Préparation à l'agrégation — Université de Provence
Analyse complexe — 2006-2007

Corrigé des exercices

1. Notons u (resp. v) la partie réelle (resp. imaginaire) de f.

   $i) \Longrightarrow ii)$ Direct.

   $ii) \Longleftrightarrow iii)$ Les relations de Cauchy-Riemann montrent que les dérivées partielles de u sont nulles si et seulement si les dérivées partielles de v sont nulles. Si u est constante, ses dérivées partielles sont nulles, donc les dérivées partielles de v sont nulles. Puisqu'on se place sur un *ouvert connexe* de $\mathbb{C}$, cela implique que v est constante. De même, si v est constante, u est constante.

   $iii) \Longrightarrow iv)$ Supposons que v est constante: on vient de montrer qu'alors u est aussi constante, et par conséquent $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$ est constante.

   $iv) \Longrightarrow i)$ On suppose que u^2+v^2 est constante égale à c, ce qui donne:

$$\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial x}v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}u + \frac{\partial v}{\partial y}v = 0.$$

   A l'aide des conditions de Cauchy-Riemann, on en déduit:

$$\frac{\partial u}{\partial x}u - \frac{\partial u}{\partial y}v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial u}{\partial y}u = 0.$$

   Considérons ces équations comme un système de deux inconnues, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$. Le déterminant du système vaut $u^2+v^2 = c$. Si $c \neq 0$, le système admet une unique solution, la solution nulle:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

   Puisqu'on se place sur un *ouvert connexe* de $\mathbb{C}$, cela implique que u est constante, et de même que précédemment on en déduit que v est aussi constante: donc f est constante.

   Si $c = 0$, on a $u^2+v^2 = 0$ et donc $u = v = 0$: alors f est constante nulle.

2. **Séries de Laurent**

   (a) Remarquons qu'au voisinage de 0,

$$f(z) = \frac{z(1-z)}{1-z^3} = z(1-z)\sum_{k=0}^{+\infty} z^{3k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

   où $a_n = 0$ si $n \equiv 0$ [3], $a_n = 1$ si $n \equiv 1$ [3] et $a_n = -1$ si $n \equiv 2$ [3].

(b) D'après la formule d'Hadamard, le rayon de convergence vaut

$$\limsup |a_n|^{1/n} = 1.$$

(c) La fonction f possède deux pôles: $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$, et

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})} \\ &= \frac{z-e^{2i\pi/3}}{(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})} + \frac{e^{2i\pi/3}}{(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})} \\ &= \frac{e^{2i\pi/3}}{z-e^{2i\pi/3}} \times \frac{1}{z-e^{-2i\pi/3}} + \frac{1}{z-e^{-2i\pi/3}}. \end{aligned}$$

Or au voisinage de $e^{2i\pi/3}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-e^{-2i\pi/3}} &= \frac{1}{(z-e^{2i\pi/3})+(e^{2i\pi/3}-e^{-2i\pi/3})} \\ &= \frac{1}{i\sqrt{3}+(z-e^{2i\pi/3})} \\ &= \frac{-i\sqrt{3}/3}{1-i\frac{\sqrt{3}}{3}(z-e^{2i\pi/3})} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{2i\pi/3})^n, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{2i\pi/3}}{z-e^{2i\pi/3}}\left(\frac{-i\sqrt{3}}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{2i\pi/3})^n\right) \\ &\qquad - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{2i\pi/3})^n \\ &= \frac{-i\sqrt{3}e^{2i\pi/3}/3}{z-e^{2i\pi/3}} - \left(1+e^{2i\pi/3}\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{2i\pi/3})^n \\ &= \sum_{n=-1}^{+\infty} b_n(z-e^{2i\pi/3})^n \end{aligned}$$

où $b_{-1} = -i\sqrt{3}e^{2i\pi/3}/3$ et $b_n = \left(1+e^{2i\pi/3}\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}$ si $n \geq 0$.

