Analyse complexe

Bibliographie : Rudin, *Analyse réelle et complexe* - Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques* - Amar, Matheron, *Analyse complexe* - Pabion, *Eléments d'analyse complexe.*

1 Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables, fonctions analytiques

1.1 Fonctions $\mathbb{C}$-dérivables

DÉFINITION

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et U un ouvert au voisinage de z_0. On dit qu'une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est **$\mathbb{R}$-différentiable** (resp. **$\mathbb{C}$-dérivable**) au point z_0 si :

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + l(w) + |w|\varepsilon(w),$$

où $\varepsilon(w) \xrightarrow[w\to 0]{} 0$ et l est $\mathbb{R}$-linéaire (resp. $\mathbb{C}$-linéaire). L'application l est la **différentielle** de f en z_0, notée df_{z_0} (resp. la **dérivée complexe** de f en z_0, notée $f'(z_0)$).

REMARQUE 1 *La $\mathbb{C}$-dérivabilité implique la $\mathbb{R}$-différentiabilité, qui implique la continuité. Les deux réciproques sont fausses (pour la première, voir $z \mapsto \bar{z}$).*

Si f est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 :

$$\begin{aligned} df_{z_0}(w) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \times \operatorname{Re} w + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \times \operatorname{Im} w \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]}_{=:\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)} \times w + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]}_{=:\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)} \times \bar{w}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement s'il n'y a pas de terme anti-linéaire dans df_{z_0}, c'est-à-dire si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Dans ce cas :

$$df_{z_0}(w) = f'(z_0) \times w.$$

En posant $z_0 = x_0 + iy_0$ et $u = \operatorname{Re}_, f$, $v = \operatorname{Im} f$, on obtient les **conditions de Cauchy-Riemann** :

f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si u et v sont $\mathbb{R}$-différentiables en (x_0, y_0) et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}.$$

DÉFINITION

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite **holomorphe** lorsqu'elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U.

1.2 Séries entières

DÉFINITION

Une **série entière** autour d'un point $a \in \mathbb{C}$ est une série de fonctions de la forme $\sum a_n(z-a)^n$. Son **rayon de convergence** est

$$R := \mathrm{Sup}\{r \geq 0 / \sum |a_n| r^n \text{ converge}\}$$

et son **disque de convergence** est $D(a, R)$.

PROPOSITION 1

- *La série $\sum a_n(z-a)^n$ converge normalement sur tout $\overline{D(a, R')}$ dès que $R' < R$.*
- *La suite $(a_n|z-a|^n)_n$ n'est pas bornée si $|z-a| > R$.*
- **Formule de Hadamard** *: $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$.*
- **Formule de d'Alembert** *: $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ si les $a_n \neq 0$ pour $n \geq n_0$ et que cette limite existe.*
- *Les séries-dérivées et séries-primitives ont même rayon de convergence (conséquence de la formule de Hadamard).*

On suppose $R > 0$ et on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$: f est $\mathbb{C}$-dérivable dans $D(a, R)$ et $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(z-a)^{n-1}$. Par itération, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et toutes ses différentielles sont holomorphes :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}.$$

En particulier, $f^{(k)}(a) = k!\, a_k$, d'où l'unicité du développement en série entière (si $R > 0$).

1.3 Fonctions analytiques

DÉFINITION

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est **analytique** si elle est localement développable en série entière, *i.e.* : pour tout $a \in U$, il existe un voisinage U_a de a dans U tel que $f_{|U_a}$ soit la somme d'une série entière autour de a.

En particulier, analytique implique holomorphe. De plus, toute somme de série entière sur un disque $D(a, R)$ est analytique sur ce disque (faire un changement d'origine).

Les zéros d'une fonction analytique non nulle sur un ouvert *connexe* sont isolés (**principe des zéros isolés**).

Preuve
Soit a un zéro de f. Si f n'est pas identiquement nulle au voisinage de a, alors

$$f(z) = (z-a)^k \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-a)^{n-k}$$

avec $k \geq 1$ et $a_k \neq 0$: donc f ne s'annule pas dans un voisinage pointé de a. Si f est identiquement nulle dans un voisinage de a, notons E l'ensemble des points au voisinage desquels f est identiquement nulle. C'est un ouvert. De plus, si $a \in \overline{E}$, on a pour tout j, $f^{(j)}(a) = 0$ puisque toutes les dérivées de f sont continues. La série de Taylor de f en a est donc identiquement nulle. Puisque f est analytique, cela implique $a \in E$. Ainsi E est ouvert et fermé dans un ouvert connexe, ce qui permet de conclure. □

REMARQUE 2 *La connexité permet d'obtenir une propriété* globale.

