{\twoheadleftarrow\mathcal{F}}$ le fibré quotient induit par $\mathcal{O}(d_j)$. Le fait que $\mathcal{F}$ soit semi-stable de degré 0 implique que $\mu(\pi^*\mathcal{O}(d_j)_{\twoheadleftarrow\mathcal{F}}) \geq 0$, ce qui implique, en écrivant comme dans la démonstration du lemme 15 $\pi^*\mathcal{O}(d_j)_{\twoheadleftarrow\mathcal{F}} \simeq \pi^*\mathcal{O}(d_j) \otimes \otimes_{i=1}^{m}\mathcal{N}_i^{\otimes r_i}$, que $d_j > -m$. □

A Fibrés paraboliques : la définition de Seshadri

Dans cette partie, X est une courbe projective et lisse sur un corps algébriquement clos k, D un diviseur effectif réduit sur X.

A.1 Définition locale

Définition 16 ([21]). *Un faisceau* parabolique $(\mathcal{E}, F_*, \alpha_*)$ *sur* (X, D) *est la donnée d'un faisceau localement libre* $\mathcal{E}$ *sur* X*, pour tout point* P *du support de* D *d'un drapeau de la fibre résiduelle* $E_P := \mathcal{E}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} k(P)$ *:*

$$E_P = F_1(E_P) \supset F_2(E_P) \supset \cdots \supset F_{n_P}(E_P) \supset F_{n_P+1}(E_P) = 0$$

et une suite de nombres rationnels (poids) $(\alpha_{P,i})_{1\leq i\leq n_P}$ *vérifiant*

$$0 \leq \alpha_{P,1} < \cdots < \alpha_{P,n_P} < 1$$

n_P *est la longueur de la filtration en* P *et si* $m_{P,i} = \dim_{k(P)}(F_i(E_P)/F_{i+1}(E_P))$ *alors la suite* $(m_{P,i})_{1\leq i\leq n_P}$ *est la suite des multiplicités en* P.

Définition 17 ([21]). *Soient* $(\mathcal{E}, F_*, \alpha_*)$ *et* $(\mathcal{E}', F'_*, \alpha'_*)$ *deux faisceaux paraboliques sur* (X, D)*. Un morphisme* $\phi : (\mathcal{E}, F_*, \alpha_*) \to (\mathcal{E}', F'_*, \alpha'_*)$ *de fibrés paraboliques est un morphisme* $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ *de faisceaux vérifiant :*

$$\forall P \in |D| \;\; \forall i, j \quad \alpha_{i,P} > \alpha'_{j,P} \implies \phi(F_i(E_P)) \subset F'_{j+1}(E'_P)$$

A.2 Filtration associée

Soit $(\mathcal{E}, F_*, \alpha_*)$ un fibré parabolique sur (X, D).

Il est bien connu (et apparemment du à C.Simpson, voir [9]) qu'on peut lui associer canoniquement une filtration descendante $\mathcal{E}_{\cdot} = (\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Q}}$ de la manière suivante.

Pour $P \in |D|$ on pose par convention $\alpha_{0,P} = \alpha_{n_P,P} - 1$ et $\alpha_{n_P+1} = 1$. On pose alors pour $1 \leq i \leq n_P$ et $\alpha_{i-1,P} < \alpha \leq \alpha_{i,P}$: $\mathcal{E}_\alpha^P = \ker(\mathcal{E} \to E_P/F_i(E_P))$, puis

$$\mathcal{E}_\alpha = \cap_{P\in|D|}\mathcal{E}_\alpha^P$$

puis on étend la définition à tout α dans $\mathbb{Q}$ en imposant $\mathcal{E}_{\alpha+l} = \mathcal{E}_\alpha(-lD)$ pour l entier.

Remarque 11. *Soient* $(\mathcal{E}, F_*, \alpha_*)$ *et* $(\mathcal{E}', F'_*, \alpha'_*)$ *deux fibrés paraboliques sur* (X, D)*,* $\mathcal{E}.$ *et* $\mathcal{E}'_.$ *les filtrations associées. Un morphisme de faisceaux* $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ *définit un morphisme de faisceaux paraboliques si et seulement si* $\forall \alpha \in \mathbb{Q}$ $\phi(\mathcal{E}_\alpha) \subset \mathcal{E}'_\alpha$.

A.3 Sous-faisceau parabolique et faisceau parabolique quotient induits

On donne la version de Maruyama-Yokogawa, en termes des filtrations associées.

Définition 18 ([16])**.** *Soit* $\mathcal{E}.$ *un faisceau parabolique sur* (X, D) *et* $\mathcal{E}'$ *un sous-fibré de* $\mathcal{E}_0$ *(i.e.* $\mathcal{E}'$ *est un sous-faisceau de* $\mathcal{E}_0$ *et* $\mathcal{E}_0/\mathcal{E}'$ *est localement libre). Le* sous-fibré parabolique induit $\mathcal{E}'_.$ *est défini par* $\mathcal{E}'_. = \mathcal{E}' \cap \mathcal{E}.$*.*

Définition 19 ([16])**.** *Soit* $\mathcal{E}.$ *un faisceau parabolique sur* (X, D) *et* $g : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}''$ *un épimorphisme vers le faisceau localement libre* $\mathcal{E}''$*. Le* fibré parabolique quotient induit $\mathcal{E}'_.$ *est défini par* $\mathcal{E}''_. = g(\mathcal{E}.)$*.*

A.4 Faisceau parabolique semi-stable

Définition 20 ([21])**.** *Soit* $(\mathcal{E}, F_*, \alpha_*)$ *un fibré parabolique sur* (X, D)*. On définit*

1. *son* degré *par* $\deg \mathcal{E}. = \deg \mathcal{E} + \sum_{P \in |D|} \sum_{i=1}^{n_P} m_{P,i} \alpha_{P,i}$
2. *sa* pente *par* $\mu(\mathcal{E}.) = \frac{\deg \mathcal{E}.}{\mathrm{rk}\, \mathcal{E}}$.

Remarque 12. *Il est facile de vérifier que cette définition est compatible avec la définition 8.*

Définition 21 ([21])**.** *Un fibré parabolique* $(\mathcal{E}, F_*, \alpha_*)$ *sur* (X, D) *est dit* semi-stable *s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

1. *Pour tout sous-fibré parabolique induit* $\mathcal{E}'_.$ *de* $\mathcal{E}.$*, on a* $\mu(\mathcal{E}'_.) \leq \mu(\mathcal{E}.)$
2. *Pour tout fibré parabolique quotient induit* $\mathcal{E}''_.$ *de* $\mathcal{E}.$*, on a* $\mu(\mathcal{E}''_.) \geq \mu(\mathcal{E}.)$*.*

Remarque 13. *Ce n'est pas exactement la définition de [21], mais cela lui est immédiatement équivalent, comme c'est d'ailleurs précisé dans la remarque 1. suivant la définition 6., p.69. La raison que nous avons d'éviter la première forme de la définition est qu'elle utilise une notion de sous-fibré parabolique (resp. fibré parabolique quotient) qui est n'est pas compatible (en fait plus générale) avec la définition champêtre précisée par la définition 11 (resp. par la remarque 8).*

B Bouts

On rappelle quelques notions tirées de ([15]).

Définition 22. *Soient* $\mathcal{I}$*,* $\mathcal{C}$ *deux catégories,* $F : \mathcal{I}^{op} \times \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ *un foncteur de variance mixte.*

1. *Un* bout (wedge) *de F à un objet C de $\mathcal{C}$ est une collection de flèches $\alpha_I : F(I,I) \to C$ dans $\mathcal{C}$* dinaturelle *au sens que pour tout flèche $f : I \to J$ dans $\mathcal{I}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & F(I,I) \arrow[dr, "\alpha_I"] & \\ F(J,I) \arrow[ur, "F(f,1)"] \arrow[dr, "F(1,f)"'] & & C \\ & F(J,J) \arrow[ur, "\alpha_J"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Si un bout universel existe, on le note $\int^I F(I,I)$.*

Proposition 7 (Fubini pour les bouts universels)**.** *Soient $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ et $\mathcal{C}$ trois catégories, $F : \mathcal{I}^{op} \times \mathcal{I} \times \mathcal{J}^{op} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Si les bouts universels suivants existent, on a des isomorphismes naturels :*

$$\int^{\mathcal{I}} \int^{\mathcal{J}} F(I,I,J,J) \simeq \int^{\mathcal{I}\times\mathcal{J}} F(I,I,J,J) \simeq \int^{\mathcal{J}} \int^{\mathcal{I}} F(I,I,J,J)$$

C Grothendieck-Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford

On résume les résultats de [22], [23] que nous utilisons. On note $\mathfrak{X}$ un champ de Deligne-Mumford noethérien.

C.1 K-théorie

La catégorie exacte $\mathrm{Vect}(\mathfrak{X})$ permet de définir deux spectres de K-théorie, le spectre de K-théorie usuel $K(\mathfrak{X})$ et le spectre de K-théorie étale $K_{et}(\mathfrak{X}) = H(\mathfrak{X}_{et}, \underline{K})$, où $H(\mathfrak{X}_{et}, \cdot)$ désigne la cohomologie (généralisée) d'un préfaisceau de spectres $\cdot$ sur $\mathfrak{X}_{et}$ et $\underline{K}$ le préfaisceau de spectres de K-théorie sur $\mathfrak{X}_{et}$. Ils sont reliés par un morphisme canonique $\mathrm{can} : K(\mathfrak{X}) \to K_{et}(\mathfrak{X})$.

On considérant à la place de $\mathrm{Vect}(\mathfrak{X})$ la catégorie exacte $\mathrm{Coh}(\mathfrak{X})$ des faisceaux cohérents sur $\mathfrak{X}$ on obtient de manière analogue le spectre de G-théorie $G(\mathfrak{X})$ et le spectre de G-théorie étale $G_{et}(\mathfrak{X})$.

On dispose de morphismes de spectres canoniques $K(\mathfrak{X}) \to G(\mathfrak{X})$ et $K_{et}(\mathfrak{X}) \to G_{et}(\mathfrak{X})$.

C.2 Théorie homologique-cohomologique

C.2.1 Cohomologie

Soit $\mathcal{K}_i$ le faisceau associé au préfaisceau de groupes abéliens $U \to K_i(U)$ sur $\mathfrak{X}_{et}$. On pose

$$H^i_{et}(\mathfrak{X}) = H^i(\mathfrak{X}_{et}, \mathcal{K}_i \otimes \mathbb{Q})$$

On dispose alors d'une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative graduée $H^*_{et}(\mathfrak{X})$. $H^*_{et}(\mathfrak{X})$ est contravariant en $\mathfrak{X}$.

La construction universelle de Gillet [13] donne des classes de Chern c_i^{et} : $K_{0,et}(\mathfrak{X}) \to H^i_{et}(\mathfrak{X})$, et on définit un caractère de Chern $\mathrm{ch}^{et} : K_{0,et}(\mathfrak{X}) \to H^*_{et}(\mathfrak{X})$ et une classe de Todd $\mathrm{td}^{et} : K_{0,et}(\mathfrak{X}) \to H^*_{et}(\mathfrak{X})$ par les formules habituelles.

C.2.2 Homologie

On définit par ailleurs des groupes d'homologie de la manière suivante.

Pour un schéma S, et un entier i, soit :

$$\mathcal{R}^i(S) : \oplus_{x\in S^{(0)}} K_i(k(x)) \to \oplus_{x\in S^{(1)}} K_{i-1}(k(x)) \to \cdots \to \oplus_{x\in S^{(i)}} K_0(k(x))$$

le complexe de Gersten concentré en degrés $[-i, 0]$. On note $\mathcal{R}^i$ le préfaisceau de complexes $S \to \mathcal{R}^i(S)$ sur $\mathfrak{X}_{et}$. On pose : $H_i^{et}(\mathfrak{X}) = \mathbb{H}(\mathfrak{X}_{et}, \mathcal{R}^i \otimes \mathbb{Q})$.

On dispose de $H_*^{et}(\mathfrak{X})$ qui est un $H^*_{et}(\mathfrak{X})$-module gradué. $H_*^{et}(\mathfrak{X})$ est covariant pour les morphismes propres.

Lorsque $\mathfrak{X}$ est lisse, il y a un isomorphisme naturel $H^*_{et}(\mathfrak{X}) \simeq H_*^{et}(\mathfrak{X})$, ce qui entraîne en particulier que $H^i_{et}(\mathfrak{X}) = 0$ pour $i > \dim \mathfrak{X}$.

Lorsque $p : \mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} k$ est propre, on désigne p_* par $\int_{\mathfrak{X}}^{et}$ (noter que $H_*^{et}(\operatorname{Spec} k) \simeq \mathbb{Q}$). Lorsque $\mathfrak{X}$ est de plus lisse, équidimensionel de dimension n, et muni d'un faisceau très ample $\mathcal{O}(1)$, ceci permet de définir le degré d'un faisceau localement libre $\mathcal{F}$ sur X comme étant le nombre rationnel :

$$\deg_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F}) = \int_{\mathfrak{X}}^{et} c_1^{et}(\mathcal{F}) \cdot c_1^{et}(\mathcal{O}(1))^{n-1}$$

Par ailleurs, on dispose d'un théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour la G-théorie *étale* ([22], Théorème 3.33), qui peut s'énoncer ainsi : il existe une transformation naturelle ("caractère de Chern homologique étale")

$$\tau_{\mathfrak{X}}^{et} : G_{0,et}(\mathfrak{X}) \to H_*^{et}(\mathfrak{X})$$

qui vaut $x \to \mathrm{td}^{et}(\mathcal{T}_{\mathfrak{X}})\, \mathrm{ch}^{et}(x)$ si $\mathfrak{X}$ est lisse, où $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ est le fibré tangent, et qui est covariant pour les morphismes propres (non nécessairement représentables) de champs algébriques quasi-projectifs $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$.

Ce théorème est essentiellement équivalent au théorème usuel pour les espaces de modules sous-jacents. La remarque clé due à B.Toën est que le morphisme $G_0(\mathfrak{X}) \to G_{0,et}(\mathfrak{X})$ n'est pas covariant en général, mais qu'il est par contre possible de définir une transformation de type Riemann-Roch de $G_0(\mathfrak{X})$ à $G_{0,et}(I_{\mathfrak{X}})$, où $I_{\mathfrak{X}}$ désigne le *champ d'inertie* de $\mathfrak{X}$: c'est ce que B.Toën nomme Lefschetz-Riemann-Roch, et que nous détaillons à présent.

C.3 Lefschetz-Riemann-Roch

C.3.1 Champ d'inertie

Le champ d'inertie $I_{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$ est défini par

$$I_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}} \mathfrak{X}$$

Moins formellement, il s'agit d'une catégorie fibrée en groupoïdes, dont les objets au-dessus d'un schéma S sont les couples (s,h), avec s un objet de $\mathfrak{X}(S)$, et h un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}(S)}(s,s)$, et dont les flèches de (s,h) vers (s',h') (s, s' objets de $\mathfrak{X}(S)$) sont les morphismes $u \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}(S)}(s,s')$ tels que $u^{-1}h'u = h$.

$I_\mathfrak{X}$ est un champ en groupes sur $\mathfrak{X}$, et donc muni d'une section canonique $\mathfrak{X} \to I_\mathfrak{X}$ envoyant l'objet s sur l'objet (s, id).

Lorsque $\mathfrak{X} = [Y|G]$ est un champ quotient, ce à quoi on peut se ramener localement, on a le diagramme commutatif suivant dont toutes les faces sont cartésiennes :

$$\begin{tikzcd}
G_Y \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & Y \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& G \times Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y \times Y \arrow[dd] \\
I_\mathfrak{X} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathfrak{X} \arrow[dr] & \\
& \mathfrak{X} \arrow[rr] & & \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}
\end{tikzcd}$$

Par définition, G_Y est le stabilisateur de $Y \to Y$, un Y-groupe. Ceci donne une présentation de $I_\mathfrak{X} = [G_Y|G]$ (noter que G agit par conjugaison sur le premier facteur de $G_Y \subset G \times Y$, l'action préserve donc la structure de Y-groupe de G_Y, si bien que $I_\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{X}$-groupe). On peut encore détailler cette expression en décomposant G_Y en ses composantes connexes.

C.3.2 Caractère de Frobénius

Par la suite, on fait l'hypothèse simplificatrice suivante : on se donne un corps k contenant les racines de l'unité et un champ $\mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} k$ *modéré*, i.e. l'ordre d'inertie de tout point de $\mathfrak{X}$ est premier à la caractéristique de k.

