Préparation à l'agrégation — Université de Provence
Analyse complexe — 2006-2007

Exercices

1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
$$f \text{ constante; } \operatorname{Re} f \text{ constante; } \operatorname{Im} f \text{ constante; } |f| \text{ constante.}$$

2. Soit $f(z) = \dfrac{z}{1+z+z^2}$.
   (a) Développer f en série entière au voisinage de 0.
   (b) Quel est le rayon de convergence de la série obtenue?
   (c) Donner le développement en série de Laurent de f au voisinage de chacun des pôles.

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et supposons U convexe, ou étoilé, ou plus généralement simplement connexe (suivant la version du théorème de Cauchy que l'on connaît). On rappelle que le théorème de Cauchy donne alors l'existence, pour toute fonction holomorphe sur U, d'une primitive holomorphe sur U.
   Soit f holomorphe sur U ne s'annulant pas.
   (a) Montrer qu'il existe $g \in H(U)$ telle que $f = \exp g$. On dit que g est une *branche sur U du logarithme de f*, et on note $g = \operatorname{Log} f$.
   (b) Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, montrer qu'il existe $h \in H(U)$ ne s'annulant pas telle que
$$f = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{Log} h\right).$$

4. Montrer que
$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$$
   sont bien définies. Calculer I et J en intégrant la fonction $f : z \mapsto e^{-z^2}$ sur le chemin γ_R dont l'image est formée par le segment $[0; R]$, l'arc de cercle de centre 0 et de rayon R donné par $0 \leq \theta \leq \pi/4$ et le segment $[0; Re^{i\pi/4}]$.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ à l'aide de la fonction $\dfrac{e^{iz}}{z}$.

6. *(existence d'un point singulier sur le cercle de convergence)*
   Soit S une série entière de rayon de convergence $0 < R < \infty$. Un point a du cercle de convergence est *régulier* s'il existe une série entière en $(z-a)$ coïncidant avec S près de a. Un point est *singulier* s'il n'est pas régulier.
   (a) Montrer que l'ensemble des points réguliers forme un ouvert.

(b) Montrer que 1 est l'unique point singulier de $\sum z^n$.

(c) Vérifier que $S = \sum z^{2^n}$ a pour rayon de convergence 1. Montrer que pour tous $k,l \in \mathbb{N}$, $|S(te^{2ik\pi/2^l})| \to \infty$ pour t réel tendant vers 1^-. En déduire que les $e^{2ik\pi/2^l}$ $(k,l \in \mathbb{N})$ sont des points singuliers de S.
On peut montrer que les points considérés sont denses sur le cercle, ce qui implique d'après la question 1 que tous les points du cercle de convergence sont singuliers.

(d) On suppose que tout point du cercle de convergence $C(0,R)$ est régulier pour S. Montrer qu'il existe un recouvrement fini du cercle par des disques $D_1, \ldots, D_k$, et des séries entières $S_1, \ldots, S_k$ telles que S_j converge sur D_j et coïncide avec S sur $\overline{D(0,R)} \cap D_j$. Vérifier que la fonction définie par $f = S$ sur $D(0,R)$ et $f = S_j$ sur D_j est bien définie et analytique sur $D(0,R) \cup \bigcup_j D_j$. En déduire une contradiction.

7. *(tiré du sujet d'Analyse 2002)*

(a) On considère la fonction $\operatorname{Log} z$ définie pour $|z-1| < 1$ par $\operatorname{Log} z = -\sum_{k\geq 1} \frac{(1-z)^k}{k}$.
* Montrer que, pour $|z-1| \leq \frac{1}{2}$, on a $|\operatorname{Log} z| \leq \ln \frac{1}{1-|z-1|} \leq 2|z-1|$.
* Vérifier que pour $|z-1| < 1$, on a $\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z}$ et $e^{\operatorname{Log} z} = z$.

(b) Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |g(z)| \leq \left|\phi(\operatorname{Re} z)e^{|\operatorname{Im} z|}\right|$$

où $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\phi \xrightarrow[\pm\infty]{} 0$.
* Montrer que $h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{itx}\mathrm{d}t$ est bien définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
* Montrer que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{-xy}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+iy)e^{itx}\mathrm{d}t$. En déduire que h est à support compact et que son support est contenu dans $[-1;1]$.

8. *(tiré du sujet d'Analyse 1995)*
Pour tout $r > 0$, on note C_r le cercle de centre 0 et de rayon r et D_r le disque ouvert de centre 0 et de rayon r. Une fonction holomorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est dite *univalente sur* U si elle est injective sur U.

(a) Déterminer les images de C_1 et D_1 par l'homographie $\psi(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

(b) Soit $a \in D_1$ et $\gamma \in C_1$. On note $\Phi_{a,\gamma}$ l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\}$ par $\Phi_{a,\gamma}(z) = \gamma\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que $\Phi_{a,\gamma|D_1}$ est bijective de D_1 dans D_1.

(c) Soit h une homographie de D_1 dans D_1, bijective. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,\gamma) \in D_1 \times C_1$ tel que $h = \Phi_{a,\gamma}$.

(d) On considère $h = \Phi_{a,\gamma}$. Exprimer, pour $z \in D_1$, $|h'(z)|^2$ en fonction de $|h(z)|^2$ et $|z|^2$.

(e) Pour tout $z \in D_1$, on pose $k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n$. Exprimer $k(z)$ en fonction de $\psi(z)$ et en déduire que k est univalente sur D_1. Déterminer $k(D_1)$.