2 Théorème de Cauchy (sur un convexe)

2.1 Intégrale curviligne

DÉFINITION

Un **chemin** est une application γ continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'un intervalle fermé $[a;b] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que γ est un **chemin fermé** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Si $f : \gamma([a;b]) \to \mathbb{C}$ est continue, on note :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

l'**intégrale de f le long de γ** (elle est indépendante du paramétrage choisi).

Attention néanmoins à l'*orientation* : si le chemin est parcouru en sens inverse, c'est-à-dire si l'on considère $\gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$, alors

$$\int_{\gamma_-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

DÉFINITION

Soit γ un chemin fermé, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$ et $z \in \Omega$. L'**indice de z par rapport à γ** est

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z}.$$

L'indice de z par rapport à γ correspond en fait au "nombre de tours" faits autour du point z lorsque l'on parcourt γ.

PROPOSITION 2 *La fonction* Ind_γ *prend des valeurs entières. Elle est constante sur chaque composante connexe de* Ω*, et vaut 0 sur la composante infinie de* Ω*.*

Remarquons que puisque $\mathrm{Im}\gamma$ est compact, il est inclus dans un disque D, et puisque $\mathbb{C} \setminus D$ est connexe, $\mathbb{C} \setminus D$ est inclus dans une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\gamma$: on peut donc bien parler de *la* composante infinie de Ω.

2.2 Théorème de Cauchy

(sur un convexe, mais il existe des versions plus générales sur un ouvert étoilé, un ouvert simplement connexe...)

THÉORÈME 1 *Soit* Ω *un ouvert convexe de* $\mathbb{C}$*,* $p \in \Omega$ *et* f *continue sur* Ω*, holomorphe sur* $\Omega \setminus \{p\}$*. Alors il existe* $F \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ *telle que* $f = F'$*. Par conséquent, pour tout chemin fermé* γ *dans* Ω *:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

REMARQUE 3 *Même si par la suite on montrera que, sous ces hypothèses,* f *est nécessairement holomorphe sur* Ω *entier, on a pour l'instant besoin de pouvoir supposer uniquement la continuité en* p *de façon à montrer la formule de Cauchy (en appliquant le théorème de Cauchy à une fonction de la forme* $\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$*).*

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, γ un chemin fermé dans Ω et $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$:

$$\forall z \in \Omega \setminus \mathrm{Im}\gamma,\ f(z) \times \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

(**formule de Cauchy** pour un convexe).

A l'aide du développement en série entière de $1/(w-z)$, on obtient le corollaire suivant :

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert.

- $f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \iff f$ est développable en série entière sur tout disque inclus dans $\Omega \iff f$ est analytique sur Ω (sens de démonstration : $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$).
- Si f est holomorphe, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ses dérivées sont holomorphes.
- Sur $D(a,R) \subset \Omega$, les coefficients du développement en série entière de f sont donnés par
$$\forall 0 < r < R,\ a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

On en déduit, pour tout $0 < r < R$:

$$\begin{cases} |a_n| \leq \frac{1}{r^n} \operatorname*{Max}_{\theta} \left| f(a + re^{i\theta}) \right| ; \\ r^n a_n \text{ est le } n\text{ième coefficient de Fourier de } \theta \mapsto f(a + re^{i\theta}); \\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(a + re^{i\theta}) \right|^2 \mathrm{d}\theta. \end{cases}$$

En particulier, les fonctions holomorphes (sur un ouvert connexe) vérifient le principe des zéros isolés : si Ω est connexe, $\mathrm{Hol}(\Omega)$ est un anneau intègre.

2.3 Applications

Si $f = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ est holomorphe dans $D(a, R)$:

$$\forall 0 \leq r < R,\ f(a) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$$

(**propriété de la moyenne**).

Soit Ω un ouvert connexe, $\overline{D(a, R)} \subset \Omega$ et $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Alors

$$|f(a)| \leq \operatorname*{Max}_{\theta} \left| f(a + re^{i\theta}) \right|,$$

avec égalité si et seulement si f est constante sur Ω (**principe du maximum**).

Théorème de Liouville : si f est **entière** (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$) et bornée, elle est constante.

Théorème de Weierstrass : soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On suppose que $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes sur Ω, qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers f. Alors $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(j)})_n$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f^{(j)}$.

REMARQUE 4 *C'est évidemment faux si les fonctions ne sont pas holomorphes ! C'est également faux si les fonctions sont des séries entières d'une variable* réelle *et non pas complexe : en effet, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, toute fonction continue d'une variable réelle sur un compact est limite uniforme de polynômes.*

A partir du principe du maximum, on obtient le **théorème de Schwarz** :

Soit f holomorphe sur le disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$, telle que

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall z \in \Delta,\ |f(z)| \leq 1 \end{cases}.$$

Alors pour tout $z \in \Delta$, $|f(z)| \leq |z|$, et $|f'(0)| \leq 1$. De plus, s'il existe $z_0 \in \Delta \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que

$$\forall z \in \Delta,\ f(z) = \lambda z.$$

Autrement dit, f est une rotation.

Holomorphie et intégration

PROPOSITION 3 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : [a;b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ continue avec $f(t,\cdot)$ holomorphe. Alors*

$$F : z \mapsto \int_a^b f(t,z)\,\mathrm{d}t$$

est holomorphe sur Ω, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^{(k)}(z) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(t,z)\,\mathrm{d}t$.

Théorème de Leibniz : soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que

- pour tout $z \in \Omega$, $f(\cdot, z)$ est mesurable ;
- pour tout $t \in I$, $f(t,\cdot)$ est holomorphe ;
- tout $z_0 \in \Omega$ admet un voisinage V tel qu'il existe $g \in L^1(I)$ vérifiant

$$\forall t \in I,\ \forall z \in V,\ |f(t,z)| \leq g(t).$$

Alors $f(\cdot, z) \in L^1(I)$ pour tout $z \in \Omega$ et

$$z \mapsto \int_I f(t,z)\,\mathrm{d}z$$

est holomorphe sur Ω. Ses dérivées s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale.

On montre ainsi que $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\{z/\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ (utiliser la majoration $\left|e^{-t}t^{z-1}\right| \leq e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ si $a \leq \mathrm{Re}\, z \leq b$).

REMARQUE 5 *On ne fait aucune hypothèse (autre que l'existence) sur f'. La majoration nécessaire dans le théorème habituel de dérivation sous l'intégrale découle ici automati-*

quement de la majoration de f par les formules de Cauchy : en effet, si ϕ est holomorphe,

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z,\varepsilon)} \frac{\phi(w)}{(w-z)^2}\, \mathrm{d}w.$$

3 Singularités

3.1 Classification

Théorème de Cassati-Weierstrass : soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\alpha \in \Omega$ et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Il n'y a que trois cas possibles :

- la singularité de f en α est **fausse**, c'est-à-dire que f peut être prolongée en une fonction holomorphe sur Ω (cela équivaut à $(z-\alpha)f(z) \xrightarrow[z\to\alpha]{} 0$) ;
- il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $a_{-1}, \ldots, a_{-m} \in \mathbb{C}$, $a_{-m} \neq 0$, tels que la singularité de

$$z \mapsto f(z) - \frac{a_{-1}}{(z-\alpha)} - \ldots - \frac{a_{-m}}{(z-\alpha)^m}$$

  soit fausse (on dit que α est un **pôle d'ordre m**) ;
- la singularité de f en α est **essentielle**, c'est-à-dire que pour tout ρ tel que $\overline{D(\alpha,\rho)} \subset \Omega$, $f(D(\alpha,\rho) \setminus \{\alpha\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

REMARQUE 6 *La fonction f possède un pôle en α si et seulement si $|f(z)| \xrightarrow[z\to\alpha]{} +\infty$.*

Par exemple, la fonction $z \mapsto \exp(1/z)$ vérifie le troisième cas.

3.2 Fonctions méromorphes

DÉFINITION

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction h est **méromorphe** sur Ω s'il existe un ensemble S de points isolés dans Ω tel que $h \in \mathrm{Hol}(\Omega \setminus S)$ et tel que les éléments de S soient des pôles de h au sens suivant : tout $\alpha \in S$ possède un voisinage D ouvert et connexe dans Ω tel que

$$\exists f, g \in \mathrm{Hol}(D) / \ \forall z \in D \setminus \{\alpha\},\ h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

REMARQUE 7 *On peut montrer (Rudin p.353) que toute fonction méromorphe sur Ω est en fait* globalement *le quotient de deux fonctions holomorphes sur Ω.*

