Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Processus Stochastiques, sujet d'oral de rattrapage numéro 1
le 28 février 2013

Tous les documents sont autorisés.

Exercice 1 Nous notons par $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, les deux suites de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, définies pour tout $x\in[0,1]$, par $\mathcal{C}_0(x)=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par $\mathcal{C}_n(x)=\sqrt{2}\cos(n\pi x)$ et $\mathcal{S}_n(x)=\sqrt{2}\sin(n\pi x)$.
1) Pour tout $t\in[0,1]$ fixé, désignons par f_t la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,t]$; montrer que

$$f_t = t\,\mathcal{C}_0 + \pi^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1}\mathcal{S}_n(t)\,\mathcal{C}_n\,,$$

où la série converge dans l'espace de Lebesgue $L^2[0,1]$.
2) On désigne par $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, centrées et réduites, définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$; prouver que la série

$$t\,\epsilon_0 + \pi^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1}\mathcal{S}_n(t)\,\epsilon_n\,,$$

converge dans $L^2(\Omega)$. La variable aléatoire $W(t)$ d'esigne la limite de cette série.
3) Montrer que le processus stochastique $\{W(t)\}_{t\in[0,1]}$ est un mouvement brownien standard.

Exercice 2 Soit $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien standard et soit $p\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $i\in\{0,\dots,n\}$ on pose $t_i=i/n$. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, la variable aléatoire

$$\left(n^{(p/2)-1}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^p$$

converge en probabilité vers un réel déterministe v_p, puis prouver que la variable aléatoire

$$\left(n^{(p-1)/2)}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right|^p - n^{1-p/2}v_p\right),$$

converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne.