Préparation à l'agrégation — Université de Provence
Analyse complexe — 2006-2007

Equations de Bessel

Références: RDO T.4 p.212, Chatterji T.3 p.107.
Leçons: équations différentielles linéaires, exemples d'équations différentielles, exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries..

Il s'agit des équations du type

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}_*^+).$$

On se limite *a priori* à $t \in]0; +\infty[$ et on cherche les solutions sous la forme

$$\begin{array}{rccl} \phi : &]0; R[& \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^r \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \end{array} \tag{1}$$

où $r \in \mathbb{R}$, $R > 0$ et $a_0 \neq 0$ (ce que l'on peut toujours supposer, quitte à changer r).

1. Montrer que ϕ donnée par (1) est solution si et seulement si

$$\begin{cases} R > 0 \\ r = \lambda \\ a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ a_n = -a_{n-2}/(n^2 + 2n\lambda) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} R > 0 \\ r = -\lambda \\ (1 - 2\lambda)a_1 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ (n^2 - 2n\lambda)a_n + a_{n-2} = 0 \end{cases}$$

   où R désigne le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$.
2. Montrer que la fonction ϕ_λ définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\phi_\lambda(t) = t^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} n!(\lambda + 1)\dots(\lambda + n)}$$

   est solution.
3. Si $\lambda \notin \mathbb{N}$, montrer que $\phi_{-\lambda}$ est aussi solution. En déduire un système fondamental de solutions.
4. Si $\lambda \in \mathbb{N}$, montrer qu'il n'existe qu'une seule solution de la forme (1) (à constante multiplicative près).

1. Les dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme:

$$\phi'(t) = t^{r-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (r + n)a_n t^n$$

$$\phi''(t) = t^{r-2} \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n)(r-1+n) a_n t^n.$$

Ainsi ϕ est solution si et seulement si $R > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (r+n)(r-1+n) a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (r+n) a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^2 a_n t^n = 0.$$

D'après le théorème des zéros isolés, ces conditions sont équivalentes à ce que $R > 0$ et pour tout n, le coefficient de t^n dans l'égalité ci-desuus soit nul, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} R > 0 \\ \forall n \geq 2,\ ((r+n)^2 - \lambda^2) a_n + a_{n-2} = 0 \\ ((r+1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0 \\ (r^2 - \lambda^2) a_0 = 0, \end{cases}$$

d'où les deux cas donnés dans l'énoncé.

2. Prenons le premier cas: la relation de récurrence entre a_n et a_{n-2}, et le fait que $a_1 = 0$, montrent que pour tout n, $a_{2n+1} = 0$ et

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (\lambda+1) \dots (\lambda+n)}.$$

Il reste à vérifier qu'alors le rayon de convergence de $\sum a_n t^n$ est strictement positif. Or d'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n} t^n$ est infini, donc le rayon de convergence de $\sum a_n t^n = \sum a_{2n} t^{2n}$ est aussi infini (il vaut "$\sqrt{\infty}$"). Ainsi ϕ_λ est solution.

3. Prenons le deuxième cas et supposons $\lambda \notin \mathbb{N}$: le même calcul et le choix $a_1 = 0$ conduisent à $\phi_{-\lambda}$.
De plus, au voisinage de 0:

$$\phi_\lambda(t) \underset{0}{\sim} t^\lambda \quad \text{et} \quad \phi_{-\lambda}(t) \underset{0}{\sim} t^{-\lambda},$$

ce qui montre que les solutions ϕ_λ et $\phi_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes. Elles forment donc un système fondamental de solutions.

4. Supposons $\lambda \in \mathbb{N}$. On sait déjà que ϕ_λ est solution. Il reste à montrer que le deuxième cas est impossible. En effet, on aurait alors nécessairement $a_1 = 0$, et la relation de récurrence $n(n-2)a_n + a_{n-2}$ montre que si $n = 2p+1$ est impair, alors $a_{2p+1} = 0$. La même relation de récurrence montre que $a_{2\lambda-2} = 0$, et donc

$$0 = a_{2\lambda-2} = a_{2\lambda-4} = \dots = a_2 = a_0.$$

Finalement la seule solution obtenue à partir du deuxième cas est la solution nulle.