C. R. Acad. Sci. Paris, t. *, Série I, p. 1–??, 2003** **- PXMA????.TEX -**
Géométrie Algébrique/*Algebraic Geometry*

Cohomologie des G-faisceaux en caractéristique positive

Niels Borne [a]

[a] **Università di Bologna, Dipartimento di Matematica, Piazza di Porta San Donato, 5, I-40126 Bologna, Italie**
Courriel : borne@dm.unibo.it

(Reçu le jour mois année, accepté le jour mois année)

Résumé. Soit G un groupe fini et X un G-schéma noethérien défini sur un corps algébriquement clos k, dont la caractéristique divise l'ordre de G. On définit un raffinement de la K-théorie équivariante de X destiné à mieux prendre en compte l'information liée à la théorie de la représentation modulaire.

Cohomology of G-sheaves in positive characteristic

Abstract. *Let G be a finite group, and X a noetherian G-scheme defined on an algebraically closed field k, whose characteristic divides the order of G. We define a refinement of the equivariant K-theory of X devoted to give a better account of the information related to modular representation theory.*

1. Introduction

Soit X un schéma noethérien défini sur un corps k algébriquement clos, sur lequel il est propre. On suppose X/k muni de l'action d'un groupe fini G. Dans ce contexte, on appelle *module galoisien* l'espace des sections globales d'un G-faisceau cohérent sur X. Ce sont des représentations de G sur k, et leur structure en tant que telles est liée en particulier à la ramification de l'action - c'est-à-dire aux points fixes.

La K-théorie équivariante fournit le contexte le plus général pour le calcul des modules galoisiens. Celle-ci attribue à chaque G-schéma noethérien X des groupes $K_i(G, X)$, fonctoriellement en X, si bien que le morphisme structurel $s_X : X \to \operatorname{Spec} k$ donne une caractéristique d'Euler équivariante à valeurs dans le groupe $R_k(G)$ des caractères de G sur k. Lorsque la caractéristique p de k ne divise pas l'ordre de G, cette approche est optimale, puisqu'alors les caractères des modules galoisiens les caractérisent à isomorphisme près. Dans le cas contraire, on perd de l'information, le cas extrême étant celui où G est un p-groupe, puisque qu'alors $R_k(G) \simeq \mathbb{Z}$ ne contient aucune information proprement équivariante.

On présente ici un raffinement de la K-théorie équivariante de X destiné à mieux prendre en compte l'information liée à la théorie de la représentation modulaire. Pour ce faire, on plonge la catégorie des G-faisceaux cohérents sur X dans une sur-catégorie, celle des $\mathcal{A}$-faisceaux cohérents sur X. La construction

Note présentée par Prénom NOM

S0764-4442(00)0????-?/FLA

générale est donnée au paragraphe 3., et est justifiée par l'examen du cas de la dimension zéro au paragraphe 2.. Le paragraphe 4. est consacré à des applications.

2. Théorie de la représentation modulaire : l'approche d'Auslander

Par théorie de la représentation modulaire, on entend l'étude de la catégorie $k[G]\mathbf{mod}$ des $k[G]$-modules à gauche de type fini, lorsque la caractéristique p de k divise l'ordre de G.

Un peu plus généralement, Auslander a remarqué le fait suivant : soit R une k-algèbre artinienne, $\mathcal{A}_{tot} = \mathbf{mod}\, R$ la catégorie des R-modules à droite de type fini, et $\mathbf{Mod}\, \mathcal{A}_{tot} = [\mathcal{A}_{tot}^{op}, k\,\mathbf{Mod}\,]$ la catégorie des foncteurs additifs contravariants de $\mathcal{A}_{tot}$ dans les k-espaces vectoriels. Alors le morphisme de Yoneda $\mathcal{A}_{tot} \to \mathbf{Mod}\, \mathcal{A}_{tot}$ permet d'établir une bijection entre classes d'isomorphisme de $k[G]$-modules indécomposables et classes d'isomorphisme de $\mathcal{A}_{tot}$-modules simples (voir [1] §1.2). Il est ainsi commode de voir $\mathcal{A}_{tot}$ comme un anneau à plusieurs objets, au sens de Mitchell (voir [2]). Comme les modules simples sont bien détectés par la K-théorie, le théorème suivant est essentiellement une réinterprétation de la remarque d'Auslander.