De même,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})} \\ &= \frac{z-e^{-2i\pi/3}}{(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})} + \frac{e^{-2i\pi/3}}{(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})} \\ &= \frac{e^{-2i\pi/3}}{z-e^{-2i\pi/3}} \times \frac{1}{z-e^{2i\pi/3}} + \frac{1}{z-e^{2i\pi/3}}. \end{aligned}$$

Or au voisinage de $e^{-2i\pi/3}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-e^{2i\pi/3}} &= \frac{1}{(z-e^{-2i\pi/3})+(e^{-2i\pi/3}-e^{2i\pi/3})} \\
&= \frac{i\sqrt{3}/3}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}(z-e^{-2i\pi/3})} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{-2i\pi/3})^n,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{-2i\pi/3}}{z-e^{-2i\pi/3}}\left(\frac{i\sqrt{3}}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{-2i\pi/3})^n\right) \\
&\qquad +\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{-2i\pi/3})^n \\
&= \frac{i\sqrt{3}e^{-2i\pi/3}/3}{z-e^{-2i\pi/3}}+\left(1-e^{-2i\pi/3}\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}(z-e^{-2i\pi/3})^n \\
&= \sum_{n=-1}^{+\infty}c_n(z-e^{2i\pi/3})^n
\end{aligned}$$

où $c_{-1}=i\sqrt{3}e^{-2i\pi/3}/3$ et $c_n=\left(1-e^{-2i\pi/3}\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)(-1)^n\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n+1}$ si $n\geq 0$.

3. **Logarithme complexe**
   (a) La fonction f'/f est holomorphe sur U, notons F une de ses primitives. La fonction $f/(\exp F)$ est holomorphe, de dérivée (complexe) nulle, donc constante car U est connexe:

   $$\exists\lambda\in\mathbb{C}^*/\ \forall z\in U,\ f(z)=\lambda\exp F(z).$$

   Puisque $\lambda\neq 0$, il existe $c\in\mathbb{C}$ tel que $\lambda=e^c$, et donc $g=F+c$ convient.
   (b) Notons $g=\mathrm{Log}f$ et posons $h(z)=\exp(\alpha g(z))$: ainsi la fonction h ne s'annule pas sur U, donc $\mathrm{Log}h$ est bien définie et

   $$\exp\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{Log}h\right)=\exp g=f.$$

4. **Intégrales de Fresnel**
   (a) Pour montrer que I et J sont bien définies, on intègre par partie:

   $$\int_0^x\cos(t^2)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin(t^2))\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2t}\sin(t^2)\right]_0^x+\int_0^x\frac{1}{2t^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t.$$

Le crochet tend vers 0 en $+\infty$, et la fonction $\dfrac{1}{2t^2}\sin(t^2)$ est intégrable sur $[0;+\infty[$, donc $\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t$ a une limite finie quand $x \to +\infty$. De même,

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{-1}{2t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos(t^2)-1)\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-1}{2t}(\cos(t^2)-1)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2t^2}(\cos(t^2)-1)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ a une limite finie quand $x \to +\infty$.

(b) La fonction f est holomorphe dans un voisinage du secteur angulaire déterminé par γ_R, donc $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$, autrement dit:

$$0 = \int_{t=0}^R e^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_{\theta=0}^{\pi/4} e^{-(Re^{i\theta})^2} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta - \int_{t=0}^R e^{-(te^{i\pi/4})^2} e^{i\pi/4}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

La première intégrale tend vers $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}/2$ quand $R \to +\infty$. La troisième vaut

$$\int_0^R e^{-it^2} e^{i\pi/4}\mathrm{d}t = e^{i\pi/4}\left(\int_0^R \cos(t^2)\mathrm{d}t - i\int_0^R \sin(t^2)\mathrm{d}t\right)$$

qui tend vers $e^{i\pi/4}(I - iJ)$ quand $R \to +\infty$.
Notons $K(R)$ la deuxième intégrale: on va montrer que $K(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. Remarquons que $\left|e^{-(Re^{i\theta})^2}\right| = e^{-R^2\cos(2\theta)}$ et que sur $[0;\pi/4]$, $\cos(2\theta) \leq 1 - \frac{2}{\pi}\times 2\theta$.
Pour montrer cette inégalité, on peut étudier la fonction $\theta \mapsto cos(2\theta) - (1 - \frac{4\theta}{\pi})$. On peut aussi utiliser la concavité de la fonction cos *sur $[0;\pi/2]$: la partie du plan définie par $\{(x,y)/\ 0 \leq x \leq \pi/2,\ y \leq \cos x\}$ est convexe, donc contient le segment entre les points de coordonnées* (0,1) *et* (π/2,0) *(faire un dessin!).*
Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\theta=0}^{\pi/4} e^{-(Re^{i\theta})^2} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| &\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(1-4\theta/\pi)} R\mathrm{d}\theta \\ &\leq Re^{-R^2}\int_{\theta=0}^{\pi/4} e^{4R^2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= Re^{-R^2}\left[\frac{\pi}{4R^2}e^{4R^2\theta/\pi}\right|_0^{\pi/4} \leq \frac{\pi}{4R}.\end{aligned}$$

Avec $R \to +\infty$ dans (**??**), on obtient:

$$e^{i\pi/4}(I - iJ) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et puisque $I,J \in \mathbb{R}$:

$$I = J = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

5. **Résidus**

Posons

$$I(R) = \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x$$

(qui est bien définie puisque la fonction intégrée se prolonge par continuité en 0), et $f(z) = e^{iz}/z$.