REMARQUE 8 *Les fonctions méromorphes sur Ω connexe forment un corps.*

Reprenons les notations de la définition. Au voisinage de $\alpha \in S$:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-\alpha)^{k-k'} h_1(z),$$

où h_1 est analytique au voisinage de α et $h_1(\alpha) \neq 0$. Il y a deux possibilités : si $k \geq k'$, alors h se prolonge holomorphiquement en α (singularité éliminable). Si $k < k'$, alors

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{(z-\alpha)^j} + h_2(z)$$

où h_2 est analytique au voisinage de α. Dans ce cas, on dit que $a_{-1} =: \mathrm{Res}_\alpha(h)$ est le **résidu** de h en α.

Théorème des résidus (sur un convexe) : soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe, f méromorphe sur Ω et Y_f l'ensemble des pôles de f *dans* Ω. Pour tout chemin fermé γ dans Ω tel que $\mathrm{Im}\gamma \cap Y_f = \emptyset$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\alpha \in Y_f} \mathrm{Res}_\alpha(f) \times \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha).$$

REMARQUE 9 *La somme ci-dessus peut être infinie, mais* $\{\alpha \in Y_f / \ \mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) \neq 0\}$ *est toujours fini.*

Donnons deux applications de ce théorème.

<u>Dénombrement des zéros et des pôles</u>

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$. Soit f méromorphe sur Ω, n'ayant ni zéro ni pôle sur $\partial D(z_0,r)$. En notant Z (resp. P) le nombre de zéros (resp. de pôles) de f dans $D(z_0,r)$, on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = Z - P$$

(les zéros et les pôles sont comptés avec multiplicités).

Remarquons que le membre de gauche vaut $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{f(\partial D(z_0,r))} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \mathrm{Ind}_{f(\partial D(z_0,r))}(0)$ est le nombre de tours que fait le chemin $f(\partial D(z_0,r))$ autour de 0.

Preuve

Le théorème des résidus appliqué à la fonction f'/f montre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{z_i \in Y_{f'/f}} \mathrm{Res}_{z_i}\left(\frac{f'}{f}\right) \times 1.$$

Si z_i est un zéro de multiplicité m de f, alors $f(z) = (z - z_i)^m \times g(z)$ où g est méromorphe sans pôle en z_i et $g(z_i) \neq 0$, et

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

où g'/g est holomorphe au voisinage de z_i. Ainsi $\mathrm{Res}_{z_i}\left(\frac{f'}{f}\right) = m$.

Si z_i est un pôle de multiplicité m de f, alors $f(z) = \frac{1}{(z-z_i)^m} \times g(z)$ où g est méromorphe sans pôle en z_i et $g(z_i) \neq 0$, et

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

où g'/g est holomorphe au voisinage de z_i. Ainsi $\mathrm{Res}_{z_i}\left(\frac{f'}{f}\right) = -m$. □

Théorème de l'image ouverte

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ non constante. Alors f est **ouverte**, c'est-à-dire que l'image par f d'un ouvert est un ouvert.

Preuve
Soit $U \subset \Omega$ un ouvert non vide, et $w_0 \in f(U)$: il existe $z_0 \in U$ tel que $w_0 = f(z_0)$. On veut montrer qu'il existe un voisinage V de w_0 tel que tout $w \in V$ soit dans $f(U)$, c'est-à-dire que pour tout $w \in U$, la fonction

$$z \mapsto f(z) - w$$

admette un zéro dans U. Or

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\partial D(z_0,r))} \frac{\mathrm{d}z}{z - f(z_0)} = \mathrm{Ind}_{f(\partial D(z_0,r))}(f(z_0)).$$

Puisque le premier membre est supérieur ou égal à 1 (car $z \mapsto f(z) - w_0$ a un zéro dans U), et que la fonction $\mathrm{Ind}_{f(\partial D(z_0,r))}$ est localement constante, on en déduit

$$1 \leq \mathrm{Ind}_{f(\partial D(z_0,r))}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, \mathrm{d}z$$

pour w assez proche de w_0, d'où la conclusion. □

On peut alors montrer (Amar et Matheron, p.244) que si f est injective, elle est bijective sur son image *et sa réciproque est holomorphe.*

3.3 Séries de Laurent

Considérons la couronne

$$V := \{z \in \mathbb{C}/\ r_1 < |z-a| < r_2\},$$

où $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, et $f \in \mathrm{Hol}(V)$. Le théorème de Cauchy général montre que

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}z$$

est indépendant du choix de $r \in]r_1; r_2[$; on appelle cette quantité le ***k*ième coefficient de Laurent de *f* en *a*** ($k \in \mathbb{Z}$), noté c_k. Alors

$$c_k = \frac{1}{2\pi r^k}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta,$$

autrement dit $r^k c_k$ est le $k$ième coefficient de Fourier de $\theta \mapsto f(a+re^{i\theta})$.