Tout faisceau localement libre $\mathcal{F}$ sur $I_\mathfrak{X}$ se décompose canoniquement sous la forme

$$\mathcal{F} = \oplus_{\zeta \in \boldsymbol{\mu}_\infty} \mathcal{F}^{(\zeta)}$$

où $\mathcal{F}^{(\zeta)}$ est le sous-fibré défini en restriction à $(s,h) : U \to \mathcal{I}_\mathfrak{X}$ de la manière suivante : l'action de h sur $\mathcal{F}_{|U}$ est diagonalisable, et $\mathcal{F}_{|U}^{(\zeta)}$ est le sous-fibré propre pour la valeur propre ζ.

En posant $\Lambda = \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_\infty)$ et pour un groupe abélien A, $A_\Lambda = A \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}(\boldsymbol{\mu}_\infty)$, on peut alors définir un morphisme $\rho_\mathfrak{X} : K_0(I_\mathfrak{X})_\Lambda \to K_0(I_\mathfrak{X})_\Lambda$ en posant

$$\rho_\mathfrak{X}([\mathcal{F}]) = \sum_{\zeta \in \boldsymbol{\mu}_\infty} \zeta [\mathcal{F}^{(\zeta)}]$$

On définit alors le caractère de Frobénius $\phi_\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{X}$ comme étant le composé

$$\phi_\mathfrak{X} : K_0(\mathfrak{X})_\Lambda \xrightarrow{\pi_\mathfrak{X}^*} K_0(I_\mathfrak{X})_\Lambda \xrightarrow{\rho_\mathfrak{X}} K_0(I_\mathfrak{X})_\Lambda \xrightarrow{can} K_{0,et}(I_\mathfrak{X})_\Lambda$$

où $\pi_\mathfrak{X}^*$ est l'image réciproque via la projection $\pi_\mathfrak{X} : I_\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$.

C.3.3 Caractère de Frobénius homologique

On définit ensuite l'analogue d'un caractère de Todd : si $\Omega^1_{I_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}}$ désigne le fibré conormal du morphisme non ramifié $\pi_{\mathfrak{X}} : I_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$, on pose

$$\alpha_{\mathfrak{X}} = can \circ \rho_{\mathfrak{X}}(\lambda_{-1}([\Omega^1_{I_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}}])) \in K_{0,et}(I_{\mathfrak{X}})_{\Lambda}$$

où comme d'habitude $\lambda_{-1}(x) = \sum_i (-1)^i \lambda_i(x)$. On vérifie que c'est un élément inversible de $K_{0,et}(I_{\mathfrak{X}})_{\Lambda}$.

Le théorème de Lefschetz-Riemann-Roch peut s'énoncer ainsi (voir [22] Théorème 3.25 pour les détails). Il existe, pour $\mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} k$ quasi-projectif, un caractère de Frobénius homologique $\phi_{\mathfrak{X}} : G_0(\mathfrak{X})_{\Lambda} \to G_{0,et}(I_{\mathfrak{X}})_{\Lambda}$, qui vaut $x \to \alpha_{\mathfrak{X}}^{-1}\phi_{\mathfrak{X}}(x)$ lorsque $\mathfrak{X}$ est lisse, et qui est covariant pour les morphismes propres $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ de dimension cohomologique finie lorsque $\mathfrak{X}$ est lisse.

C.4 Grothendieck-Riemann-Roch

En combinant les deux transformations de Riemann-Roch de C.2 et C.3 on est conduit aux définitions suivantes.

C.4.1 Cohomologie et homologie à coefficients dans les représentations

On pose donc logiquement $H^i_{rep}(\mathfrak{X}) = H^i_{et}(I_{\mathfrak{X}})$ et $H_i^{rep}(\mathfrak{X}) = H_i^{et}(I_{\mathfrak{X}})$. Ces groupes héritent des propriétés de fonctorialité de leur analogues étales. En particulier lorsque $p : \mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} k$ est propre, on définit $\int_{\mathfrak{X}}^{rep} = p_*$, comme d'habitude.

