Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen de Processus Stochastiques
Le 11 janvier 2013 (durée 3 heures)

Tous les documents sont autorisés. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Problème 1 Soit $(\mathcal{E}_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (c'est-à-dire que sa densité de probabilité vaut $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{0\leq x\}}$ pour presque tout réel x), définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout entier $n \geq 1$, nous notons par T_n la v.a.r. définie par $T_n = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, $N(t)$ désigne la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, définie par

$$N(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}},$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}$ est la variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$, telle que : pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}(\omega) = 1$ lorsque $T_n(\omega) \leq t$ et $\mathbf{1}_{\{T_n\leq t\}}(\omega) = 0$ sinon.
1) Montrer que $N(0) = 0$ presque sûrement.
2) Montrer qu'il existe un événement de probabilité 1, que l'on note par Ω^*, tel que l'on a pour tout $\omega \in \Omega^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N(t, \omega) < +\infty$ (indication : on commencera d'abord par prouver que presque sûrement, $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}T_n = \lambda^{-1}$).
3) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, f_m la densité de probabilité du vecteur aléatoire $(T_1, \ldots, T_m)$ existe et qu'elle est donnée, pour presque tout $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, par,

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = \lambda^m e^{-\lambda x_m}\mathbf{1}_{\{0\leq x_1\leq \ldots \leq x_m\}}.$$

4) a) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, déterminer la densité de probabilité du vecteur aléatoire (T_m, T_{m+1}).
b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt ; rappelons que l'on dit qu'une variable aléatoire X définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque : $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X = m) = e^{-\alpha}\,\frac{\alpha^m}{m!}\,.$$

5) Supposons que $(\lambda_l)_{l\geq 1}$ est une suite croissante de réels strictement positifs.
a) Construiser une suite $(X_l)_{l\geq 1}$ de variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, vérifiant pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, les deux propriétés suivantes : (i) X_l suit une loi de Poisson de paramètre λ_l ; (ii) pour tout $\omega \in \Omega$, $X_l(\omega) \leq X_{l+1}(\omega)$.
b) Montrer que $\lim_{l\to+\infty} \lambda_l = +\infty$ si et seulement si $\lim_{l\to+\infty} X_l = +\infty$ presque sûrement.

Problème 2 Dans tout ce problème, $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées et réduites, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; de plus $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de réels appartenant à l'intervalle $]1, 2]$, qui converge vers 1. Pour tout $(l, N) \in \mathbb{N}^2$, nous notons par $\{X_{l,N}(t)\}_{t\in[0,1]}$ le processus stochastique défini pour tout $t \in [0,1]$, par,

$$X_{l,N}(t) = (\lambda_l - 1)^{1/2} \sum_{n=-N}^{N} \epsilon_n \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n t).$$

1) Montrer que $\{X_{l,N}(t)\}_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré (centré signifie que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathbb{E}(X_{l,N}(t)) = 0$).
2) Prouver que pour tous $l \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$ fixés, lorsque N tend vers $+\infty$, la suite de variables aléatoires $(X_{l,N}(t))_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une variable aléatoire que l'on note par $X_l(t)$.
3) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$ fixé, $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré et que l'on a pour tout $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$,

$$\mathrm{cov}\big(X_l(t_1), X_l(t_2)\big) = (\lambda_l - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_l^{-n} \sin(\lambda_l^n t_1) \sin(\lambda_l^n t_2).$$

4) a) Prouver que pour tous $l \in \mathbb{N}$ et $(t_1, t_2) \in [0,1]^2$, on a

$$\mathbb{E}\big[\big(X_l(t_1) - X_l(t_2)\big)^2\big] \leq 10|t_1 - t_2|.$$

(Indication : on peut supposer que $0 < |t_1 - t_2|$, on vous suggère alors de découper la série qui donne $\mathbb{E}\big[\big(X_l(t_1) - X_l(t_2)\big)^2\big]$, en deux parties : $\sum_{n=-\infty}^{n_0} \cdots$ et $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \cdots$, où n_0 est l'unique entier naturel tel que $\lambda_l^{-n_0-1} < |t_1 - t_2| \leq \lambda_l^{-n_0}$).
b) En déduire que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, le processus $\{X_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ admet une modification (i.e. une version) $\{\widetilde{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ dont les trajectoires sont, avec probabilité 1, des fonctions höldériennes d'ordre γ, où $\gamma \in]0, 1/2[$ est arbitraire.
5) a) Soit G une variable aléatoire réelle gaussienne centrée et réduite, montrer que

