Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen de rattrapage d'Analyse Fonctionnelle Appliquée
11 Avril 2007 (durée 3 heures)

Seules les notes manuscrites sont autorisées. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 1) Pour tout $y \in I\!R$ et tout $\varphi \in S(I\!R)$, on désigne par $\tau_y\varphi$ l'application de $I\!R$ dans $\mathbb{C}$, $x \mapsto \tau_y\varphi(x) = \varphi(x+y)$.
a) Montrer que $\tau_y\varphi \in S(I\!R)$.
b) Montrer que l'application $\tau_y : S(I\!R) \to S(I\!R)$, $\varphi \mapsto \tau_y\varphi$ est continue (au sens de la topologie habituelle de $S(I\!R)$).
2) Pour tout $z \in I\!R$ et tout $u \in S'(I\!R)$ on désigne par $\tau_z u$ la forme linéaire définie sur $S'(I\!R)$ par $\langle \tau_z u, \varphi\rangle = \langle u, \tau_{-z}\varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in S(I\!R)$. Montrer que $\tau_z u$ est une distribution tempérée.
3) Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in I\!N$ et tout $\varphi \in S(I\!R)$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in I\!R$ et tout $y \in I\!R$ vérifiant $|y| \leq 1/2$, on a

$$|x|^\alpha \left|\tau_y(\varphi^{(\beta)})(x) - \varphi^{(\beta)}(x) - y\varphi^{(\beta+1)}(x)\right| \leq c|y|^2,$$

où $\varphi^{(\beta)}$ désigne la dérivée de φ d'ordre β.
4) Soient u une distribution tempérée et $(h_n)_{n\in I\!N}$ une suite de réels non nuls qui converge vers 0. Pour tout $n \in I\!N$, on désigne par v_n la distribution tempérée définie par $v_n = h_n^{-1}(\tau_{h_n}u - u)$. En utilisant la question 3), montrer que la suite $(v_n)_{n\in I\!N}$ converge vers u' la dérivée de u.

Exercice 2 Pour tout $p \in [1,\infty[$, L^p désigne l'espace de Banach des fonctions f à valeurs complexes définies sur l'intervalle $[0,1]$ et telles que $|f|^p$ est Lebesgue intégrable sur $[0,1]$. Cet espace est muni de sa norme habituelle notée par $\|\cdot\|_{L^p}$.
1) Montrer que $L^2 \subset L^1$.
2) Pour tout entier $n \geq 1$, désignons par F_n le sous-ensemble de L^1 défini par

$$F_n = \left\{f \in L^1;\ \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \leq n\right\},$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
a) Montrer que F_n est un fermé au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ (<u>indication</u> : soit $(g_l)_{l\geq 1}$ une suite de F_n qui converge vers g au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$. Pour montrer que $g \in F_n$, on pourra appliquer le Lemme de Fatou à une certaine suite extraite de $(g_l)_{l\geq 1}$).
b) Montrer que F_n est d'intérieur vide au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ (<u>indication</u> : On commencera par montrer que pour tout $f \in F_n$, la suite $(h_l)_{l\geq 1}$ définie par $h_l = f - l^{2/3}\, 1\!\!1_{[0,l^{-1}]}$, où $1\!\!1_{[0,l^{-1}]}$ est la fonction indicatrice de $[0,l^{-1}]$ vérifie $\lim_{l\to\infty}\|f-h_l\|_{L^1} = 0$ et $\lim_{l\to\infty}\|h_l\|_{L^2} = +\infty$.)
3) En utilisant ce qui précède, montrer que L^2 est un sous-ensemble de L^1 d'intérieur vide, au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.
4) Plus généralement, soient u et v deux réels vérifiant $1 \leq u < v$. Montrer que L^v est un sous-ensemble de L^u d'intérieur vide au sens de la topologie induite par $\|\cdot\|_{L^u}$.

