Homographies

Officiellement une leçon d'algèbre, mais on peut quand même mettre énormément d'analyse (complexe) dedans du moment qu'on utilise un vocabulaire d'algébriste !

Bibliographie : Samuel (Géométrie projective) - Audin - Chatterji II p.436 - Cartan (Fonctions d'une ou plusieurs variables complexes) - Berger

---

1 Le groupe des homographies de la droite complexe

1.1 La notion de "droite complexe" [Samuel p. 102]

On appelle *droite complexe complétée* l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ des droites vectorielles de $\mathbb{C}^2$, muni de la topologie quotient pour la surjection canonique

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ & Z & \mapsto & \text{droite } (0, Z) \end{array}.$$

Interprétation [Berger]

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ noté $\hat{\mathbb{C}}$, muni de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de $\mathbb{C}$ et les complémentaires des compacts de $\mathbb{C}$ augmentés de l'infini ($\infty = \pi(1, 0)$).
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ *via* la projection stéréographique ρ pour laquelle on a posé $\rho(\text{pôle nord}) = \infty$ (et on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$). C'est pourquoi $\hat{\mathbb{C}}$ s'appelle la *sphère de Riemann*.

1.2 Le groupe des homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [Audin p.144,145,147]

Si E et E' sont deux espaces vectoriels, une *homographie* h entre deux espaces projectifs $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E')$ est une application telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to E'$ pour lequel on ait :

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & E' \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi' \\ \mathbb{P}(E) & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}(E') \end{array}$$

où $\pi' \circ f = h \circ \pi$ (le diagramme commute).

> L'ensemble des homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ forme un groupe pour la composition, noté H, et isomorphe à $PSL_2(\mathbb{C}) := SL_2(\mathbb{C})_{/\{\pm I_2\}}$.

Preuve

Il est immédiat que H est un groupe. De plus, l'application $\phi : f \mapsto h$ de $GL(E)$

dans le groupe projectif $G\mathbb{P}(E)$ (formé des homographies de $\mathbb{P}(E)$) est un morphisme de groupes, surjectif par définition. Comme $f \in \operatorname{Ker}\phi \iff \pi \circ f = \pi$ équivaut à ce que f préserve toutes les droites vectorielles, c'est-à-dire soit une homothétie, on obtient $G\mathbb{P}(E) \simeq GL(E)_{/\{\text{homothéties}\}}$. Pour $E = \mathbb{C}^2$,

$$H := G\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq GL_2(\mathbb{C})_{/\{\text{homothéties}\}} \simeq SL_2(\mathbb{C})_{/\{\pm I_2\}}.$$

□

Explicitons cet isomorphisme :

Les homographies de $\mathbb{C}$ sont exactement les applications $h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ définies par

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc = 1$ (avec par convention $h(z) = \infty$ si $cz + d = 0$). Ce sont des homéomorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$.

Preuve

- Une homographie h provient d'un isomorphisme linéaire $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Soit (e_1, e_2) la $\mathbb{C}$-base canonique de $\mathbb{C}^2$. Dans cette base, on décompose

  $$f(z_1, z_2) = (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2),$$

  c'est-à-dire que f est représentée dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad - bc \neq 0$.
  Notons $\sim$ la relation d'équivalence induite par la surjection $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

  $$(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2') \iff \pi(z_1, z_2) = \pi(z_1', z_2').$$

  Soit $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ identifié à $\hat{\mathbb{C}}$. Si $z \in \mathbb{C}$:

  $$\begin{aligned} h(z) &= h(\pi(z,1)) = \pi(f(z,1)) \\ &= \pi(az+b, cz+d) = \left| \begin{array}{l} \pi\left(\frac{az+b}{cz+d}, 1\right) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ si } cz+d \neq 0 \\ \\ \pi(az+b, 0) = \pi(1,0) = \infty \text{ si } cz+d = 0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

