Sur le théorème de Hahn-Banach géométrique
S. Lang, algèbre linéaire (appendice 1)

Il existe plusieurs versions du théorème de Hahn-Banach (géométrique ou analytique), suivant le cadre dans lequel on se place. Il s'agit ici du cadre le plus simple: la dimension finie. Notamment,

- tout hyperplan est automatiquement fermé (et toute forme linéaire est automatiquement continue),

- toutes les normes sont équivalentes, on peut donc choisir de munir $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne.

Propriété 1
Soit C une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^n$, et $a \notin \overline{C}$: alors il existe un hyperplan (affine) séparant strictement $\overline{C}$ et a, *i.e.*

$$\exists f \in E',\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \overline{C},\ f(x) \leq \alpha < f(a)$$

Remarque: si C est convexe, alors $\overline{C}$ est convexe. En effet, si $x, y \in \overline{C}$, il existe (x_k) et (y_k) deux suites d'élements de C convergeant respectivement vers x et y. Puisque C est convexe, on a $(1-t)x_k + ty_k \in C$ pour tout k et on conclut en passant à la limite.

<u>Démonstration</u>
• La distance entre $\overline{C}$ et $\{a\}$ est atteinte.
En effet, si $\phi : x \mapsto \|x - a\|$, $\delta := \mathrm{Inf}\{\phi(x) \mid x \in \overline{C}\}$ est bien défini. Or $\phi(x) \geq |\|x\| - \|a\|| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$: ainsi il existe $A > 0$ tel que, pour $\|x\| > A$, $\phi(x) > \delta + 1$: d'où

$$\delta = \mathrm{Inf}\{\phi(x) \mid x \in \overline{C}\} = \mathrm{Inf}\{\phi(x) \mid x \in \overline{C} \cap \overline{B(0, A)}\}$$

Comme ϕ est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur le compact $\overline{C} \cap \overline{B(0, A)}$ (fermé comme intersection de fermés, et borné dans $\mathbb{R}^n$ de dimension finie): ainsi il existe $x_0 \in \overline{C}$ tel que

$$\|a - x_0\| = \mathrm{Inf}\{\phi(x) \mid x \in \overline{C}\} = \mathrm{dist}(a, \overline{C})$$

En particulier $\mathrm{dist}(a, \overline{C}) > 0$ puisque $a \notin \bar{C}$ (... on le savait déjà car la distance entre un compact et un fermé disjoints est toujours > 0).

Remarque: le raisonnement fonctionne quelle que soit la norme choisie. Dans le cas euclidien, x_0 est en fait unique (c'est le projeté orthogonal de a sur $\overline{C}$).

• Soit H l'orthogonal de $\mathbb{R}(a - x_0)$: c'est un hyperplan affine, défini par $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x_0)\}$ où f est la forme linéaire $\langle a - x_0, \cdot \rangle$. Vérifions que H sépare bien (strictement) a et $\overline{C}$:

* $f(a) = \langle a - x_0, a \rangle$;
* soit $x \in \overline{C}$: pour tout $t \in]0;1]$, $(1-t)x_0 + tx \in \overline{C}$, d'où

$$\|(1-t)x_0 + tx - a\|^2 \geq \|x_0 - a\|^2$$

  Or $\|(1-t)x_0 + tx - a\|^2 = \|x_0 - a\|^2 + t^2\|x - x_0\|^2 + 2t\langle x_0 - a, x - x_0 \rangle$, donc en remplacant dans l'inégalité, et en simplifiant par t, on obtient

$$t\|x - x_0\|^2 + 2\langle x_0 - a, x - x_0 \rangle \geq 0$$

  En faisant tendre t vers 0, on en déduit $\langle x_0 - a, x - x_0 \rangle \geq 0$, autrement dit $f(x) \leq f(x_0)$.
* il reste à vérifier que $f(x_0) < f(a)$: or

$$f(a) - f(x_0) = \langle a - x_0, a \rangle - \langle a - x_0, x_0 \rangle = \|a - x_0\|^2 > 0$$

Remarque: la même preuve fonctionne dans un espace de Hilbert, en utilisant le théorème de projection sur un convexe fermé.

Propriété 2
Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$, et $a \in \partial C$: alors C possède un hyperplan d'appui en a, *i.e.* il existe un hyperplan (affine) H contenant a tel que C soit inclus dans l'un des demi-espaces fermés définis par H.