Exercice 3 Désignons par $l^\infty = l^\infty(\mathbb{N}^*)$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geq 1}$ à valeurs réelles telles que $\|x\|_{l^\infty} = \sup_{n\geq 1} |x_n| < \infty$ et par G le sous-espace de l^∞ définie par

$$G = \Big\{x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^\infty;\ \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\Big\}.$$

1) Soit f la forme linéaire définie sur G par $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Montrer qu'il existe $\widetilde{f}$ une forme linéaire définie sur l^∞ vérifiant :

(i) Pour tout $x \in l^\infty$, $\widetilde{f}(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

(ii) Pour tout $x \in G$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

2) Montrer que pour tout $x \in l^\infty$ on a $\widetilde{f}(x) \geq \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Exercice 4 Désignons par $E = C^1[-1,1]$ l'espace de Banach des fonctions à valeurs réelles, définies sur $[-1,1]$ et de classe C^1 sur cet intervalle. Rappelons que E est muni de la norme $\|\cdot\|_E$ définie pour tout $x \in E$ par

$$\|x\|_E = \sup_{t\in[-1,1]} |x(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |x'(t)|.$$

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, désignons par Φ_n l'application de E dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in E$ par

$$\Phi_n(x) = \frac{n}{2}\Big[x\Big(\frac{1}{n}\Big) - x\Big(-\frac{1}{n}\Big)\Big].$$

Montrer que Φ_n est une forme linéaire continue sur E.
b) Désignons par Φ l'application de E dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in E$ par

$$\Phi(x) = x'(0).$$

Montrer que que Φ est une forme linéaire continue sur E.
2) Montrer que la suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ converge vers Φ au sens de la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$.

Correction succincte de l'examen de rattrapage d'AFA du 11 Avril 2007

<u>Exercice 1</u> 1) a) L'application $\tau_y\varphi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^∞. On a de plus pour tous $q\in\mathbb{N}$ et $\beta\in\mathbb{N}$, en utilisant la formule de Leibniz,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^q\sup(\tau_y\varphi)^{(\beta)}(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^q\varphi^{(\beta)}(x+y)\right|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(x-y)^q\varphi^{(\beta)}(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=0}^{q}\binom{q}{n}x^n(-y)^{q-n}\varphi^{(\beta)}(x)\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{q}\binom{q}{n}|y|^{q-n}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n\varphi^{(\beta)}(x)\right|.$$

$$\leq C_q(y)\sum_{n=0}^{q}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^n\varphi^{(\beta)}(x)\right|, \quad (1)$$

où $C_q(y)>0$ est une constante qui ne dépend que de q et de y. Pour toute fonction $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R})$ et tout $p\in\mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{N}_p(\Phi) = \sum_{q=0}^{p}\sum_{\beta=0}^{p}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^q\Phi^{(\beta)}(x)\right| . \quad (2)$$

Il résulte de (1) que pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe une constante $\tilde{C}_p(y)>0$, qui ne dépend que de p et de y, telle que pour tout $\varphi\in S(\mathbb{R})$ on a

$$\mathcal{N}_p(\tau_y\varphi)\leq \tilde{c}_\gamma(y)\,\mathcal{N}_p(\varphi). \qquad (3)$$

Il résulte de (3) que $\mathcal{N}_p(\tau_y\varphi)<\infty$ lorsque $\mathcal{N}_p(\varphi)<\infty$, ce qui prouve que $\tau_y\varphi\in S(\mathbb{R})$.

b) Il est clair que τ_y est une application linéaire de $S(\mathbb{R})$ dans $S(\mathbb{R})$. De plus (3) signifie que τ_y est continue au sens de la topologie induite par les semi-normes $\mathcal{N}_p$.

2) Il est clair que $\tau_z U$ est une forme linéaire sur $S(\mathbb{R})$. On a de plus $\tau_z U = U\circ\tau_{-z}$, ce qui prouve $\tau_z U$ est continue sur $S(\mathbb{R})$.

3) Montrons que pour tout $\varphi\in S(\mathbb{R})$, il existe une constante $c>0$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $y\in\mathbb{R}$ vérifiant $|y|\leq 1/2$ on a

$$|x|^\alpha\left|\tau_y(\varphi^{(\beta)})(x)-\varphi^{(\beta)}(x)-y\varphi^{(\beta+1)}(x)\right|\leq c|y|^2. \quad (4)$$

Pour se fixer les idées nous supposerons que $0\leq y\leq 1/2$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\varphi^{(\beta)}$ sur l'intervalle $[x,x+y]$, on obtient

$$\left|\varphi^{(\beta)}(x+y)-\varphi^{(\beta)}(x)-y\varphi^{(\beta+1)}(x)\right|\leq\frac{1}{2}\left(\sup_{t\in]x,x+y[}\left|\varphi^{(\beta+2)}(t)\right|\right)|y|^2. \quad (5)$$