Remarque: la fonction $\sin(z)/z$ *explose à l'infini.*

Soit γ le chemin orienté dans le sens trigo formé par le demi-cercle supérieur (de centre 0 et de rayon R), le segment de la droite réelle entre $-R$ et $-\varepsilon$, le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon ε et le segment de la droite réelle entre ε et R:

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} \mathrm{d}z &= \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} Rie^{it} \mathrm{d}t + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} \mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} \mathrm{d}t + \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t} \mathrm{d}t \\ &= i \int_0^\pi e^{iRe^{it}} \mathrm{d}t + 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t - i \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de continuité sous l'intégrale sur un segment (ou le théorème de convergence dominée), il vient:

$$i \int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}} \mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} i\pi.$$

De plus,

$$\left| \int_0^\pi e^{iRe^{it}} \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin t} \mathrm{d}t \leq \int_0^\pi e^{-R \times 2t/\pi} \mathrm{d}t$$

(concavité de la fonction sin sur $[0; \pi/2]$), et finalement l'intégrale sur le grand demi-cercle est majorée en valeur absolue par $\pi/(2R)$, donc tend vers 0 quand $R \to +\infty$. Ainsi $\displaystyle\int_0^R \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ a une limite finie quand $R \to +\infty$, et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

6. **Existence d'un point singulier sur le cercle de convergence**

   (a) Soit a un point régulier: il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n (z-a)^n$ dont la somme f coïncide avec S sur $D(a,r) \cap D(0,R)$. Puisque f est holomorphe sur $D(a,r)$, elle est développable en série entière au voisinage de tout point de $D(a,r)$. En particulier, pour tout $b \in D(a,r) \cap \partial D(0,R)$, f s'écrit au voisinage de b sous la forme $\sum b_n (z-b)^n$: on a donc trouvé une série entière au voisinage de b qui coïncide avec S. Ainsi b est un point régulier.

   (b) Pour tout z tel que $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Donc S coïncide au voisinage de tout point du cercle unité privé de 1 avec une fonction holomorphe dans un voisinage de ce point, ce qui montre que tout point du cercle unité privé de 1 est régulier. Il reste à montrer que 1 est un point singulier. Or

$$\forall z \in D(0,1),\ S(z) = \frac{1}{1-z}$$

dont le module est non borné quand $z \to 1$. Il n'existe donc pas de fonction f holomorphe dans un voisinage Ω de 1 qui coïncide avec S sur $\Omega \cup D(0,1)$ (sinon, on devrait avoir $|f(1)| = \infty$!).

(c) D'après la formule d'Hadamard, le rayon de convergence de $\sum z^{2^n}$ vaut 1. Soit $k,l \in \mathbb{N}$ fixés. Si l'on montre que

$$\left|S\left(te^{2ik\pi/2^l}\right)\right| \xrightarrow[t\in\mathbb{R},\ t\to 1^-]{} +\infty,$$

le même argument que précédemment montrera que les $e^{2ik\pi/2^l}$ sont des points singuliers. Soit donc $A > 0$. On a:

$$\begin{aligned}
S\left(te^{2ik\pi/2^l}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{2^l}2^n} \\
&= \sum_{n<l} t^{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{2^l}2^n} + \sum_{n\geq l} t^{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{2^l}2^n} \\
&= \sum_{n<l} t^{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{2^l}2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2^{l+n}} e^{2ik\pi\times 2^n} \\
&= \sum_{n<l} t^{2^n} e^{\frac{2ik\pi}{2^l}2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2^{l+n}}.
\end{aligned}$$

La première somme est finie (éventuellement vide si $l = 0$), donc a une limite finie L quand $t \to 1^-$. D'autre part, puisque la série $\sum 1^{2^{l+n}}$ est à termes positifs et divergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=1}^{N} 1^{2^{l+n}} \geq 2A + |L|$, et par continuité:

$$\exists \delta > 0 / \left(|1-t| \leq \delta \Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} t^{2^{l+n}} \geq A + |L|\right).$$

