Préparation à l'agrégation — Université de Provence
Analyse complexe — 2006-2007

Théorème de représentation conforme de Riemann

Référence: Rudin p.330.
Leçons: espaces de fonctions, compacité, holomorphie, holomorphie et méromorphie, extrema.

Il s'agit de montrer le résultat suivant:

> Tout domaine Ω simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphe au disque unité ouvert Δ.

Remarque: $\mathbb{C}$ *n'est pas biholomorphe à* Δ*, puisque d'après le théorème de Liouville toute fonction entière bornée est constante.*

1. <u>Ω est biholomorphe à un domaine borné inclus dans Δ.</u>
   Puisque $\Omega \neq \mathbb{C}$, il existe $w_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$: la fonction holomorphe $z \mapsto z - w_0$ ne s'annulant pas dans le domaine simplement connexe Ω, elle admet une racine carrée notée g.
   * g est injective:
   $$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow g(z_1)^2 = g(z_2)^2 \Rightarrow z_1 - w_0 = z_2 - w_0 \Rightarrow z_1 = z_2.$$
   * si $z \in g(\Omega)$, alors $-z \notin g(\Omega)$. En effet, sinon, il existerait z_1,$z_2 \in \Omega$ tels que $z = g(z_1)$ et $-z = g(z_2)$, donc $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$ et $z_1 = z_2$: alors $z = -z = 0$, ce qui est impossible car g ne s'annule pas sur Ω.
   * g est non constante, donc d'après le théorème de l'application ouverte, $g(\Omega)$ est ouvert et contient un disque $D(b,r)$, avec $0 < r < |b|$.
   Ainsi $D(-b,r)$ ne rencontre pas $g(\Omega)$:
   $$\forall z \in \Omega,\ |g(z) + b| \geq r.$$
   Par conséquent la fonction $h = r/(g + b)$ est bien définie, injective, et bornée par 1 sur Ω: elle définit donc un biholomorphisme de Ω sur $h(\Omega) \subset \Delta$.
   On suppose donc $\Omega \subset \Delta$.

<u>Idée</u> *Soit $a \in \Omega$ fixé, et $\phi : \Omega \to \Delta$ un biholomorphisme vérifiant $\phi(a) = 0$. Pour toute fonction $f : \Omega \to \Delta$ holomorphe vérifiant $f(a) = 0$, la fonction $f \circ \phi^{-1}$ est holomorphe de Δ dans lui-même, et le lemme de Schwarz montre que $|(f \circ \phi^{-1})'(0)| \leq 1$, c'est-à-dire*
$$|f'(a)| \leq |\phi'(a)|.$$
Le biholomorphisme cherché doit donc maximiser les valeurs des dérivées en a des éléments de
$$\mathcal{F}_a := \{f \in \mathrm{Hol}(\Omega,\Delta)/\ f \text{ injective et } f(a) = 0\}.$$
Remarquons que $\mathcal{F}_a$ est non vide puisque la fonction $z \mapsto (z - a)/2$ est dans $\mathcal{F}_a$.

2. <u>Il existe un élément Φ de $\mathcal{F}_a$ qui réalise $\mathrm{Sup}\{|f'(a)|/\ f \in \mathcal{F}_a\}$.</u>
Commençons par vérifier que ce Sup existe: si $D(a,r) \subset \Omega$, les inégalités de Cauchy et le fait que les éléments de $\mathcal{F}_a$ soient bornés par 1 montrent que
$$\forall f \in \mathcal{F}_a,\ |f'(a)| \leq 1/r.$$
Notons-le M. On a $M \neq 0$ (toujours avec la fonction $z \mapsto (z-a)/2$).
Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}_a$ telle que $|f_n'(a)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$. Puisque les éléments de $\mathcal{F}_a$ sont bornés par 1, $\mathcal{F}_a$ est relativement compact dans $\mathrm{Hol}(\Omega,\Delta)$ (théorème de Montel). Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer qu'il y a convergence uniforme sur les compacts de Ω vers une fonction Φ holomorphe dans Ω, à valeurs dans $\overline{\Delta}$.
On a immédiatement que $\Phi(a) = 0$. De plus, la suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers Φ' (théorème de Weierstrass), *a fortiori* converge simplement, et donc $|\Phi'(a)| = M$. Puisque $M \neq 0$, la fonction Φ est non constante: d'après le théorème de l'application ouverte, Φ est en fait à valeurs dans Δ.
Enfin, Φ est non constante, limite de de fonctions injectives, donc injective (théorème d'Hurwitz). Ainsi $\Phi \in \mathcal{F}_a$ et réalise le Sup.

3. <u>Φ est un biholomorphisme de Ω sur Δ.</u>
Il reste à montrer que $\Phi : \Omega \to \Delta$ est surjective. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha \in \Delta \setminus \Phi(\Omega)$, et notons
$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}.$$
Rappelons que la fonction $\phi_\alpha : \Delta \to \Delta$ est bijective, et que $\phi_\alpha^{-1} = \phi_{-\alpha}$.
La fonction $\phi_\alpha \circ \Phi$ est holomorphe, sans zéros sur l'ouvert simplement connexe Ω, donc admet une racine carrée notée f. Puisque $\phi_\alpha \circ \Phi$ est injective, f est injective et donc
$$\Psi := \phi_{f(a)} \circ f \in \mathcal{F}_a.$$
On a donc $\Phi = \phi_\alpha^{-1} \circ (f^2)$. Autrement dit, en notant $s : z \mapsto z^2$ et $g = \phi_\alpha^{-1} \circ s \circ \phi_{f(a)}^{-1}$:
$$\Phi = g \circ \Psi.$$
Alors $\Phi'(a) = g'(0)\Psi'(a)$; en particulier, $\Psi'(a) \neq 0$. Or $g(\Delta) \subset \Delta$ et g n'est pas injective dans Δ, donc d'après le lemme de Schwarz, $|g'(0)| < 1$. On en déduit
$$|\Phi'(a)| < |\Psi'(a)|,$$
ce qui est absurde par construction de Φ.

Remarque: *on obtient en fait que pour tout $a \in \Omega$, il existe un unique biholomorphisme $\Phi : \Omega \to \Delta$ tel que $\Phi(a) = 0$ et $\Phi'(a) > 0$. L'existence vient du fait qu'on peut multiplier le biholomorphisme Φ trouvé précédemment par un complexe de module 1 de façon à obtenir $\Phi'(a) > 0$. Pour l'unicité, supposons que Φ_1 et Φ_2 conviennent: alors $F := \Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ est un biholomorphisme de Δ dans luis-même fixant 0, et*
$$F'(0) = \Phi_1'(a)/\Phi_2'(a) = 1$$
(voir l'"Idée" ci-dessus). D'après le lemme de Schwarz, f est de la forme $F = \lambda\,\mathrm{Id}$, où $|\lambda| = 1$, donc $\Phi_1 = \lambda\Phi_2$, et nécessairement $\lambda = 1$.