Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Examen de rattrapage d'Analyse Fonctionnelle Appliquée
6 Avril 2006 (durée 3 heures)

Seules les notes manuscrites sont autorisées. La qualité de la rédaction intervient dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 Une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ est une suite $\sigma = (t_j)_{0\leq j\leq n}$ de réels de cet intervalle vérifiant $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ (l'entier n dépend de la subdivision considérée et peut prendre toute valeur). Soit une application $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, la variation de f par rapport à une subdivision $\sigma = (t_j)_{0\leq j\leq n}$ est définie par $V(f,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$ et la variation totale de f est définie par $V(f) = \sup\{V(f,\sigma);\ \sigma \in \mathcal{S}\}$ où $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble de toutes les subdivisions de $[0,1]$. Nous notons par $\mathcal{F}([0,1])$ l'espace de toutes les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ et nous notons par $BV_0([0,1])$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}([0,1])$ formé par les applications f vérifiant $f(0) = 0$ et $V(f) < +\infty$.
1) Montrer que $BV_0([0,1])$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1])$ et que $f \mapsto V(f)$ est une norme sur $BV_0([0,1])$.
2) Montrer que $BV_0([0,1])$ muni de la norme $f \mapsto V(f)$ est un espace de Banach.

Exercice 2 Nous notons par $c_0(\mathbb{N})$ l'espace de Banach des suites $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifiant $\lim_{j\to+\infty} x_j = 0$; cet espace est muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j|$. Nous notons par $l^1(\mathbb{N})$ l'espace de Banach des suites $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifiant $\sum_{j=0}^{+\infty}|x_j| < +\infty$; cet espace est muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{j=0}^{+\infty}|x_j|$. Enfin nous notons par $l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace de Banach des suites $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifiant $\sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j| < +\infty$. Cet espace est muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}}|x_j|$.
1) a) Fixons $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ et désignons par T_1 l'application de $c_0(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ par $T_1(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j x_j$. Montrer que T_1 est une forme linéaire continue sur $c_0(\mathbb{N})$ et que $\|T_1\| = \|y\|_1$.
b) Soit T_2 une forme linéaire continue arbitraire sur $c_0(\mathbb{N})$. Montrer qu'il existe une unique suite $z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ telle que pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ on a $T_2(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} z_j x_j$.
2) a) Fixons $s = (s_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$ et désignons par T_3 l'application de $l^1(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{C}$ définie pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ par $T_3(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} s_j x_j$. Montrer que T_3 est une forme linéaire continue sur $l^1(\mathbb{N})$ et que $\|T_3\| = \|s\|_\infty$.
b) Soit T_4 une forme linéaire continue arbitraire sur $l^1(\mathbb{N})$. Montrer qu'il existe une unique suite $t = (t_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$ telle que pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ on a $T_4(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} t_j x_j$.
3) a) Soit $\tilde{x} = (\tilde{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite de $l^\infty(\mathbb{N})$ vérifiant pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\tilde{x}_j = 1$. Montrer qu'il existe T_5 une forme linéaire continue sur $l^\infty(\mathbb{N})$ vérifiant $T_5(\tilde{x}) = 1$ et pour tout $x \in c_0(\mathbb{N})$, $T_5(x) = 0$.
b) En utilisant les questions précédentes montrer que l'espace de Banach $l^1(\mathbb{N})$ n'est pas réflexif.

Exercice 3 Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ convergeant simplement vers une fonction f i.e. pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) = \lim_{j\to+\infty} f_j(x)$.

Soit

$$C = \{x \in [0,1];\ f \text{ est continue au point } x\}.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que C est partout dense dans $[0, 1]$.

1) Pour tout réel $\delta > 0$ et pour tout $n \in I\!N$ posons

$$F_{n,\delta} = \{x \in [0,1];\ \forall p \geq n \text{ et } \forall q \geq n\ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \delta\}.$$

Montrer que $F_{n,\delta}$ est un fermé de $[0, 1]$ et que pour tout réel $\delta > 0$ fixé on a $[0,1] = \cup_{n\in I\!N} F_{n,\delta}$.

2) Pour tout réel $\delta > 0$ posons $U_\delta = \cup_{n\in I\!N} \mathring{F}_{n,\delta}$ ($\mathring{F}_{n,\delta}$ désigne l'intérieur de $F_{n,\delta}$). Montrer que U_δ est un ouvert partout dense dans $[0, 1]$.

3) Montrer que $\cap_{k\in I\!N^*} U_{1/k} \subset C$ et en déduire que C est partout dense dans $[0, 1]$.