  Si $z = \infty = \pi(1,0)$:

  $$h(\infty) = h(\pi(1,0)) = \pi(f(1,0)) = \pi(a,c) = \left| \begin{array}{l} \pi\left(\frac{a}{c}, 1\right) = \frac{a}{c} \text{ si } c \neq 0 \\ \\ \pi(a,0) = \pi(1,0) = \infty \text{ si } c = 0 \end{array} \right. .$$

  Avec les conventions habituelles sur l'infini, on obtient donc

  $$\forall z \in \hat{\mathbb{C}},\ h(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

et dans toute la suite on fait cette identification.
Réciproquement, si $h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ est défini par $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, où $ad - bc \neq 0$, on pose

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (z_1, z_2) & \mapsto & (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2) \end{array}.$$

Alors f est un isomorphisme linéaire, et on vérifie que

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ h \circ \pi(z_1, z_2) = \pi \circ f(z_1, z_2).$$

De plus, le passage au quotient permet de supposer $f \in SL_2(\mathbb{C})$ (puisque cela donne la même homographie), c'est-à-dire $ad - bc = 1$.

- Puisque H est un groupe, on obtient directement que l'application $h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ est bijective. Par définition de la topologie quotient, h est continue si et seulement si $h \circ \pi = \pi \circ f$ est continue sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, ce qui est vrai. Le même raisonnement montre que h^{-1} est continue, donc h est un homéomorphisme sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (et sur $\hat{\mathbb{C}}$ vu la topologie choisie sur $\hat{\mathbb{C}}$ et l'homéomorphisme : $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \hat{\mathbb{C}}$).

□

1.3 Propriétés algébriques de H [Audin p.146,147,153]

Le groupe H est engendré par les similitudes directes $z \mapsto az + b$ $(a \neq 0)$ et l'application $z \mapsto 1/z$.

Preuve
Effectuons la décomposition en éléments simples de $\frac{az+b}{cz+d}$: on obtient $\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d}$ si $c \neq 0$, et $\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ si $c = 0$. □

L'action $H \times \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ qui à (h, z) associe $h(z)$ est fidèle et simplement 3-transitive.

Rappelons les définitions suivantes :

- action *fidèle* signifie que l'application $H \to \mathrm{Bij}(\hat{\mathbb{C}})$, $h \mapsto (z \mapsto h(z))$ est injective.
- action *simplement 3-transitive* signifie que pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ deux-à-deux distincts, et tous $z_1', z_2', z_3' \in \hat{\mathbb{C}}$ deux-à-deux distincts, il existe une unique homographie h telle que $h(z_i) = z_i'$ pour $i = 1, 2, 3$.

Preuve
La fidélité est immédiate. Pour la simple 3-transitivité, il suffit de montrer la propriété voulue pour $(z_1', z_2', z_3') = (0, 1, \infty)$ (quitte ensuite à composer deux homographies $h_2^{-1} \circ h_1$).

- Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = 0 \Longleftrightarrow az_1 + b = 0 \Longleftrightarrow b = -az_1$$

$$\frac{az_3+b}{cz_3+d}=\infty \Longleftrightarrow cz_3+d=0 \Longleftrightarrow d=-cz_3$$

et

$$\frac{az_2+b}{cz_2+d}=1 \Longleftrightarrow az_2+b=cz_2+d \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{soit } z_2=0: \text{ alors } b=d \text{ et } a=cz_3/z_1 \\ \text{soit } z_2\neq 0: \text{ alors } a=c(z_2-z_3)/(z_2-z_1) \end{array} \right. .$$

Finalement, si $z_2=0$:

$$a=c\frac{z_3}{z_1},\ b=-cz_3,\ d=-cz_3$$

et si $z_2\neq 0$:

$$a=c\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1},\ b=-c\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}z_1,\ d=-cz_3.$$