La **série de Laurent** de f en a est $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-a)^k$. On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n}_{\textit{holomorphe sur } \{|z-a|<r_2\}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\left(\frac{1}{(z-a)}\right)^n}_{\textit{holomorphe sur } \{|z-a|>r_1\}},$$

en séparant les puissances négatives et les puissances positives.

REMARQUE 10 *Si $r_1 = 0$, la fonction f a un pôle en 0 si et seulement si le nombre de c_k non nuls pour $k \geq -1$ est fini non nul.*

Cela revient en fait à écrire

$$f(z)\times 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r_2')} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r_1')} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}z$$

pour $r_1 < r_1' < |z-a| < r_2' < r_2$; le développement en série entière dans la première intégrale donne la partie holomorphe sur $\{|z-a| < r_2'\}$, le développement en série entière dans la première intégrale donne la partie holomorphe en $\{|z-a| > r_1'\}$. On vient de montrer :

PROPOSITION 4 *Soit f holomorphe sur $V = \{z \in \mathbb{C}/\ r_1 < |z-a| < r_2\}$. Il existe f_1, f_2 holomorphes respectivement sur $\{|z-a| > r_1\}$ et $\{|z-a| < r_2\}$ telles que $f = f_{1|V} + f_{2|V}$, et cette décomposition est unique si l'on exige de plus $f_1(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$.*

Remarquons que la décomposition exhibée ci-dessus vérifie la condition supplémentaire pour l'unicité.

Preuve

Il ne manque que l'unicité. Or si $g_1,\ g_2$ conviennent aussi, la fonction h donnée par

$$h(z) = \left| \begin{array}{l} f_1(z) - g_1(z) \text{ si } |z-a| > r_1 \\ f_2(z) - g_12(z) \text{ si } |z-a| < r_2 \end{array}\right.$$

est bien définie sur V et holomorphe sur $\mathbb{C}$. Puisque par hypothèse $h(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$, h est bornée donc constante (théorème de Liouville), nulle. $\square$

3.4 Un énoncé plus complet du théorème de Cauchy

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $K \subset \Omega$ un compact à bord régulier orienté. Toute fonction $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ vérifie $\displaystyle\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Par ailleurs, si f est méromorphe sur Ω, et si ∂K ne contient aucun de ses pôles, alors f n'a qu'un nombre fini de pôles dans K et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{z_i \in K \text{ pôle de } f} \mathrm{Res}_{z_i}(f).$$

Attention : il faut que K soit *inclus* dans Ω, et pas seulement ∂K !

4 Suites de fonctions holomorphes

On munit $\mathrm{Hol}(\Omega)$ de la **topologie de la convergence uniforme sur tout compact** : $\mathcal{O} \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$ est ouvert si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{O}$, il existe $\delta > 0$ et $K \subset \Omega$ compact tels que

$$\{g \in \mathrm{Hol}(\Omega) / \ \forall z \in K,\ |g(z) - f(z)| < \delta\} \subset \mathcal{O}.$$

Autrement dit, on a une base de voisinages indexée par (δ, K) : la famille des

$$\mathcal{O}_{\delta,K} := \{g / \ ||g_{|K} - f_{|K}||_\infty < \delta\}.$$

On a déjà vu (théorème de Weirstrass) que $\mathrm{Hol}(\Omega)$ est fermé pour cette topologie.

Théorème de Montel : soit $\mathcal{F} \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$. Alors $\mathcal{F}$ est (séquentiellement) compact si et seulement si $\mathcal{F}$ est uniformément bornée sur tout compact de Ω.

Rappelons que "**$\mathcal{F}$ séquentiellement compact**" signifie que toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ admet une sous-suite convergente, et que "**$\mathcal{F}$ uniformément bornée sur tout compact de Ω**" signifie que pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $||f_{|K}||_\infty \leq M$.

Théorème d'Hurwitz : soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes injectives qui converge dans $\mathrm{Hol}(\Omega)$ vers f. Alors ou bien f est injective, ou bien f est constante.