Correction succinte de l'examen de rattrapage du cours AFA.
~~M2 Maths Appliquées~~
(2005-2006)

Exercice 1 1) Il est clair que la fonction identiquement nulle appartient à $BV_0([0,1])$. On a de plus pour tous $f,g \in BV_0([0,1])$, tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et toute subdivision $\sigma = (t_j)_{0\leq j\leq n}$ de $[0,1]$,

$$V(\lambda f+\mu g,\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda f(t_j)+\mu g(t_j)-\lambda f(t_{j-1})-\mu g(t_{j-1})\right|$$

$$\leq |\lambda|\sum_{j=1}^{n}|f(t_j)-f(t_{j-1})|+|\mu|\sum_{j=1}^{n}|g(t_j)-g(t_{j-1})|$$

$$\leq |\lambda| V(f,\sigma)+|\mu| V(g,\sigma).$$

D'où $V(\lambda f+\mu g)\leq |\lambda| V(f)+|\mu| V(g)<\infty$. (1)
Cela prouve que $\lambda f+\mu g \in BV_0([0,1])$. Montrons maintenant que $V(\cdot)$ est une norme sur $BV_0([0,1])$. Il résulte de (1) (prendre $\lambda=\mu=1$) que $V(\cdot)$ vérifie l'inégalité triangulaire. De plus, il est clair que l'on a pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f \in BV_0([0,1])$, $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$. Il suffit donc de montrer que pour tout $f \in BV_0([0,1])$.

$$V(f)=0 \Longleftrightarrow f\equiv 0 . \qquad (2)$$

Fixons $x\in]0,1[$ et soit $\tilde{\sigma}=(\tilde{t}_j)_{0\leq j\leq 2}$ la subdivision de $[0,1]$ définie par $\tilde{t}_0=0$, $\tilde{t}_1=x$ et $\tilde{t}_2=1$. Lorsque $V(f)=0$, on a $V(f,\tilde{\sigma})=|f(x)-f(0)|+|f(1)-f(x)|=0$.

Ce qui prouve que pour tout $x\in]0,1[$, on a $f(x)=f(1)=f(0)=0$.

2) Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $BV_0([0,1])$. Montrons qu'il existe $f\in BV_0([0,1])$ telle que

$$\lim_{p\to+\infty} V(f_p-f)=0. \qquad (3)$$

Comme $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $q\in\mathbb{N}$, on a

$$p\geqslant N \text{ et } q\geqslant N \Longrightarrow V(f_p-f_q)\leqslant\varepsilon \qquad (4)$$

Soit $\check{\sigma}=(\check{t}_j)_{0\leq j\leq 1}$ la subdivision de $[0,1]$ définie par $\check{t}_0=0$ et $\check{t}_1=1$.
Il résulte de (4) que pour tous $p\geqslant N$ et $q\geqslant N$ on a

$$|f_p(x)-f_q(x)|\leqslant V(f_p-f_q,\tilde{\sigma})\leqslant\varepsilon \qquad (5)$$

et $|f_p(1)-f_q(1)|\leqslant V(f_p-f_q,\check{\sigma})\leqslant\varepsilon$. $\qquad (6)$

Les inégalités (5) et (6) entraînent que pour tout $x\in]0,1]$, $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Il existe donc $f(x)$ tel que

$$\lim_{p\to+\infty}|f_p(x)-f(x)|=0. \qquad (7)$$

Nous supposerons que $f(0)=0$. Montrons maintenant que la fonction $f\in BV_0([0,1])$. Il résulte de (4) que pour tout $p\geqslant N$ et toute subdivision $\sigma=(t_j)_{0\leq j\leq n}$ de $[0,1]$, on a

$$\sum_{j=1}^{n}|f_p(t_j)-f_p(t_{j-1})|=V(f_p,\sigma)\leqslant V(f_p)\leqslant\varepsilon+V(f_N).$$

Ainsi, en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$V(f,\sigma)\leqslant\varepsilon+V(f_N).$$

Ce qui prouve que $\sup_{\sigma \in S'} V(f,\sigma) \leq \varepsilon + V(f_N) < +\infty$.

~~Montrons enfin que (3) est vérifiée. Il résulte de (4) que pour~~ toute subdivision $\sigma = (t_j)_{0 \leq j \leq m}$, pour tout $p \geq N$ et tout $q \geq N$, on a

$$\sum_{j=1}^{m} \left| f_p(t_j) - f_q(t_j) - \left(f_p(t_{j-1}) - f_q(t_{j-1})\right) \right|$$

$$= V(f_p - f_q, \sigma) \leq V(f_p - f_q) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient que pour tout $p \geq N$ $V(f_p - f, \sigma) \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que (3) est bien vérifiée.