Le caractère de Chern $\mathrm{ch}^{rep} : K_0(\mathfrak{X}) \to H^*_{rep}(\mathfrak{X})_{\Lambda}$ est défini par

$$\mathrm{ch}^{rep}(x) = \mathrm{ch}^{et}(\phi_{\mathfrak{X}}(x))$$

La classe de Todd est elle définie comme l'élément de $H^*_{rep}(\mathfrak{X})_{\Lambda}$:

$$\mathrm{td}^{rep}(\mathfrak{X}) = \mathrm{ch}^{et}(\alpha_{\mathfrak{X}}^{-1})\,\mathrm{td}^{et}(\mathcal{T}_{I_{\mathfrak{X}}})$$

C.4.2 Caractère de Chern homologique à coefficients dans les représentations

Dans cette section, on suppose de plus que l'espace des modules M de $\mathfrak{X}$ est quasi-projectif, et ce pour tous les champs considérés.

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch peut se résumer ainsi : il existe un "caractère de Chern homologique à coefficients dans les représentations" :

$$\tau_{\mathfrak{X}}^{rep} : G_0(\mathfrak{X})_{\Lambda} \to H_*^{rep}(\mathfrak{X})_{\Lambda}$$

qui vaut $x \to \mathrm{td}^{rep}(\mathfrak{X})\,\mathrm{ch}^{rep}(x)$ si $\mathfrak{X}$ est lisse, qui est covariant pour les morphismes propres $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$.

En particulier on a :

Corollaire 7 (Hirzebruch-Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford)**.** *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un champ de Deligne-Mumford $\mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} k$ propre et lisse. Alors on a*

$$\chi(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = \int_{\mathfrak{X}}^{rep} \operatorname{td}^{rep}(\mathfrak{X}) \operatorname{ch}^{rep}(\mathcal{F})$$

C.4.3 Lien entre cohomologie usuelle et cohomologie à coefficients dans les représentations

Dans cette section, on énumère un certain nombre de faits techniques que nous avons utilisés.

On note d'abord que les morphismes image réciproque le long de la section unité $1 : \mathfrak{X} \to I_{\mathfrak{X}}$ et de l'inclusion $I_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X} \to I_{\mathfrak{X}}$ induisent un isomorphisme d'anneaux

$$H^*_{rep}(\mathfrak{X}) = H^*_{et}(I_{\mathfrak{X}}) \simeq H^*_{et}(\mathfrak{X}) \oplus H^*_{et}(I_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X})$$

Pour $x \in H^*_{rep}(\mathfrak{X})$ on notera $x = x_1 + x_{\neq 1}$ la décomposition correspondante.

On a une décomposition analogue du groupe d'homologie $H_*^{rep}(\mathfrak{X})$, compatible avec la précédente via les isomorphismes de Poincaré $H^*_{rep}(\mathfrak{X}) \simeq H_*^{rep}(\mathfrak{X})$ lorsque $\mathfrak{X}$ est lisse.

Si $p : \mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} k$ est propre, il en découle que :

$$\int_{\mathfrak{X}}^{rep} x = \int_{I_{\mathfrak{X}}}^{et} x = \int_{\mathfrak{X}}^{et} x_1 + \int_{I_{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}}^{et} x_{\neq 1}$$

Lemme 16. *Pour tout y dans $K_0(\mathfrak{X})_\Lambda$ et tout $i \geq 0$ on a :*

$$\operatorname{ch}^{rep}(y)_1 = \operatorname{ch}^{et}(y)$$

Démonstration. Vu la définition des caractères de Chern, tout revient à montrer que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathfrak{X})_\Lambda \arrow[r, "\pi_{\mathfrak{X}}^*"] \arrow[dr, "id"'] & K_0(I_{\mathfrak{X}})_\Lambda \arrow[r, "\rho_{\mathfrak{X}}"] & K_0(I_{\mathfrak{X}})_\Lambda \arrow[dl, "1^*"] \arrow[d, "can"] \\
& K_0(\mathfrak{X})_\Lambda \arrow[d, "can"] & K_{0,et}(I_{\mathfrak{X}})_\Lambda \arrow[d, "\operatorname{ch}^{et}"] \\
& K_{0,et}(\mathfrak{X})_\Lambda \arrow[d, "\operatorname{ch}^{et}"] & H^*_{et}(I_{\mathfrak{X}})_\Lambda \arrow[dl, "1^*"] \\
& H^*_{et}(\mathfrak{X})_\Lambda &
\end{tikzcd}$$

Il est clair que le parallélogramme du bas commute, quant au triangle du haut, sa commutativité découle de la définition de $\rho_{\mathfrak{X}}$.

