Préparation à l'agrégation — Université de Provence
Analyse complexe — 2006-2007

Prolongement analytique de $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

Référence: ZQ p.58.
Leçons: interversion d'une limite et d'une intégrale, intégrales à un paramètre, suites et séries de fonctions, convergence des séries entières, fonctions d'une variable complexe, fonctions holomorphes et méromorphes, interversion de limites.

Soit $\alpha > 0$.

1. Vérifier que la série entière $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$ a pour rayon de convergence 1. On note f sa somme.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1 - ze^{-t}} \mathrm{d}t.$$
3. Vérifier que la fonction
$$I_\alpha : z \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1 - ze^{-t}} \mathrm{d}t$$
est bien définie sur $\Omega := \mathbb{C} \setminus [1; +\infty[$. En déduire que f admet un prolongement analytique à Ω.
4. Montrer que 1 est l'unique point singulier de $\sum \frac{z^n}{n^\alpha}$.

1. On peut appliquer le critère de d'Alembert, qui donne immédiatement un rayon de convergence égal à 1.
2. Rappelons que
$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-u} \mathrm{d}u = n^\alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt} \mathrm{d}t$$
(changement de variable $u = nt$, $t = u/n$). Pour $|z| < 1$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt} \mathrm{d}t \right) = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t,$$
où $f_n(t) = z^{n-1}t^{\alpha-1}e^{-nt}$. Pour $|z| < 1$ fixé, appliquons le théorème de convergence dominée à la série $\sum f_n$:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^\alpha} = \frac{z}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1 - ze^{-t}} \mathrm{d}t.$$

3. Pour tout $z \in \Omega$, la fonction intégrée est bien définie et continue sur $]0;+\infty[$. De plus, pour t assez grand,

$$\left|\frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-ze^{-t}}\right| \leq \frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-|z|e^{-t}} \underset{+\infty}{\sim} t^{\alpha-1}e^{-t},$$

qui est intégrable en $+\infty$. En 0,

$$\left|\frac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-ze^{-t}}\right| \underset{0}{\sim} \frac{t^{\alpha-1}}{|1-z|},$$

qui est intégrable. Ainsi, $I_\alpha(z)$ est bien définie.
Le théorème de Leibniz (holomorphie sous l'intégrale) montre que I_α est holomorphe sur Ω. Par conséquent, la fonction $F : z \mapsto \frac{z}{\Gamma(\alpha)} I_\alpha(z)$ est holomorphe sur Ω, et coïncide avec f sur $\{z/\ |z| < 1\}$.

4. Puisque f admet un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus [1;+\infty[$, tous les points du cercle de convergence, autres que 1, sont réguliers. Or la somme d'une série entière admet au moins un point singulier sur son cercle de convergence, d'où la conclusion.

Remarque: *si $\alpha = 0$, $f(z) = \frac{1}{1-z}$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}^*$, et 1 est donc encore l'unique point singulier.*