Précisons tout d'abord quelques définitions. On dit que R est *de type de représentation fini* si le nombre de classes d'isomorphisme d'indécomposables dans $\mathbf{mod}\, R$ est fini (lorsque $R = k[G]^{op}$ ceci équivaut au fait que G a des p-Sylow cycliques, voir [3]). La notion de groupe de Grothendieck d'une catégorie abélienne employée est celle compatible avec la K-théorie de Quillen. Pour un objet V de $\mathbf{mod}\, R$, on note $\underline{V}$ l'image de V par le morphisme de Yoneda $\mathcal{A}_{tot} \to \mathbf{Mod}\, \mathcal{A}_{tot}$.

THÉORÈME 2.1. – *Soit R une k-algèbre (non nécessairement commutative) de dimension finie sur un corps algébriquement clos k, avec R de type de représentation fini. Soit de plus $\mathcal{A}_{tot}$ l'anneau à plusieurs objets $\mathbf{mod}\, R$, et $\mathbf{mod}\, \mathcal{A}_{tot}$ la catégorie des $\mathcal{A}_{tot}$-modules à droite de type fini. Alors :*

(i) $\mathbf{mod}\, \mathcal{A}_{tot}$ est une catégorie abélienne,

(ii) deux R-modules à droite de type fini V,V' sont isomorphes si et seulement si dans $K_0(\mathbf{mod}\, \mathcal{A}_{tot})$ on a l'égalité : $[\underline{V}] = [\underline{V'}]$.

Par la suite, on prendra toujours $R = k[G]^{op}$, sans la supposer nécessairement de type de représentation fini. Pour plus de souplesse, on est amenés à considérer des sous-catégories pleines $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}_{tot} = k[G]\mathbf{mod}$. On dira que $\mathcal{A}$ *admet un nombre fini de générateurs* si elle est Morita-équivalente, au sens des anneaux à plusieurs objets, à une de ses sous-catégories pleines ayant un nombre fini d'objets.

3. K-théorie modulaire

Soit X un schéma noethérien, défini sur un corps algébriquement clos k, et muni d'une action d'un groupe fini G. On suppose que le quotient de l'action existe comme schéma, et on note $\pi : X \to Y = X/G$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_{tot} = k[G]\mathbf{mod}$. On va introduire la notion de $\mathcal{A}$-faisceau quasi-cohérent sur X, qui étend celle de G-faisceau quasi-cohérent sur X, qu'on commence par rappeler :

DÉFINITION 3.1. – *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Une G-*linéarisation *de $\mathcal{F}$ est la donnée d'une collection $(\psi_g)_{g\in G}$ de morphismes de faisceaux quasi-cohérents $\psi_g : g_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ satisfaisant les conditions : (i) $\psi_1 = 1$ (ii) $\psi_{hg} = \psi_h \circ h_*(\psi_g)$.*

*Un G-*faisceau quasi-cohérent sur X *est un faisceau quasi-cohérent sur X muni d'une G-linéarisation.*

Les G-faisceaux quasi-cohérents sur X forment une catégorie abélienne notée $\mathrm{Qcoh}\,(G,X)$. On note π_*^G le foncteur $\mathrm{Qcoh}\,(G,X) \to \mathrm{Qcoh}\, Y$ qui au G-faisceau $\mathcal{F}$ associe le faisceau $U \to (\mathcal{F}(\pi^{-1}U))^G$.

Si Z est un schéma noethérien quelconque, la catégorie $\mathrm{Qcoh}\, Z$ est la catégorie sous-jacente d'une catégorie fermée, au sens de [4], et qu'on notera $\mathbf{Qcoh}\, Z$. On peut donc parler de catégories enrichies en $\mathbf{Qcoh}\, Z$, qu'on appelera *anneaux (à plusieurs objets) sur Z*.