Ainsi a,b,d s'expriment en fonction de c,z_1,z_2,z_3 et dépendent linéairement de c. On vérifie que $c\neq 0$ (sinon, $h(z_3)=\infty$ *ie* $z_3=\infty\notin\mathbb{C}$), et donc

$$ad-bc=a(-cz_3)-(-az_1)c=ac(z_1-z_3)\neq 0.$$

- Si $z_1=\infty$:

$$\frac{az_1+b}{cz_1+d}=0 \Longleftrightarrow a=0$$

et donc

$$\frac{b}{cz_3+d}=\infty \Longleftrightarrow d=-cz_3,\ \frac{b}{cz_3+d}=1 \Longleftrightarrow b=c(z_2-z_3).$$

- Si $z_2=\infty$:

$$\frac{az_2+b}{cz_2+d}=1 \Longleftrightarrow a=c$$

et donc

$$\frac{az_1+b}{az_1+d}=0 \Longleftrightarrow b=-az_1=-cz_1,\ \frac{az_3+b}{az_3+d}=\infty \Longleftrightarrow d=-cz_3.$$

- Si $z_3=\infty$:

$$\frac{az_3+b}{cz_3+d}=\infty \Longleftrightarrow a/c=\infty \Longleftrightarrow c=0$$

et donc

$$\frac{az_1+b}{d}=0 \Longleftrightarrow b=-az_1,\ \frac{az_2+b}{d}=1 \Longleftrightarrow d=a(z_2-z_1).$$

D'où l'existence et l'unicité de h. $\square$

2 Utilisation des homographies en géométrie

2.1 Propriétés géométriques des homographies [Audin p.153, Samuel p.103+..., Chatterji p.439]

Commençons par donner un corollaire du 1.3 :

> Les homographies conservent les angles.

On appelle *cercle-droite* un cercle de la sphère de Riemann, c'est-à-dire :
* soit un cercle de $\mathbb{S}^2$ passant par le pôle nord N (qui correspond à une droite du plan) ;
* soit un cercle de $\mathbb{S}^2$ ne passant pas par N (qui correspond donc à un cercle du plan).

> Les cercles-droites sont exactement donnés par les équations $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, où $a, c \in \mathbb{R}$ et $|b|^2 > ac$.

Preuve
Les cercles et les droites du plan sont représentés par une équation de ce type. En effet, une droite a pour équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$: on pose $a = 0$, $b = (\alpha - i\beta)/2$, $c = \gamma$: alors $|b|^2 > ac$.

Pour un cercle d'équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = R^2$ où $\alpha, \beta, R \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta, R) \neq (0, 0, 0)$, on pose $z = x + iy$:

$$|z|^2 + \alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \beta \frac{z - \bar{z}}{2i} - R^2 = z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

où $a = 1$, $b = (\alpha - i\beta)/2$, $c = -R^2$. On a bien $|b|^2 > ac = -R^2$ (c'est vrai dès que $(b, R) \neq (0, 0)$, et si $b = R = 0$ c'est-à-dire $\alpha = \beta = R = 0$, alors l'équation $x^2 + y^2 = 0$ ne représente pas un cercle).

Réciproquement, considérons l'équation $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, où $a, c \in \mathbb{R}$ et $|b|^2 > ac$. En posant $z = x + iy$ et $b = \alpha + i\beta$, on obtient

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = ax^2 + ay^2 + 2\alpha x - 2\beta y + c.$$

Si $a = 0$, on a $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ (sinon, $b = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $|b|^2 > ac$) et l'équation $2\alpha x - 2\beta y + c = 0$ représente une droite du plan.

Si $a \neq 0$, l'équation devient

$$\left(x + \frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{a^2} = \frac{-ac + |b|^2}{a^2},$$

qui représente un cercle si et seulement si $|b|^2 > ac$. □

> Les homographies conservent les cercles-droites.

Preuve
Vu 1.3, il suffit de montrer que les équations de la forme $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ sont globalement préservées par les similitudes et par $z \mapsto 1/z$.

- Les similitudes (translations, homothéties, rotations) transforment les cercles (resp. les droites) en cercles (resp. en droites).
- L'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $az\bar{z}+bz+\bar{b}\bar{z}+c=0$ est transformé par l'application $z \mapsto 1/z$ en l'ensemble des $z' \in \mathbb{C}^*$ tels que

$$\frac{a}{z'\bar{z}'} + \frac{b}{z'} + \frac{\bar{b}}{\bar{z}'} + c = 0,$$

c'est-à-dire $a + b\bar{z}' + \bar{b}z' + cz'\bar{z}' = 0$. De plus, si $z = 0$ appartient au cercle-droite d'équation $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, alors $c = 0$, donc l'ensemble obtenu après transformation par $z \mapsto 1/z$ est une droite (*i.e.* un cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ passant par ∞).

□

2.2 Un invariant : le birapport [Samuel p.74-75, Chatterji p.444-445]

Le *birapport* de quatre points w_1, w_2, w_3, w_4 de $\hat{\mathbb{C}}$, avec w_1, w_2, w_3 distincts, est l'image de w_4 par l'unique homographie qui envoie (w_1, w_2, w_3) sur $(\infty, 0, 1)$. On le note $[w_1, w_2, w_3, w_4]$.

On cherche une expression explicite du birapport. Soit h l'unique homographie qui transforme (w_1, w_2, w_3) en $(\infty, 0, 1)$. Le même calcul que celui fait pour montrer la 3-transitivité (avec $z_1 = w_2$, $z_2 = w_3$, $z_3 = w_1$) montre que :

– si $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ et si $w_3 \neq 0$:

$$h(z) = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \times \frac{z - w_2}{z - w_1};$$

– si $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ et si $w_3 = 0$:

$$h(z) = \frac{\frac{w_1}{w_2} z - w_1}{z - w_1} = \frac{w_1}{w_2} \frac{z - w_2}{z - w_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \times \frac{z - w_2}{z - w_1};$$

– si $w_2 = \infty$: $h(z) = \dfrac{w_3 - w_1}{z - w_1}$;
– si $w_3 = \infty$: $h(z) = \dfrac{z - w_2}{z - w_1}$;
– si $w_1 = \infty$: $h(z) = \dfrac{z - w_2}{w_3 - w_2}$.

Finalement :

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} \times \frac{w_4 - w_2}{w_4 - w_1}$$

lorsque cette expression a un sens (par exemple si les $w_i \in \mathbb{C}$ sont deux-à-deux distincts).

On remarque que si w_4 n'est pas distinct des autres w_i, l'expression explicite peut donner une forme indéterminée, tandis que la définition du birapport $[w_1, w_2, w_3, w_4]$ garde un sens.

Si $w_1, w_2, w_3, w_4, w'_1, w'_2, w'_3, w'_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ avec w_1, w_2, w_3 distincts et w'_1, w'_2, w'_3 distincts, alors

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [w'_1, w'_2, w'_3, w'_4]$$

si et seulement s'il existe une homographie h telle que $h(w_i) = w'_i$ pour $i = 1, \ldots, 4$.

En particulier, si $h \in H$, $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [h(w_1), h(w_2), h(w_3), h(w_4)]$:

<u>le birapport est invariant sous l'action des homographies</u>.

Preuve

On note k l'unique homographie qui transforme (w_1, w_2, w_3) en $(\infty, 0, 1)$ et k' l'unique homographie qui transforme (w'_1, w'_2, w'_3) en $(\infty, 0, 1)$: alors

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = k(w_4) \text{ et } [w'_1, w'_2, w'_3, w'_4] = k'(w_4).$$

($\Longrightarrow$) Si $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [w'_1, w'_2, w'_3, w'_4]$, c'est-à-dire $k(w_4) = k'(w'_4)$: alors $h := k'^{-1} \circ k$ est une homographie. Par construction, $h(w_i) = w'_i$ pour $i = 1, 2, 3$, et

$$h(w_4) = k'^{-1}(k(w_4)) = k'^{-1}(k'(w'_4)) = w'_4.$$

($\Longleftarrow$) S'il existe une homographie h telle que $h(w_i) = w'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$: alors$h$ est l'unique homographie qui transforme (w_1, w_2, w_3) en (w'_1, w'_2, w'_3), et $h = k'^{-1} \circ k$. Donc

$$w'_4 = h(w_4) = k'^{-1}(k(w_4)), \text{ d'où } k(w_4) = k'(w'_4)$$

i.e. $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [w'_1, w'_2, w'_3, w'_4]$.