De plus, comme $\varphi\in S(\mathbb{R})$, il existe une constante $c_1>0$, telle que pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$|\varphi^{(\beta+2)}(t)|\leq c_1(2+|t|)^{-\alpha}. \quad (6)$$

Il résulte de (6) que pour tout $t \in]x, x+y[$ on a

$$|\varphi^{(\beta+2)}(t)| \leq C_1\left(2+|x|-|t-x|\right)^{-q} \leq C_1\left(2+|x|-y\right)^{-q} \leq C_1\left(1+|x|\right)^{-q}. \qquad (7)$$

(7) entraîne que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\ \sup_{0\leq y\leq 1/2} \left\{ |x|^q \sup_{t\in]x,x+y[} |\varphi^{(\beta+2)}(t)| \right\} < \infty . \qquad (8)$$

Finalement (4) résulte de (5) et de (8).

4) Montrons que pour tout $\varphi \in S(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to\infty} \langle V_n, \varphi\rangle = \langle U', \varphi\rangle$. On a en utilisant la définition de V_n,

$$\langle V_n, \varphi\rangle = h_n^{-1}\langle \tau_{h_n}U - U, \varphi\rangle = \langle U, h_n^{-1}(\tau_{-h_n}\varphi - \varphi)\rangle. \qquad (9)$$

Il suffit donc de montrer que $h_n^{-1}(\tau_{-h_n}\varphi-\varphi)$ converge dans $S(\mathbb{R})$ (au sens de la topologie induite par les semi-normes N_p) vers $-\varphi'$. Il n'est restrictif de supposer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|h_n|\leq 1/2$. Il résulte de la question 3), ~~que pour tout $p\in\mathbb{N}$~~ que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ |x|^q \left| h_n^{-1}\left(\tau_{-h_n}(\varphi^{(\beta)})(x) - \varphi^{(\beta)}(x)\right) + \varphi^{(\beta+1)}(x) \right| \right\}$$

$$\leq C|h_n|.$$

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe donc une constante $C'>0$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$N_p\left(h_n^{-1}(\tau_{-h_n}\varphi-\varphi)+\varphi'\right) \leq C|h_n|$, ce qui prouve la convergence de $h_n^{-1}(\tau_{-h_n}\varphi-\varphi)$ vers $-\varphi'$.

<u>Exercice 2</u> 1) On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout $f \in L^2$, $\int_0^1 |f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. Ce qui prouve $L^2 \subset L^1$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$, désignons par F_n le sous-ensemble de L^1 défini par

$$F_n = \left\{ f \in L^1 ;\ \int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq n \right\}. \quad (1)$$

a) Montrons que F_n est un fermé au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$. Pour cela, il suffit de prouver que si $(g_\ell)_{\ell\geq 1}$ est une suite d'éléments de F_n, qui converge vers g au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ i.e.

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_0^1 |g_\ell(x) - g(x)|\, dx = 0, \quad (2)$$

alors $g \in F_n$. Il résulte de (2) qu'il existe une sous-suite $m \mapsto \ell_m$ telle que pour presque tout $x \in [0,1]$ on a

$$\lim_{m\to\infty} g_{\ell_m}(x) = g(x). \quad (3)$$

En appliquant le Lemme de Fatou à la suite $(|g_{\ell_m}|^2)_{m\geq 1}$, en utilisant le fait que pour tout $m \geq 1$ on a $\int_0^1 |g_{\ell_m}(x)|^2 dx \leq n$ et en utilisant (3), on obtient

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx = \int_0^1 \lim_{m\to\infty} |g_{\ell_m}(x)|^2 dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_0^1 |g_{\ell_m}(x)|^2 dx$$
$$\leq n.$$

Ce qui prouve que $g \in F_n$.

b) Montrons que F_n est d'intérieur vide au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^1}$. Pour tout $f \in L^1$ et tout $\varepsilon > 0$ désignons par $B_o^{(1)}(f,\varepsilon)$ la boule ouverte de L^1 de centre f et de rayon ε i.e.

$$B_o^{(1)}(f,\varepsilon) = \{h \in L^1 ; \|h - f\|_{L^1} < \varepsilon\}. \quad (4)$$

Il suffit de montrer que pour tout $f \in F_n$ et tout $\varepsilon > 0$ on a $B_o^{(1)}(f,\varepsilon) \not\subset F_n$ i.e. il existe $h_\varepsilon \in L^1$ vérifiant :

$$\|h_\varepsilon - f\|_{L^1} < \varepsilon \text{ et } \|h_\varepsilon\|_{L^2} > \sqrt{n}. \quad (5)$$