Ainsi, pour $|1-t| \leq \delta$, $\sum_{n=1}^{+\infty} t^{2^{l+n}} \geq A + |L|$, et donc

$$\left|S\left(te^{2ik\pi/2^l}\right)\right| \geq A.$$

On peut montrer que les points considérés sont denses sur le cercle, ce qui implique d'après la question 1 que tous les points du cercle de convergence sont singuliers. Pour cela, puisque la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\partial D(0,1)$, il suffit en fait de montrer que $H := \left\{\frac{2k\pi}{2^l} / \ k,l \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Or H est un sous-groupe (additif) de $\mathbb{R}$, il est donc soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Puisque H est "stable par moitié" ($x \in H \Longrightarrow \frac{x}{2} \in H$), il est nécessairement dense dans $\mathbb{R}$.

(d) Pour chaque point a du cercle, il existe un disque $D(a,r(a))$ et une série entière S_a convergente sur ce disque et coïncidant avec S. La compacité du cercle permet de le recouvrir par un nombre fini de tels disques $D_1, \ldots, D_k$ (notons $S_1, \ldots S_k$ les séries entières correspondantes).

Si D_i et D_j s'intersectent, S_i et S_j coïncident avec S sur l'ouvert connexe $D_i \cap D_j \cap D(0,R)$. D'après le théorème des zéros isolés, S_i et S_j coïncident nécessairement sur $D_i \cap D_j$. Ainsi f est bien définie sur $\Omega := D(0,R) \cup \bigcup_j D_j$, et analytique puisque l'analyticité est une propriété locale. L'ouvert Ω contient $\overline{D(0,R)}$, et il existe donc $R' > R$ tel que

$$\overline{D(0,R)} \subset D(0,R') \subset \Omega.$$

Sur le disque $D(0,R')$, f est analytique donc développable en série entière, et coïncide sur $D(0,R)$ avec S. Par unicité du développement en série entière, les coefficients de f sont exactement ceux de S. Par conséquent, le rayon de convergence R de S est au moins égal à R': contradiction.
Finalement, S possède au moins un point singulier sur son cercle de convergence.

7. **(Analyse 2002)**

(a) * La première inégalité découle de l'inégalité triangulaire: si $|z-1|$,

$$\left| -\sum_{k\geq 1} \frac{(1-z)^k}{k} \right| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{|1-z|^k}{k} = -\ln(1-|1-z|) = \ln \frac{1}{1-|1-z|}.$$

La seconde inégalité s'obtient en étudiant la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) - 2x$ sur $[0;1/2]$.
* Pour $|z-1| < 1$, on peut dériver terme à terme (toutes les séries dérivées convergeant normalement donc uniformément) la série définissant Log:

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}z = -\sum_{k\geq 1}(-k)\frac{(1-z)^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-z)^k = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

Considérons alors la fonction $e^{\mathrm{Log}z}/z$: elle est holomorphe, de dérivée nulle sur l'ouvert connexe $D(1,1)$, donc elle est constante égale à sa valeur en 1.

(b) * La fonction intégrée étant continue sur $\mathbb{R}$, le seul problème éventuel est en l'infini. Or par hypothèses, pour tous $x,t \in \mathbb{R}$,

$$\left|g(t)e^{itx}\right| \leq |\phi(t)|,$$

donc la fonction $t \mapsto g(t)e^{itx}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.
Utilisons le théorème de dérivation sous l'intégrale: on montre ainsi par récurrence que h est $\mathcal{C}^\infty$ sur tout compact de $\mathbb{R}$, et donc sur $\mathbb{R}$.
* Pour $x,y \in \mathbb{R}$ fixés, notons $f(z) = g(z)e^{ixz}$. La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc son intégrale le long du bord du rectangle de sommets $-R$, R, $R+iy$, $-R+iy$ est nulle pour tout $R > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-R}^{R} g(t)e^{itx}\mathrm{d}t + \int_0^y g(R+it)e^{i(R+it)x}i\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_R^{-R} g(t+iy)e^{i(t+iy)x}\mathrm{d}t + \int_y^0 g(-R+it)e^{i(-R+it)x}i\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Lorsque $R \to +\infty$, la première intégrale tend vers $h(x)$ et la troisième vers $e^{-xy}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t+iy)e^{itx}\mathrm{d}t$. De plus:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^y g(R+it)e^{i(R+it)x}i\mathrm{d}t \quad + \quad \int_y^0 g(-R+it)e^{i(-R+it)x}i\mathrm{d}t\right| \\ \leq \quad (|\phi(R)|+|\phi(-R)|)\left|\int_0^y e^{t(1-x)}\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

