Sujet 1

Exercice 1 Désignons par μ une mesure Borélienne positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour un certain entier $k \geq 1$, $\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{-k} d\mu(x) < \infty$. Montrer que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$ l'intégrale $\langle \mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\mu(x)$ existe et que la forme linéaire ainsi définie sur $S(\mathbb{R})$ est une distribution tempérée.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé et soit G un sous espace vectoriel de E. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(a) $\overline{G} = E$, où $\overline{G}$ désigne l'adhérence de G.

(b) Pour qu'une forme linéaire sur E soit identiquement nulle il suffit qu'elle s'annule sur G.

Exercice 3 Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique. Désignons par $D' \subset E'$ un sous ensemble dense dans E' au sens de la norme de E'. Montrer qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E converge vers $x \in E$ au sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$ si et seulement si $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < +\infty$ et pour tout $g \in D'$ on a $\lim_{k\to\infty} \langle g, x_k \rangle = \langle g, x \rangle$.

$y_n \to y$ $\qquad$ $y_n \to y$

(ℓ_n) $\qquad$ $g \in D' \subset E'$ g est cont

Oral d'AFA (le 5 Mars 08)

Sujet 2

Soient $(V_1, \|\cdot\|_1)$ et $(V_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$. Supposons que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications linéaires continues de V_1 dans V_2 vérifiant les deux propriétés suivantes.

(a) Pour tout $x \in V_1$ on a $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\|_2 < +\infty$.

(b) Il existe E un sous ensemble de V_1 dense dans V_1 tel que pour tout $y \in E$, $(T_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Montrer qu'il existe une application linéaire continue $T : V_1 \to V_2$ vérifiant les deux propriétés suivantes.

(i) $T(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$ pour tout $x \in V_1$.

(ii) $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|$.

Oral d'AFA (le 5 Mars 08)

Sujet 3

Exercice 1 Désignons par $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue mesurable vérifiant pour un certain réel $p \in]1, +\infty[$ et un certain réel $q > 0$,

$$C = \int_{\mathbb{R}} \left| (1+|x|)^{-q} g(x) \right|^p dx < \infty,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$, l'intégrale $\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\, dx$ existe et que la forme linéaire u ainsi définie sur $S(\mathbb{R})$ est une distribution tempérée.

Exercice 2 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit $B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$. Montrer que V est un fermé pour la topologie faible $\sigma(V, V')$.

Oral 1 d'AFA
le 18/02/2009

<u>Exercice</u> Soit $f \in S(\mathbb{R}^d)$ une fonction vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) f est paire i.e. pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $f(\xi) = f(-\xi)$.

(ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $\int_{\mathbb{R}^d} \sin^2(2^{-1} t \cdot \xi) f(\xi) \, d\xi = 0$.

L'objectif de cet exercice est de montrer que f est identiquement nulle.

1) Montrer que la fonction φ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ par $\varphi(\xi) = |\xi|^2 f(\xi)$, où $|\cdot|$ désigne la norme Euclidienne, est une fonction paire et qu'elle appartient à $S(\mathbb{R}^d)$

2) En utilisant 1), montrer qu'il existe $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$ vérifiant pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

(a) $|\xi|^2 f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\cdot\xi} \psi(t) \, dt$.

(b) $|\xi|^2 f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos(t\cdot\xi) \psi(t) \, dt$

(c) $|\xi|^2 f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (\cos(t\cdot\xi) - 1) \psi(t) \, dt$

3) En utilisant 2)(c), (ii) et le Théorème de Fubini montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |f(\xi)|^2 \, d\xi = 0$.

Oral 2 d'AFA

Mars 2009

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ et G un sous espace vectoriel de E. Nous désignons par x_0 un élément arbitraire de E. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(i) $x_0 \in \overline{G}$ l'adhérence de G.

(ii) Pour toute forme linéaire continue f sur E vérifiant $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$, on a $f(x_0) = 0$.

Exercice 2 Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Pour tout $f \in E'$ on a $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, x_n \rangle| < \infty$

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ et L une application linéaire continue de E dans lui-même. Montrer que

$$\|L\| = \sup\{|\langle f, L(x) \rangle| : f \in E', \|f\| = 1 \text{ et } x \in E, \|x\| = 1\}$$