Fixons $f \in F_n$ et désignons par $(h_\ell)_{\ell \geq 1}$ la suite de L^2 définie pour tout entier $\ell \geq 1$ par

$$h_\ell = f - \ell^{2/3} \mathbb{1}_{[0,\ell^{-1}]}, \quad (6)$$

où $\mathbb{1}_{[0,\ell^{-1}]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,\ell^{-1}]$.
On a $\|h_\ell - f\|_{L^1} = \ell^{2/3} \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,\ell^{-1}]}(x)\, dx = \ell^{-1/3}$, ce qui prouve que

$$\lim_{\ell\to\infty} \|h_\ell - f\|_{L^1} = 0. \quad (7)$$

Par ailleurs, il résulte de (6) et de l'inégalité triangulaire que

$$\|h_\ell\|_{L^2} \geq \|\ell^{2/3}\mathbb{1}_{[0,\ell^{-1}]}\|_{L^2} - \|g\|_{L^2}$$
$$= \ell^{2/3}\left(\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,\ell^{-1}]}(x)\,dx\right)^{1/2} - \|g\|_{L^2} = \ell^{1/6} - \|g\|_{L^2}.$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{\ell\to\infty} \|h_\ell\|_{L^2} = +\infty. \quad (8)$$

En remplaçant h_ε par h_ℓ on peut, grâce à (7) et (8), montrer que (5) est vérifiée pour tout ℓ assez grand.

3) On a $L^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. En utilisant la question 2), le fait que L^1 est un espace métrique complet et le Théorème de Baire, on peut montrer que L^2 est un sous-ensemble de L^1 d'intérieur vide, au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.

4) Plus généralement, soient u et v deux réels vérifiant $1 \leq u < v$, montrons que L^v est un sous-ensemble de L^u d'intérieur vide au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^u}$. Posons $r = v/u$. Il est clair que $r > 1$. Désignons par r' l'exposant conjugué de r i.e. $r' = (1-r^{-1})^{-1}$. On a d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $f \in L^v$,

$$\int_0^1 |f(x)|^u dx \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^{u2} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |\mathbb{1}_{[0,1]}(x)|^{2'}\right)^{1/2'}$$

$$= \left(\int_0^1 |f(x)|^v dx\right)^{1/2} < \infty ,$$

ce qui prouve que $L^v \subset L^u$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit

$$F_n^* = \left\{ f \in L^u ; \int_0^1 |f(x)|^v dx \leqslant n \right\}. \quad (9)$$

Montrons que F_n^* est un fermé de L^u. Pour cela, il suffit de prouver que si $(g_\ell^*)_{\ell \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de F_n^*, qui converge vers g^* au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^u}$ i.e.

$$\lim_{\ell \to \infty} \int_0^1 |g_\ell^*(x) - g^*(x)|^u dx = 0, \quad (10)$$

alors $g^* \in F_n^*$. Il résulte de (10) qu'il existe une sous-suite $m \mapsto \ell_m$ telle que pour presque tout $x \in [0,1]$ on a

$$\lim_{m \to \infty} g_{\ell_m}^*(x) = g(x). \quad (11)$$

En appliquant le Lemme de Fatou à la suite $(|g_{\ell_m}^*|^v)_{m \geqslant 1}$, en utilisant le fait que pour tout $m \geqslant 1$ on a $\int_0^1 |g_{\ell_m}^*(x)|^v dx \leqslant n$ et en utilisant (11), on obtient

$$\int_0^1 |g^*(x)|^v dx = \int_0^1 \lim_{m \to \infty} |g_{\ell_m}^*(x)|^v dx \leqslant \liminf_{m \to \infty} \int_0^1 |g_{\ell_m}^*(x)|^v dx$$

$$\leqslant n.$$

Ce qui prouve que $g^* \in F_n^*$. Montrons que F_n^* est d'intérieur vide au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^u}$. Pour tout $f^* \in L^u$ et tout $\varepsilon > 0$ désignons par $B_o^{(u)}(f^*, \varepsilon)$ la boule ouverte de L^u de centre f^* et de rayon ε i.e.

$$B_o^{(u)}(f^*, \varepsilon) = \{h^* \in L^u ; \|h^* - f^*\|_{L^u} < \varepsilon\}.$$

Il suffit de montrer que pour tout $f^* \in F_n^*$ et tout $\varepsilon > 0$ on a $B_o^{(u)}(f^*, \varepsilon) \not\subset F_n^*$ i.e. il existe $h_\varepsilon^* \in L^u$ vérifiant

$$\|h_\varepsilon^* - f^*\|_{L^u} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|h_\varepsilon^*\|_{L^v} > n^{1/v}. \quad (12)$$

Fixons $f^* \in F_n^*$ et désignons par $(h_\ell^*)_{\ell \geq 1}$ la suite de L^v définie pour tout entier $\ell \geq 1$ par

$$h_\ell^* = f^* - \ell^a \mathbb{1}_{[0, \ell^{-1}]}, \quad (13)$$

où $a \in]v^{-1}, u^{-1}[$ est fixé. On a $\|h_\ell^* - f^*\|_{L^u} = \ell^a \|\mathbb{1}_{[0,\ell^{-1}]}\|_{L^u} = \ell^{a-u^{-1}}$, ce qui prouve que

$$\lim_{\ell \to \infty} \|h_\ell^* - f^*\|_{L^u} = 0. \quad (14)$$

Par ailleurs, il résulte de (13) et de l'inégalité triangulaire que

$$\|h_\ell^*\|_{L^v} \geq \ell^a \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{[0,\ell^{-1}]}(x)\right)^{1/v} - \|f^*\|_{L^v}$$

$$= \ell^{a-v^{-1}} - \|f^*\|_{L^v}.$$

Ce qui prouve que $\lim_{\ell \to \infty} \|h_\ell^*\|_{L^v} = +\infty$ (15)

En remplaçant h^*_ε par h^*_ℓ on peut, grâce à (14) et (15), montrer que (12) est vérifiée pour tout ℓ assez grand.

Finalement comme $L^v = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^*_n$, il résulte du Théorème de Baire que L^v est un sous-ensemble de L^u d'intérieur vide, au sens de la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{L^u}$.

Exercice 3 1) Pour tout $x=(x_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$, posons $p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{m\in\mathbb{N}^*} \sup_{n\geq m} x_n$. Il est clair que p est positivement homogène i.e. pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \ell^\infty$ on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Montrons que p est sous-additive i.e. pour tout $x \in \ell^\infty$ et tout $y \in \ell^\infty$ on a

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y). \qquad (1)$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{n\geq m}(x_n+y_n) \leq \sup_{n\geq m} x_n + \sup_{n\geq m} y_n$.

Par conséquent $\inf_{m\in\mathbb{N}^*} \sup_{n\geq m}(x_n+y_n)$

$$= \lim_{m\to\infty} \sup(x_n+y_n) \leq \lim_{m\to\infty} \left\{\sup_{n\geq m} x_n + \sup_{n\geq m} y_n\right\}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} x_n + \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} y_n$$

$$= \inf_{m\in\mathbb{N}^*} \sup_{n\geq m} x_n + \inf_{m\in\mathbb{N}^*} \sup_{n\geq m} y_n .$$

Ce qui prouve que (1) est vérifiée.

La forme linéaire f définie sur G par $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, vérifie pour tout $x \in G$, $f(x) \leq p(x)$. Ainsi, d'après le Théorème d'extension dominée il existe $\tilde{f}$ une forme linéaire définie sur l^∞ qui prolonge f i.e. pour tout $x \in G$ on a $f(x) = \tilde{f}(x)$ (2)
et qui vérifie pour tout $x \in l^\infty$, $\tilde{f}(x) \leq p(x)$. (3).

2) Il résulte de (3) que pour tout $x \in l^\infty$, on a

$$-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq \limsup_{n\to\infty} (-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n .$$

Exercice 4 1) a) Il est clair que Φ_n est une forme linéaire sur E. Montrons que Φ_n est continue. Soit $x \in E$.
D'après le Théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ tel que $\frac{n}{2}\left[x\left(\frac{1}{n}\right) - x\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = x'(c_n)$. (1)

On a donc $|\Phi_n(x)| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |x'(t)| \leq \|x\|_E$.

b) Il est clair que Φ est une forme linéaire sur E. Montrons que Φ est continue. Soit $x \in E$, on a $|\Phi(x)| = |x'(0)|$ $\leq \sup_{t\in[-1,1]} |x'(t)| \leq \|x\|_E$.

2) Pour montrer que la suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ converge vers Φ au sens de la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$, il suffit de prouver que pour tout $x \in E$, on a $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x)$.

Cela résulte de (1).