d'où l'égalité cherchée. Supposons $|x|>1$: pour tout $y\in\mathbb{R}$,

$$|h(x)| \leq e^{-xy}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t+iy)e^{itx}\right|\mathrm{d}t \leq e^{y(1-x)}\int_{\mathbb{R}}|\phi(t)|\,\mathrm{d}t,$$

qui tend vers 0 quand $y\to+\infty$ si $1-x<0$, ou quand $y\to-\infty$ si $1-x>0$.

8. **(Analyse 1995)**
   (a) (Vu la question suivante, on n'est pas censé connaître grand-chose d'autre sur les homographies que la définition... en particulier, pas que les cercles-droites sont transformés en cercles-droites).
   On constate que $\mathrm{Re}(\psi(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$: ainsi, l'image par ψ de $C_1\setminus\{1\}$ est incluse dans $i\mathbb{R}$. De plus,
   $$\phi(e^{i\theta}) = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\,\mathrm{cotan}(\theta/2),$$
   donc ψ envoie bijectivement $C_1\setminus\{1\}$ sur $i\mathbb{R}$. Puisque ψ est une bijection continue de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ sur $\mathbb{C}$, elle envoie bijectivement chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus C_1$ sur une composante connexe de $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}$. Or $\psi(0)=1$, donc D_1 est envoyé sur le demi-plan $\{z/\ \mathrm{Re}z>0\}$.
   (b) La multiplication par γ correspond géométriquement à une rotation, bijective de D_1 sur D_1. On se ramène donc à étudier $\Phi_{a,1}$. Le pôle de cette homographie est $1/a\notin D_1$. Il reste à montrer que $\Phi_{a,1}(D_1)=D_1$:
   $$\begin{aligned}|\Phi_{a,1}(z)|<1 \quad &\iff \quad |z-a|^2<|1-\bar{a}z|^2\\ &\iff \quad z\bar{z}+a\bar{a}-z\bar{a}-\bar{z}a<1+a\bar{a}z\bar{z}-z\bar{a}-\bar{z}a\\ &\iff \quad |z|^2(1-|a|^2)<1-|a|2\\ &\iff \quad |z|<1\end{aligned}$$
   puisque $a\in D_1$. Ainsi $\Phi_{a,1}$ induit une bijection de D_1 sur D_1.
   (c) Soit $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$: par hypothèses, h reste bornée sur D_1, donc $-d/c\notin D_1$ ($|d|>|c|$). En particulier $d\neq 0$, et $h(z)=\frac{\gamma z+\delta}{1-\bar{a}z}$ où $\bar{a}=-c/d\in D_1$. Donc
   $$h\circ\Phi_{-a,1}(z) = \frac{\gamma a+\delta+(\gamma+\delta\bar{a})z}{1-|a|^2} = s(z)$$
   où s est une similitude directe, qui transforme D_1 en un disque D'. Puisque $D'=D_1$, nécessairement s fixe 0 (*i.e.* $\gamma a+\delta=0$) donc $s(z)=\gamma z$, et $|\gamma|=1$. Ainsi, sur D_1,
   $$h=\gamma\Phi_{a,1}=\Phi_{a,\gamma}.$$

L'unicité est immédiate puisque $h(a) = 0$ et $h(0) = -a\gamma$.

(d) On calcule:

$$h'(z) = \gamma \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \Longrightarrow |h'(z)| = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}$$

et

$$\begin{aligned} 1-|h(z)|^2 &= \frac{1-\bar{a}z - a\bar{z} + |az|^2 - |z|^2 - |a|^2 + z\bar{a} + \bar{z}a}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1-|z|^2)(|1-\bar{a}z|^2(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$|h'(z)| = \frac{1-|h(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

(e) On a

$$k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^n = z\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)' = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{((1+z)^2-(1-z)^2)/4}{(1-z)^2},$$

d'où

$$k(z) = \frac{1}{4}(\psi(z)^2 - 1).$$

Puisque ψ est univalente sur D_1, à valeurs dans le demi-plan $P = \{z/ \operatorname{Re} z > 0\}$, et que $z \mapsto z^2$ est univalente sur P, à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, k est une bijection de D_1 sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty; -1/4]$.