Université Lille 1 **L3 Maths**
2013 - 2014 **S5 - M52 / Deuxième Session**

Épreuve du 10 juin 2014

Durée : 4h. Sans document ni calculatrice. Le barème mentionné est indicatif.

Exercice I. (*5 pts*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, et soit Ω un ouvert non vide, connexe et borné, de E. On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω et on rappelle que la distance $d(x, \partial\Omega)$ d'un point x de E à $\partial\Omega$ est définie par $d(x, \partial\Omega) = \inf_{z\in\partial\Omega} \|x - z\|$.

1. Montrer que $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$ sont des compacts de E.

2. Prouver que la fonction $x \mapsto d(x, \partial\Omega)$ est continue sur E, et qu'il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que pour tout $y \in \overline{\Omega}$, on ait $d(x_0, \partial\Omega) \geq d(y, \partial\Omega)$.

3. Montrer que l'on a $x_0 \in \Omega$.

4. Soit f une fonction continue sur Ω et vérifiant $f(\Omega) = \Omega$. On définit $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$ par $\varphi(x) = d(x, \partial\Omega) - d(f(x), \partial\Omega)$.

- **a.** Quel est le signe de $\varphi(x_0)$?
- **b.** Montrer qu'il existe $x_1 \in \Omega$ tel que $\varphi(x_1) \leq 0$.
- **c.** En déduire qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $d(x, \partial\Omega) = d(f(x), \partial\Omega)$.

5. Soit S la sphère unité de E, et soit $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$. Montrer que $d(x, S) = 1 - \|x\|$ (on distinguera le cas $x = 0$).

6. En déduire que si f est une fonction continue sur la boule unité ouverte $B = B(0, 1)$, vérifiant $f(B) = B$, alors il existe $x \in B$ tel que $\|f(x)\| = \|x\|$.

Exercice II. (*5 pts*) Dans la suite, E désigne l'espace vectoriel $C([0, 1], \mathbf{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$, définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Pour tout réel $\lambda > 0$ et tout élément f de E, on pose $N_\lambda(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|f(x)e^{-\lambda x}\right|$.

1. Montrer que N_λ définit une norme sur E et que cette norme est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. En déduire que l'espace vectoriel normé (E, N_λ) est complet.

À tout $f \in E$, on associe la fonction $u(f) : [0, 1] \to \mathbf{R}$ définie par $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f\left(t^2\right)dt$.

2. Vérifier que l'application $u : f \mapsto u(f)$ est linéaire de E dans E et que l'on a

$$(*) \qquad \forall f \in E \quad \forall x \in [0, 1] \qquad |u(f)(x)| \leq N_\lambda(f) \int_0^x e^{\lambda t} dt.$$

3. En déduire que $u : (E, N_\lambda) \to (E, N_\lambda)$ est continue, avec $\|u\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{\lambda}$.

On se donne maintenant un élément f_0 de E et on définit l'application $\varphi : E \to E$ par $\varphi(f) = f_0 + u(f)$.

4. Montrer que l'application $\varphi : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas strictement contractante.

5. En utilisant **3**, montrer qu'il est possible de choisir $\lambda > 0$ tel que $\varphi : (E, N_\lambda) \to (E, N_\lambda)$ soit strictement contractante.

TSVP

6. En déduire qu'il existe une unique fonction $f \in E$ telle que

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = f_0(x) + \int_0^x f(t^2)dt.$$

Exercice III. (*5 pts*) On considère l'application $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(t,x,y) = (x^2 + y^2 - 2t, xyt - 1).$$

On pose $M = \{(t,x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 : f(t,x,y) = (0,0)\}$.

1. Montrer que M ne rencontre aucun des trois plans d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$.

2. Montrer que pour tout $t_0 > 1$, il existe $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ tel que le point (t_0, x_0, y_0) appartienne à M.

Dans la suite, on considère un point (t_0, x_0, y_0) de M avec $t_0 > 1$.

3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert I de t_0 dans $\mathbf{R}$, un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbf{R}^2$ et une fonction $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ de classe C^1 tels que

$$\big((t,x,y) \in I \times U \text{ et } f(t,x,y) = (0,0)\big) \Longleftrightarrow \big(t \in I \text{ et } (x,y) = \gamma(t)\big).$$

4. Montrer qu'au voisinage de (t_0, x_0, y_0), l'ensemble M est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

Exercice IV. (*5 pts*) Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction différentiable en tout point et soit k un nombre réel strictement positif.

1. Pour x fixé dans $\mathbf{R}^n$, on définit la fonction $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ par $\varphi(t) = t^{-k} f(tx)$. Justifier que φ est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$ et que l'on a

$$\varphi'(t) = t^{-k-1}\big(t\, df(tx) \cdot x - kf(tx)\big).$$

Dans la suite, on dit que f est *homogène de degré* k si pour tout réel $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^n$, on a $f(tx) = t^k f(x)$.

2. En utilisant **1**, montrer que si f est homogène de degré k, alors elle vérifie l'*identité d'Euler*

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \qquad \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = kf(x).$$

Réciproquement, montrer que si f vérifie l'identité d'Euler, alors elle est homogène de degré k.

3. Montrer que si f est homogène de degré k et si a est un point critique de f, alors on a nécessairement $f(a) = 0$.

Dans la suite, on prend $n = 3$ et on considère la fonction $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xz^2 + 2xyz$.

4. La fonction f possède-t-elle un extremum global sur $\mathbf{R}^3$?

5. En utilisant **3**, montrer que f n'a pas non plus d'extremum local dans $\mathbf{R}^3$.

◊◊◊◊◊