□

Conséquence :

Quatre points deux-à-deux distincts $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si $[w_1, w_2, w_3, w_4] \in \mathbb{R}$.

Preuve

($\Longrightarrow$) Les homographies conservent les cercles-droites. Soit h l'unique homographie transformant (w_1, w_2, w_3) en $(\infty, 0, 1)$: si w_4 appartient au cercle-droite contenant $w_1,\ w_2$ et w_3, alors $h(w_4)$ appartient au cercle-droite contenant $\infty,\ 0$ et 1, c'est-à-dire à la droite réelle. Autrement dit

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [h(w_1), h(w_2), h(w_3), h(w_4)] = h(w_4) \in \mathbb{R}.$$

($\Longleftarrow$) Avec les mêmes notations, on obtient que si $[w_1, w_2, w_3, w_4] \in \mathbb{R}$, alors $h(w_4) \in \mathbb{R}$, *i.e.* $h(w_4)$ appartient au cercle-droite contenant ∞, 0 et 1. Puisque h^{-1} est encore une homographie, on en déduit que w_4 appartient au cercle-droite contenant w_1, w_2 et w_3, c'est-à-dire que w_1, w_2, w_3, w_4 sont cocycliques ou alignés.

□

2.3 Action du groupe $\mathfrak{S}_4$ sur la sphère de Riemann - DEV. N°1 [Samuel]

Soit $\theta = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_4$: on définit

$$R_\sigma(\theta) := [w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, w_{\sigma(3)}, w_{\sigma(4)}].$$

Alors R_σ est bien défini et appartient à H. De plus, l'application $\sigma \mapsto R_\sigma$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_4$ dans H.

Le groupe $\mathfrak{S}_4$ agit sur $\hat{C}$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_4 \times \hat{C} & \to & \hat{C} \\ (\sigma, z) & \mapsto & R_\sigma(z) \end{array}.$$

Si $z \in \hat{C}$, l'orbite de z sous cette action est $\left\{z, \frac{1}{z}, 1-z, \frac{1}{1-z}, \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z-1}\right\}$.

Application : <u>$\mathcal{A}_4$ n'est pas simple</u>.

3 Homographies en analyse et en analyse complexe

3.1 Points fixes d'une homographie

Soit $h \in H$. Vu l'isomorphisme entre H et $SL_2(\mathbb{C})_{/\{\pm I_2\}}$, on peut choisir $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un représentant de h dans $SL_2(\mathbb{C})$; alors $h = \mathrm{Id}$ si et seulement si $A \in \{-I_2; I_2\}$.

On suppose $h \neq \mathrm{Id}$. Alors :
- $\operatorname{tr} A = \pm 2$ si et seulement si h a un unique point fixe ; alors h est conjuguée à $z \mapsto z + 1$.
- $\operatorname{tr} A \neq \pm 2$ si et seulement si h a exactement deux points fixes ; alors h est conjuguée à $z \mapsto \lambda z$, où $\lambda \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ est le quotient des valeurs propres de A.