$$\mathbb{E}\big(\exp(G^2/4)\big) < +\infty.$$

b) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\exp(\epsilon_n^2/4) > 2 + n\big) < +\infty.$$

c) En utilisant 5)b), montrer qu'il existe un événement de probabilité 1, noté par Ω^*, tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\epsilon_n(\omega)|}{\sqrt{\log(2 + |n|)}} < +\infty, \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega^*,$$

où log désigne le logarithme népérien.
6) Pour tout $(l, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, désignons par $\{Y_{l,N}(t)\}_{t\in[0,1]}$ et $\{Z_{l,N}(t)\}_{t\in[0,1]}$ les processus stochastiques définis pour tout $(t, \omega) \in [0,1] \times \Omega$, par

$$Y_{l,N}(t,\omega) = (\lambda_l - 1)^{1/2} \sum_{n=-N}^{-1} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n t), \quad \text{lorsque } \omega \in \Omega^*,$$

$$Z_{l,N}(t,\omega) = (\lambda_l - 1)^{1/2} \sum_{n=0}^{N} \epsilon_n(\omega) \lambda_l^{-n/2} \sin(\lambda_l^n t), \quad \text{lorsque } \omega \in \Omega^*,$$

et $Y_{l,N}(t,\omega) = Z_{l,N}(t,\omega) = 0$, lorsque $\omega \notin \Omega^*$. Fixons $\omega \in \Omega$ et désignons par $Y_{l,N}(\cdot,\omega)$ et $Z_{l,N}(\cdot,\omega)$ les fonctions continues sur $[0,1]$, $t \mapsto Y_{l,N}(t,\omega)$ et $t \mapsto Z_{l,N}(t,\omega)$.
a) Montrer que lorsque N tend vers $+\infty$, la fonction $Z_{l,N}(\cdot,\omega)$ converge uniformément vers une fonction continue sur $[0,1]$, que l'on note par $Z_l(\cdot,\omega)$.
b) Montrer que lorsque N tend vers $+\infty$, la fonction $Y_{l,N}(\cdot,\omega)$ converge uniformément vers une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$, que l'on note par $Y_l(\cdot,\omega)$.
c) Désignons par $\{\check{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ le processus stochastique défini pour tout $(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$, par $\check{X}_l(t,\omega) = Y_l(t,\omega) + Z_l(t,\omega)$. Prouver que les processus $\{\widetilde{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ et $\{\check{X}_l(t)\}_{t\in[0,1]}$ sont indistinguables.
7) On suppose que $t \in [0,1]$ est arbitraire et fixé. On note par h_t la fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ définie par $h_t(0) = t$ et $h_t(\xi) = \xi^{-1}\sin(\xi t)$ pour tout $\xi > 0$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on note par $K_{t,l}^-$, la fonction définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+$, par

$$K_{t,l}^-(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} h_t(\lambda_l^n)\mathbf{1}_{[\lambda_l^n,\lambda_l^{n+1}[}(\xi)\,.$$

a) Montrer que h_t et $K_{t,l}^-$ appartiennent à l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}_+)$.
b) Prouver que $\lim_{l\to+\infty} \left\|h_t\mathbf{1}_{]0,1[} - K_{t,l}^-\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0$.
8) Pour tous $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on note par $K_{t,l}^+$, la fonction définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}_+$, par

$$K_{t,l}^+(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_t(\lambda_l^n)\mathbf{1}_{[\lambda_l^n,\lambda_l^{n+1}[}(\xi)\,.$$

a) Montrer que $K_{t,l}^+$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+)$.
b) Prouver que pour tout $(t_1,t_2) \in [0,1]^2$, on a

$$\int_1^{+\infty} h_{t_1}(\xi)h_{t_2}(\xi)\,d\xi = \lim_{l\to+\infty} \int_1^{+\infty} K_{t_1,l}^+(\xi)K_{t_2,l}^+(\xi)\,d\xi\,.$$

9) a) Etablir l'existence d'un processus gaussien centré, noté par $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, telle que l'on a

$$\mathrm{cov}\big(X(t_1),X(t_2)\big) = \int_0^{+\infty} h_{t_1}(\xi)h_{t_2}(\xi)\,d\xi\,, \quad \text{pour tout } (t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^2.$$

b) Montrer que ce processus est en fait un mouvement brownien (<u>indication :</u> on pourra calculer pour tout $(t,\xi) \in [0,1] \times \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-t}^{t} e^{-i\xi x}\,dx$).
c) Montrer que lorsque l tend vers $+\infty$, le processus $\{X_l(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ converge vers le processus $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, au sens des lois fini-dimensionnelles.