La structure fermée de $\mathbf{Qcoh}\, X$ induit sur $\mathrm{Qcoh}\,(G,X)$ une structure de catégorie enrichie $\mathbf{Qcoh}\,(G,X)$ en $\mathbf{Qcoh}\, Y$ telle que, pour deux G-faisceaux $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ on ait : $\mathbf{Qcoh}\,(G,X)(\mathcal{F},\mathcal{F}') = \pi_*^G(\mathbf{Qcoh}\, X(\mathcal{F},\mathcal{F}'))$.

DÉFINITION 3.2. – *Soit X un G-schéma noethérien sur k, $s_X : X \to \mathrm{Spec}\, k$ le morphisme structurel, et $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\,\mathbf{mod}$. L'* algèbre d'Auslander *associée est l'anneau $\mathcal{A}_X$ sur Y égal* *à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Qcoh}\,(G,X)$ dont les objets sont de la forme s_X^*V, pour tout objet V de $\mathcal{A}$. De manière équivalente, les objets de $\mathcal{A}_X$ sont ceux de $\mathcal{A}$, les faisceaux de morphismes sont donnés par : $\mathcal{A}_X(V,V') = \mathbf{Qcoh}\,(G,X)(s_X^*V, s_X^*V')$, et le neutre et la composition sont ceux induits par ceux de $\mathbf{Qcoh}\,(G,X)$.*

DÉFINITION 3.3. – *Soit X un G-schéma noethérien sur k, $\pi : X \to Y$ le quotient, et $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\,\mathbf{mod}$. Un $\mathcal{A}$-faisceau sur X est, par définition, un $\mathbf{Qcoh}\,Y$-foncteur de $\mathcal{A}_X^{op}$ à $\mathbf{Qcoh}\,Y$. On note plus précisement $\mathbf{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$ la $\mathbf{Qcoh}\,Y$-catégorie $[\mathcal{A}_X^{op}, \mathbf{Qcoh}\,Y]$ dont les objets sont ces $\mathbf{Qcoh}\,Y$-foncteurs, et $\mathrm{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$ la catégorie ordinaire sous-jacente.*

La catégorie $\mathrm{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$ est abélienne. On montre que cette définition possède de bonnes propriétés en les deux variables.

Concernant la première variable, $\mathbf{Qcoh}\,(G,X)$ est canoniquement une sous-catégorie réflexive de (resp. isomorphe à) $\mathbf{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$ si $\mathcal{A}$ contient (resp. ne contient que) l'objet libre $k[G]$ de rang 1. On note $\underline{\mathcal{F}}$ l'image du G-faisceau $\mathcal{F}$ dans $\mathbf{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$. On montre de plus que $\mathbf{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$ est Morita-invariant.

Concernant la seconde variable, tout G-morphisme $f : X' \to X$ induit un morphisme image directe $f_{\mathcal{A}}$ et un morphisme image réciproque $f^{\mathcal{A}}$, qui sont naturellement adjoints. On en déduit que $\mathrm{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$ possède assez d'injectifs, d'où la possibilité de définir les foncteurs image directe supérieurs $R^i f_{\mathcal{A}}$. Cette opération ne commute pas avec le foncteur $\mathcal{F} \to \underline{\mathcal{F}}$, et en ce sens, les $\mathcal{A}$-faisceaux ont une cohomologie qui leur est propre.

DÉFINITION 3.4. – *Un $\mathcal{A}$-faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X est dit* cohérent *si pour tout ouvert affine G-invariant $U = \mathrm{spec}\,R$ de X, la restriction $\mathcal{F}_{|U}$ est de type fini dans $\mathbf{Qcoh}\,(\mathcal{A},U) \simeq [\mathcal{A}_X(U)^{op}, R^G\,\mathbf{Mod}\,]$ (i.e. c'est un quotient d'une somme finie d'objets représentables). On note $\mathrm{Coh}\,(\mathcal{A},X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Qcoh}\,(\mathcal{A},X)$ dont les objets sont les $\mathcal{A}$-faisceaux cohérents.*

LEMME 3.1. – *On suppose que $\mathcal{A}$ admet un nombre fini de générateurs. Alors $\mathrm{Coh}\,(\mathcal{A},X)$ est une catégorie abélienne. On note $K_i(\mathcal{A},X)$ son i-ème groupe de Quillen.*

Si le morphisme de G-schémas noethériens $f : X' \to X$ est tel que le morphisme correspondant entre quotients $\tilde{f} : Y' \to Y$ est propre, on a un morphisme induit $f_{\mathcal{A}} : K_i(\mathcal{A},X') \to K_i(\mathcal{A},X)$ à l'une des deux conditions : $\tilde{f}$ est fini, ou Y' admet un faisceau inversible ample.

THÉORÈME 3.2. – *Soit $i : X' \to X$ un morphisme de G-schémas noethériens sur k, et $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\,\mathbf{mod}$, admettant un nombre fini de générateurs. On suppose que le morphisme $\tilde{i} : Y' \to Y$ entre schémas quotients est une immersion fermée, et que $i^{\#} : \mathcal{A}_X \to \tilde{i}_*\mathcal{A}_{X'}$ est un épimorphisme. On note U l'image réciproque par $\pi : X \to Y$ du complémentaire de Y' dans Y, et par $j : U \to X$ l'inclusion canonique. Alors on a une suite exacte longue :*

$$\cdots \longrightarrow K_i(\mathcal{A},X') \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} K_i(\mathcal{A},X) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} K_i(\mathcal{A},U) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow K_0(\mathcal{A},X') \xrightarrow{i_{\mathcal{A}}} K_0(\mathcal{A},X) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} K_0(\mathcal{A},U) \longrightarrow 0$$

On donne un critère pratique permettant d'appliquer le Théorème 3.2 dans la partie 4. :

PROPOSITION 3.3. –

Soit $i : X' \to X$ un morphisme de G-schémas noethériens sur k, tel que

(i) Il existe un sous-groupe distingué H de G, tel que H agit trivialement sur X', et G/H agit librement sur X',

(ii) Le morphisme $\tilde{i} : Y' \to Y$ entre schémas quotients est une immersion fermée.

Alors le morphisme canonique $i^{\#} : \mathcal{A}_X \to \tilde{i}_*\mathcal{A}_{X'}$ est un épimorphisme.

4. Applications

4.1. Principe de symétrie

Si X est un G-schéma noethérien *propre* sur k, alors on définit pour chaque $\mathcal{A}$-faisceau cohérent $\mathcal{G}$ la caractéristique d'Euler-Poincaré modulaire par la formule habituelle $\chi(\mathcal{A},\mathcal{G}) = \sum_{i\geqslant 0}(-1)^i[H^i(X,\mathcal{G})]$, où $H^i(X,\cdot) = R^i(s_X)_{\mathcal{A}}$.

PROPOSITION 4.1. – *Soit X un schéma noethérien propre sur k, muni de l'action* libre *d'un groupe fini G, soit de plus $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\mathbf{mod}$, admettant un nombre fini de générateurs, et contenant $k[G]$, l'objet libre de rang 1. Alors pour tout G-faisceau $\mathcal{F}$ sur X on a égalité dans $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$:*

$$\chi(\mathcal{A},\underline{\mathcal{F}}) = \chi(\pi_*^G\mathcal{F})\left[\underline{k[G]}\right]$$

Cette égalité est en général *fausse* si on remplace $\chi(\mathcal{A},\underline{\mathcal{F}})$ par $\sum_{i\geqslant 0}(-1)^i[\underline{H^i(X,\mathcal{F})}]$.

4.2. Le cas d'une courbe

Dans cette partie, X désigne une courbe projective, ce par quoi on désigne un schéma intègre, de dimension 1, qui est propre sur k et régulier. On suppose de plus X munie d'une action fidèle d'un groupe fini G, telle que les stabilisateurs soient distingués. Cette dernière hypothèse permet d'utiliser le Théorème 3.2. On désigne par $\mathcal{A}$ une sous-catégorie de $k[G]\mathbf{mod}$, admettant un nombre fini de générateurs, et contenant $k[G]$, l'objet libre de rang 1.

