Construction d'une fonction continue n'admettant nulle part de dérivée

Référence: Queffélec-Zuily, chapitre Séries de Fourier

Soit $a > 1$: pour $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = \frac{\sin(a^n t)}{a^n}$. La série $\sum f_n$ converge normalement, *a fortiori* uniformément sur $\mathbb{R}$, et les f_n sont continues: la somme G est donc bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrons que la fonction

$$G : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(a^n t)}{a^n}$$

n'admet nulle part de dérivée. On suppose par l'absurde que G est dérivable en un point t_0.

1. <u>On se ramène à $t_0 = 0$ et au cas d'une fonction g nulle en 0 de dérivée nulle en 0.</u>

   Soit $g(t) = G(t+t_0) - G(t_0) - G'(t_0)\frac{\sin(at)}{a}$: alors g est par hypothèse dérivable en 0, et vérifie $g(0) = g'(0) = 0$. De plus, $\exists C > 0 \mid \forall t,\ |g(t)| \leq C|t|$, en effet:

   - puisque g est dérivable en 0, $\exists \delta > 0 \mid \left(0 < |t| \leq \delta \Longrightarrow \dfrac{|g(t) - g(0)|}{|t - 0|} \leq 1\right)$ et donc pour tout t tel que $|t| \leq \delta$, on a $|g(t)| \leq |t|$.
   - pour $|t| > \delta$, puisque la série $\sum \frac{1}{a^n}$ est convergente (à termes positifs), on peut écrire

   $$|g(t)| \leq |G(t+t_0)| + |G(t_0)| + \left|G'(t_0)\frac{\sin(at)}{a}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^n} + |G(t_0)| + \left|\frac{G'(t_0)}{a}\right|$$

   et en notant M le membre de droite (constant), on a donc $|g(t)| \leq M \leq M\frac{|t|}{\delta}$.

   D'où la conclusion en posant $C = \max(1, M/\delta)$.

2. Soit $\alpha > 0$ (que l'on choisira par la suite).
   <u>Lemme:</u> il existe $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\phi}(0) = 1$ et $\hat{\phi}(x) = 0$ si $|x| \geq \alpha$, où $\hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-itx}\mathrm{d}t$.

   Preuve du lemme:
   Soit ψ une fonction plateau paire à support dans $[-\alpha; \alpha]$ telle que $\psi(0) = \frac{1}{2\pi}$. Posons $\phi = \hat{\psi}$: puisque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a bien $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ montre que $\hat{\phi} = 2\pi\psi$. Par conséquent $\hat{\phi}(0) = 1$ et $\hat{\phi}$ est nulle en-dehors de $]-\alpha; \alpha[$.

3. <u>Soit $g_k(t) = a^k g(t/a^k)\phi(t)$ $(k \in \mathbb{N})$. Montrons que $g_k \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(t)|\mathrm{d}t \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.</u>

   Pour tout k la fonction g_k est continue, et pour tout t on a $|g_k(t)| \leq C|t\phi(t)|$, où la fonction dominante est dans $L^1(\mathbb{R})$ puisque $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par conséquent $g_k \in L^1(\mathbb{R})$. De plus, la suite $(|g_k|)_k$ converge simplement vers la fonction nulle (puisque $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$) qui est dominée par la même fonction que les $|g_k|$: d'après le théorème de convergence dominée, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(t)|\mathrm{d}t \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

4. <u>Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(t)|\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2a}$.</u>

   Par définition, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_k(t)|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} a^k|g(t/a^k)\phi(t)|\mathrm{d}t \geq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} a^k g(t/a^k)\phi(t)e^{-iat}\mathrm{d}t\right|$, où

   $$g(t/a^k) = -G(t_0) - \frac{G'(t_0)}{a}\sin(a^{1-k}t) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(a^{n-k}t + t_0)}{a^n}$$

   Or les fonctions $t \mapsto \phi(t)e^{-iat}$, $t \mapsto \sin(a^{1-k}t)\phi(t)e^{-iat}$ et $\phi_n : t \mapsto \frac{\sin(a^{n-k}t+t_0)}{a^n}\phi(t)e^{-iat}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et la série $\sum \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge (son terme général est majoré par $\frac{1}{a^n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|\mathrm{d}t$): on peut donc intervertir la somme et l'intégrale. Comme

   - $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)e^{-iat}\mathrm{d}t = \hat{\phi}(a)$,

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(a^{1-k}t)\phi(t)e^{-iat}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}(\hat{\phi}(a-a^{1-k}) - \hat{\phi}(a+a^{1-k}))$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2ia^n}(e^{it_0}\hat{\phi}(a-a^{n-k}) - e^{-it_0}\hat{\phi}(a+a^{n-k}))$,

on choisit $\alpha = \min(1, a-1)$: on a alors $|a-a^l| \geq a-1 \geq \alpha$ pour tout $l \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Ainsi pour $k \geq 1$, par construction de ϕ, il ne reste qu'un terme non nul dans la somme: celui correspondant à $n-k=1$ c'est-à-dire $n=k+1$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^k g(t/a^k)\phi(t)e^{-iat}\mathrm{d}t = a^k \frac{e^{it_0}}{2ia^{k+1}}\hat{\phi}(0) = \frac{e^{it_0}}{2ia}$$

d'où la minoration souhaitée.

On obtient une contradiction, par conséquent G n'est dérivable en aucun point.