<u>Démonstration</u>
Il suffit de montrer le résultat pour $\overline{C}$. Par définition du bord ∂C, il existe une suite (a_k) d'éléments du complémentaire de $\overline{C}$ tendant vers a. La preuve de la proposition 1 donne pour tout k un point $x_k \in \overline{C}$ (réalisant la distance entre a_k et $\overline{C}$) tel que

$$\forall x \in \overline{C},\ \langle a_k - x_k, x \rangle < \langle a_k - x_k, a_k \rangle$$

autrement dit $\langle v_k, x - a_k \rangle < 0$ où $v_k = \frac{a - x_k}{\|a - x_k\|}$. Comme les vecteurs v_k sont sur la sphère unité, compacte, la suite admet une sous-suite convergente $(v_{\phi(k)})$ vers w de norme 1. Par continuité du produit scalaire, pour tout $x \in \overline{C}$, $\langle v_{\phi(k)}, x - a_{\phi(k)} \rangle \xrightarrow[k \to +\infty]{} \langle w, x - a \rangle$, d'où $\langle w, x - a \rangle \leq 0$. Puisque

$w \neq 0$, cela définit bien un demi-espace fermé délimité par un hyperplan contenant a.

Conséquence 1: théorème de Hahn-Banach version géométrique en dimension finie
Soit A, B deux parties convexes non vides de $\mathbb{R}^n$, disjointes: il existe un hyperplan séparant A et B au sens large, *i.e.*

$$\exists f \in E' \mid \forall x \in A, \forall y \in B,\ f(x) \leq f(y)$$

Remarque: contrairement au cas de la dimension infinie, aucune hypothèse topologique n'est nécessaire sur l'un des deux convexes.

<u>Démonstration</u>
Soit $C = A - B = \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$. On montre facilement que C est convexe; de plus $0 \notin C$ puisque A et B sont disjointes.
• Si $0 \notin \overline{C}$, on applique la proposition 1, qui donne d'ailleurs la séparation stricte (si on suppose A compacte et B fermée, on est dans ce cas-là car alors $0 \notin \overline{A - B}$).
• Si $0 \in \overline{C} \setminus C$, on applique la proposition 2.

Conséquence 2
Tout convexe fermé (non vide et distinct de $\mathbb{R}^n$) de $\mathbb{R}^n$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

<u>Démonstration</u>
En effet, soit $\mathcal{H}$ l'intersection des demi-espaces fermés contenant C (il existe au moins un tel demi-espace d'après la proposition 1). Par définition $\mathcal{H}$ contient C. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathcal{H} \setminus C$, alors vu la proposition 1 il existe un demi-espace fermé contenant x et pas C, contradiction.

<u>Compléments</u>

* cf aussi Tauvel, Mathématiques Générales pour l'agrégation (p.347); et Caldero-Germoni?

* à propos de points extrémaux et du théorème de Krein-Milman (en dimension finie), cf Lang (algèbre linéaire 1, appendice 1).

* application à l'enveloppe convexe de O_n dans Queffélec-Zuily.

En dimension infinie

En dimension infinie, sans hypothèse topologique, on ne peut pas toujours séparer deux convexes disjoints par un hyperplan fermé.

• Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension infinie: il existe une forme linéaire f non continue non continue sur E; alors $A = \{x \mid f(x) < 0\}$ et $B = \{x \mid f(x) > 0\}$ sont deux convexes disjoints (et denses dans E...) mais le seul hyperplan qui les sépare est $\mathrm{Ker} f$, qui n'est pas fermé (il est dense et distinct de E!).

• On peut aussi construire un exemple de deux convexes fermés disjoints qu'on ne peut séparer (au sens large) par un hyperplan fermé (Bourbaki EVT, II, p.83, ex.10). Dans $E = l^1(\mathbb{N})$ muni de la norme 1, soit

$$A = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \geq 1,\ \left| u_n - \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{u_0}{n^3} \right\}$$

$$B = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \geq 1,\ u_n = 0\}$$

On vérifie que ce sont deux convexes fermés non vides disjoints de E. Séparer A et B au sens large par un hyperplan fermé revient à séparer au sens large $A - B$ de 0 par un hyperplan fermé. Or cela est impossible, car on montre que $A - B$ est dense dans $l^1(\mathbb{N})$.