DÉFINITION 4.1. –

(i) Le groupe des $\mathcal{A}$-cycles *sur X, noté $Z_0(\mathcal{A},X)$, est par définition : $Z_0(\mathcal{A},X) = \varinjlim_{X'} K_0(\mathcal{A},X')$ où la limite est prise sur tous les G-sous-schémas fermés réduits stricts de X.*

(ii) Le groupe de classes de $\mathcal{A}$-cycles sur X pour l'équivalence rationnelle, *noté $A_0(\mathcal{A},X)$, est par définition le conoyau du morphisme canonique $R(Y)^* \to Z_0(\mathcal{A},X)$ défini par les morphismes de connexion des suites de localisation ($R(Y)$ est le corps des fonctions rationnelles sur Y).*

(iii) On note $\gamma : A_0(\mathcal{A},X) \to K_0(\mathcal{A},X)$ et $\mathrm{rk} : K_0(\mathcal{A},X) \to \mathbb{Z}$ les morphismes canoniques.

THÉORÈME 4.2. – *Soit X une courbe projective sur un corps algébriquement clos k, munie de l'action fidèle d'un groupe fini G, agissant avec des stabilisateurs distingués. Soit de plus $\mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine de $k[G]\mathbf{mod}$, admettant un nombre fini de générateurs, et contenant $k[G]$, l'objet libre de rang 1. Alors le morphisme suivant est un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}\oplus A_0(\mathcal{A},X) &\longrightarrow K_0(\mathcal{A},X) \\ (r,D) &\longrightarrow r[\underline{\mathcal{O}_X}] + \gamma(D) \end{aligned}$$

DÉFINITION 4.2. – *On note $c_1 : K_0(\mathcal{A},X) \to A_0(\mathcal{A},X)$, et on appelle* première classe de Chern, *le morphisme composé de l'inverse $\phi^{-1} : K_0(\mathcal{A},X) \to \mathbb{Z}\oplus A_0(\mathcal{A},X)$ de l'isomorphisme du Théorème 4.2, suivi de la seconde projection $\mathbb{Z}\oplus A_0(\mathcal{A},X) \to A_0(\mathcal{A},X)$.*

LEMME 4.3. – *Le morphisme $\deg_{\mathcal{A}} : Z_0(\mathcal{A},X) \to K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$ correspondant au cone $((s_{X'})_{\mathcal{A}} : K_0(\mathcal{A},X') \to K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A}))_{X'}$ est trivial sur l'image de $R(Y)^* \to Z_0(\mathcal{A},X)$. On note aussi $\deg_{\mathcal{A}} : A_0(\mathcal{A},X) \to K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$ le morphisme induit.*

COROLLARY 4.3. – *On suppose que les hypothèses du Théorème 4.2 sont vérifiées. Alors pour tout $\mathcal{A}$-faisceau $\mathcal{F}$ sur X, on a dans $K_0(\mathbf{mod}\,\mathcal{A})$:*

$$\chi(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \mathrm{rk}\mathcal{F}\,\chi(\mathcal{A},\underline{\mathcal{O}_X}) + \deg_{\mathcal{A}} c_1(\mathcal{F})$$

Remerciements. Je tiens à remercier vivement A. Vistoli pour son soutien, ainsi que G.Vezzosi pour de nombreuses conversations enrichissantes.

Références bibliographiques

[1] Gabriel, Peter : Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. Representation theory, I (Proc. Workshop, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 1–71, Lecture Notes in Math., 831, Springer, Berlin, 1980.

[2] Mitchell, Barry : Rings with several objects. Advances in Math. 8, 1–161. (1972).

[3] Higman, D. G. : Indecomposable representations at characteristic p. Duke Math. J. 21, (1954). 377–381.

[4] Eilenberg, Samuel; Kelly, G. Max : Closed categories. 1966 Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965) pp. 421–562 Springer, New York.