□

Lemme 17.

$$\operatorname{td}^{rep}(\mathfrak{X})_1 = \operatorname{td}^{et}(\mathfrak{X})$$

Démonstration. En effet $(\alpha_{\mathfrak{X}})_1 = 1^* can \circ \rho(\lambda_{-1}([\Omega^1_{I_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{X}}])) = can \lambda_{-1}(0) = 1.$ □

Références

[1] *Revêtements étales et groupe fondamental*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Dirigé par Alexandre Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224.

[2] Dan Abramovich, Tom Graber, and Angelo Vistoli : Gromov–Witten theory of Deligne–Mumford stacks. [arXiv:math.AG/0603151].

[3] Alessandro Arsie and Angelo Vistoli : Stacks of cyclic covers of projective spaces. *Compos. Math.*, 140(3) :647–666, 2004.

[4] Vikraman Balaji, Indranil Biswas, and Donihakkalu S. Nagaraj : Principal bundles over projective manifolds with parabolic structure over a divisor. *Tohoku Math. J. (2)*, 53(3) :337–367, 2001.

[5] Indranil Biswas : Chern classes for parabolic bundles. *J. Math. Kyoto Univ.*, 37(4) :597–613, 1997.

[6] Indranil Biswas : Parabolic ample bundles. *Math. Ann.*, 307(3) :511–529, 1997.

[7] Indranil Biswas : Parabolic bundles as orbifold bundles. *Duke Math. J.*, 88(2) :305–325, 1997.

[8] Hans U. Boden : Representations of orbifold groups and parabolic bundles. *Comment. Math. Helv.*, 66(3) :389–447, 1991.

[9] Hans U. Boden and Kôji Yokogawa : Moduli spaces of parabolic Higgs bundles and parabolic $K(D)$ pairs over smooth curves. I. *Internat. J. Math.*, 7(5) :573–598, 1996.

[10] Charles Cadman : Using stacks to impose tangency conditions on curves. [arXiv:math.AG/0312349].

[11] Brian Day : On closed categories of functors. In *Reports of the Midwest Category Seminar, IV*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 137, pp. 1–38. Springer, Berlin, 1970.

[12] Bas Edixhoven : Computing covers of the projective line with given monodromy, as algebraic curves. *Unpublished note*, 2002.

[13] Henri Gillet : Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory. *Adv. in Math.*, 40(3) :203–289, 1981.

[14] Seán Keel and Shigefumi Mori : Quotients by groupoids. *Ann. of Math. (2)*, 145(1) :193–213, 1997.

[15] Saunders MacLane : *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[16] M. Maruyama and K. Yokogawa : Moduli of parabolic stable sheaves. *Math. Ann.*, 293(1) :77–99, 1992.

[17] Kenji Matsuki and Martin Olsson : Kawamata-Viehweg vanishing as Kodaira vanishing for stacks. *Math. Res. Lett.*, 12(2-3) :207–217, 2005.

[18] Madhav V. Nori : On the representations of the fundamental group. *Compositio Math.*, 33(1) :29–41, 1976.

[19] Madhav V. Nori : The fundamental group-scheme. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 91(2) :73–122, 1982.

[20] Neantro Saavedra Rivano : *Catégories Tannakiennes*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265.

[21] C. S. Seshadri : *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, volume 96 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982. Notes written by J.-M. Drezet from a course at the École Normale Supérieure, June 1980.

[22] B. Toën : *K-théorie et cohomologie des champs algébriques : théorèmes de Riemann-Roch, $\mathcal{D}$-modules et théorèmes "GAGA"*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1999.

[23] B. Toën : Théorèmes de Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford. *K-Theory*, 18(1) :33–76, 1999.

[24] Angelo Vistoli : Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. [arXiv:math.AG/0412512].

[25] Angelo Vistoli : Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces. *Invent. Math.*, 97(3) :613–670, 1989.

[26] Kôji Yokogawa : Infinitesimal deformation of parabolic Higgs sheaves. *Internat. J. Math.*, 6(1) :125–148, 1995.