Remarquons que, comme h n'a que deux représentants dans $SL_2(\mathbb{C})$ (A et $-A$), ces conditions sont indépendantes du représentant choisi. Pour démontrer ce résultat, on utilisera deux lemmes :

Lemme 1 *Soit $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la surjection canonique. Alors z est un point fixe de h si et seulement si $\pi^{-1}(z)$ est une direction propre de A.*

Preuve
Soit f un isomorphisme induisant h. On a :

$$\begin{aligned} h(z) = z &\iff \forall v \in \pi^{-1}(z),\ h \circ \pi(v) = \pi(v) \\ &\iff \forall v \in \pi^{-1}(z),\ \pi(f(v)) = \pi(v) \\ &\iff \forall v \in \pi^{-1}(z),\ f(v) \text{ est colinéaire à } v, \end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion puisque f est représenté dans la base canonique par A, et $\pi^{-1}(z)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{C}^2$ privée de 0. □

Lemme 2 *Si $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ sont conjuguées (c'est-à-dire, s'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$), alors quitte à considérer λP à la place de P pour λ tel que $\lambda^2 = \det P$, on peut supposer $P \in SL_2(\mathbb{C})$.*

En particulier, si A et B sont les représentants respectifs dans $SL_2(\mathbb{C})$ de $h, k \in H$, alors h et k sont conjuguées.

Preuve
Rappelons que l'application qui à un élément de $SL_2(\mathbb{C})$ associe l'homographie correspondante est un morphisme de groupe, et transmet donc la conjugaison. □

Preuve
On s'est donc *ramené à un problème d'algèbre linéaire* : déterminer les éléments propres de la matrice A. En particulier, on voit immédiatement que h a au plus deux points fixes, et au moins un (puisqu'on peut trigonaliser A).

- Si $\operatorname{tr} A = 2$: le polynôme caractéristique de A est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc la forme de Jordan de A est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $h \neq \mathrm{Id}$ par hypothèse, $A \neq \pm I_2$ et donc A est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable (son polynôme minimal $(X-1)^2$ n'étant pas scindé à racines simples) et n'a qu'une seule direction propre : ainsi h admet un unique point fixe. De plus, h est conjuguée à l'homographie représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $z \mapsto z + 1$.
- Si $\operatorname{tr} A = -2$: la matrice $-A$ représentant aussi h, on se ramène au cas précédent.
- Si $|\operatorname{tr} A| \neq 2$: le polynôme caractéristique $X^2 - (\operatorname{tr} A)X + 1$ a deux racines distinctes, λ_1 et $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ (*attention, il s'agit d'un polynôme à coefficients complexes, on peut donc simplement dire qu'il a deux racines complexes, qui sont égales si et seulement si le discriminant est nul*). La matrice A est donc diagonalisable et h admet exactement deux points fixes. De plus, h est conjuguée à l'homographie représentée par la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $z \mapsto \frac{\lambda_1}{\lambda_2} z$.

□

<u>Remarques</u>

– L'ordre dans lequel on place les valeurs propres de A n'a pas d'importance, car les matrices $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ sont conjuguées dans $SL_2(\mathbb{C})$ (considérer $e_1 \mapsto e_2,\ e_2 \mapsto e_1$). En fait :

Lemme 3 *Les transformations $z \overset{h}{\mapsto} \lambda z$ et $z \overset{k}{\mapsto} \mu z$ (où $\lambda, \mu \neq 0$) sont conjuguées si et seulement si $\lambda = \mu$ ou $\lambda = 1/\mu$.*

Preuve

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$ et considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{pmatrix}$ (comme on raisonne dans $PSL_2(\mathbb{C})$, le choix de $\pm\alpha$ et $\pm\beta$ n'a pas d'importance). Alors h et k sont conjuguées si et seulement si A est semblable à $\pm B$, ce qui donne que A^2 est semblable à B^2 et donc $\lambda = \mu$ ou $\lambda = 1/\mu$. La réciproque est directe. □

– Pour (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$: ∞ est point fixe de h si et seulement si $\pi^{-1}(\infty)$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}e_1$ par définition de ∞) est une direction propre de A, c'est-à-dire $c = 0$.

Supposons $A \in SL_2(\mathbb{R})$, $A \neq \pm I_2$. Alors
- $|\mathrm{tr}\, A| = 2$ si et seulement si h est conjuguée à une translation ;
- $|\mathrm{tr}\, A| < 2$ si et seulement si h est conjuguée à une rotation ;
- $|\mathrm{tr}\, A| > 2$ si et seulement si h est conjuguée à une homothétie.

Preuve

On reprend les différents cas de la démonstration précédente. Le cas $|\mathrm{tr}\, A| = 2$ étant déjà traité, on suppose $|\mathrm{tr}\, A| \neq 2$: alors le polynôme caractéristique de A est à coefficients réels et a deux racines distinctes λ_1 et λ_2.

Si $|\mathrm{tr}\, A| < 2$, les deux racines sont complexes conjuguées, et h est conjuguée à $z \mapsto \frac{\lambda_1}{\lambda_2} z$, qui est une rotation car $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| = 1$ et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq \pm 1$.

Si $|\mathrm{tr}\, A| > 2$, les deux racines sont réelles, donc le quotient des racines est réel, différent de 1 et $z \mapsto \frac{\lambda_1}{\lambda_2} z$ est une homothétie. □

3.2 Application à l'étude des suites homographiques

Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\hat{\mathbb{C}}$ est dite homographique lorsqu'elle est défiinie par

$$u_0 \in \hat{\mathbb{C}},\ u_{n+1} = h(u_n)$$

pour $h \in H$. On suppose $h \neq \pm\mathrm{Id}$. Remarquons que si h et g sont conjuguées ($h = fgf^{-1}$), alors

$$h(z) = z \Longleftrightarrow f^{-1}(h(z)) = g(f^{-1}(h(z))),$$

et donc la conjugaison échange les points fixes (car les homographies sont bijectives). Par ailleurs, on a alors $h^n = fg^nf^{-1}$. On se ramène ainsi à étudier le comportement des suites homographiques définies par $h(z) = z + 1$ ou $h(z) = \lambda z$.

Dans le cas $h(z) = z + 1$, $h^n(u_0) = u_0 + n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$ qui est le seul point fixe de h (vrai pour tout u_0).

Dans le cas $h(z) = \lambda z$: h possède exactement deux points fixes, 0 et ∞, et il vient $h^n(u_0) = \lambda^n u_0$. Si $u_0 \in \{0, \infty\}$, la suite $(u_n)_n$ est constante. Sinon :

$$u_n = h^n(u_0) \left| \begin{array}{l} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ si } |\lambda| < 1 \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty \text{ si } |\lambda| > 1 \\ \text{n'a pas de limite si } |\lambda| = 1. \end{array} \right.$$

Notons que si $u_0 \notin \{0, \infty\}$ et $|\lambda| = 1$, la suite $(u_n)_n$ est périodique si λ est une racine de l'unité, et sinon elle est dense dans le cercle $C(0, |u_0|)$. Récapitulons :

Supposons $h \in H$, et $h \neq \pm\mathrm{Id}$. On note A un représentant de h sans $SL_2(\mathbb{C})$.

- Si $|\mathrm{tr}\, A| = 2$, la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe de h, quel que soit u_0.
- Si $|\mathrm{tr}\, A| \neq 2$, on note $\lambda_1 \neq \lambda_2$ les deux valeurs propres de A et $z_1 \neq z_2$ les deux points fixes de h : $(u_n)_n$ est constante si $u_0 \in \{z_1, z_2\}$. Sinon :
  - si $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, $(u_n)_n$ converge vers l'un des deux points fixes de h (indépendant du choix de u_0 : avec les notations ci-dessus, la limite est $f(0)$ si $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, et $f(\infty)$ sinon).
  - si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, soit λ_1/λ_2 est une racine $k$ième de l'unité et dans ce cas (u_n) est k-périodique, soit $(u_n)_n$ est dense dans le cercle-droite $f\left(C(0, |f^{-1}(u_0)|)\right)$.

Si $|\mathrm{tr}\, A| \neq 2$, les rôles respectifs des deux points fixes dépendent, comme la position de $|\lambda_1/\lambda_2|$ par rapport à 1, du choix de la conjugaison.

3.3 Automorphismes de la sphère de Riemann - DEV. N°2 [Cartan]