<u>Exercice 2</u> 1) a) On a pour tout $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$,

$$|T_1(x)| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |y_j||x_j| \leq \left(\max_{k \in \mathbb{N}} |x_k|\right) \times \sum_{j=0}^{+\infty} |y_j|$$

$$= \|x\|_\infty \|y\|_1 < +\infty. \quad (1)$$

Il résulte de (1) que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j x_j$ est normalement convergente ce qui prouve que l'application T_1 est bien définie. Il est clair que T_1 est une forme linéaire sur $c_0(\mathbb{N})$, de plus (1) entraîne que T_1 est continue et que $\|T_1\| \leq \|y\|_1$. Ainsi pour prouver que $\|T_1\| = \|y\|_1$, il suffit de montrer que $\|T_1\| \geq \|y\|_1$. Pour tout $J \in \mathbb{N}$, soit $x^{(J)} = (x_j^{(J)})_{j \in \mathbb{N}}$ la suite de $c_0(\mathbb{N})$ définie par $x_j^{(J)} = e^{-i\theta_j}$ lorsque $0 \leq j \leq J$ et $x_j^{(J)} = 0$ lorsque $j \geq J+1$, où $\theta_j \in [0, 2\pi[$ est l'argument du nombre complexe y_j ; c.à.d que l'on a $y_j = |y_j| e^{i\theta_j}$.

Il résulte de ce qui précède que pour tout $J \in \mathbb{N}$ l'on a

$$T_1(x^{(J)}) = \sum_{j=0}^{J} y_j x_j^{(J)} = \sum_{j=0}^{J} |y_j| e^{i\theta_j} e^{-i\theta_j} = \sum_{j=0}^{J} |y_j| \qquad (2)$$

En utilisant (2) et le fait que T_1 est continue on obtient, pour tout $J \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{J} |y_j| = T_1(x^{(J)}) \leq \|T_1\| \, \|x^{(J)}\|_\infty = \|T_1\|,$$

ce qui prouve que $\|y\|_1 \leq \|T\|_1$.

1) b) Pour tout $J \in \mathbb{N}$ soit $f^{(J)} = (f_j^{(J)})_{j \in \mathbb{N}}$ la suite de $c_0(\mathbb{N})$ définie par $f_J^{(J)} = 1$ et $f_j^{(J)} = 0$ si $j \neq J$. Il est clair que pour tout $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$, on a $x = \sum_{j=0}^{+\infty} x_j f^{(j)}$ où la série converge au sens de la norme de $c_0(\mathbb{N})$.

En utilisant le fait que T_2 est une forme linéaire continue sur $c_0(\mathbb{N})$ on obtient

$$T_2(x) = T_2\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_j f^{(j)}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} z_j x_j, \qquad (3)$$

où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $z_j = T_2(f^{(j)})$. Montrons que la suite $z = (z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ appartient à $l^1(\mathbb{N})$. Pour tout $J \in \mathbb{N}$, soit $\tilde{z}^{(J)} = (\tilde{z}_j^{(J)})_{j \in \mathbb{N}}$ la suite de $c_0(\mathbb{N})$ définie par

$\tilde{z}_j^{(J)} = e^{-i\varphi_j}$ lorsque $0 \leq j \leq J$ et $\tilde{z}_j^{(J)} = 0$ lorsque $j \geq J+1$, où $\varphi_j \in [0, 2\pi[$ est l'argument du nombre complexe z_j; c.à.d que l'on a $z_j = |z_j| e^{i\varphi_j}$. En utilisant (3), la définition de $\tilde{z}^{(J)}$, la continuité de T_2 et le fait que $\|\tilde{z}^{(J)}\|_\infty = 1$, on obtient pour tout $J \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{J} |z_j| = \sum_{j=0}^{J} |z_j| e^{i\varphi_j} \times e^{-i\varphi_j} = \sum_{j=0}^{+\infty} z_j \tilde{z}_j^{(J)}$$

$= T_2(\tilde{z}^{(J)}) = |T_2(\tilde{z}^{(J)})| \leqslant \|T_2\| < +\infty$. Ce qui prouve que $z \in \ell^1(\mathbb{N})$.

2) a) On a pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$,

$$|T_3(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} |s_j||x_j| \leqslant \left(\max_{k\in\mathbb{N}} |s_j|\right) \times \sum_{j=0}^{+\infty} |x_j|$$

$$= \|s\|_\infty \|x\|_1 . \qquad (4)$$

Il résulte de (4) que la série $\sum_{j=0}^{+\infty} s_j x_j$ est normalement convergente ce qui prouve que l'application T_3 est bien définie. Il est clair que T_3 est une forme linéaire sur $\ell^1(\mathbb{N})$, de plus (4) entraîne que T_3 est continue et que $\|T_3\| \leqslant \|s\|_\infty$. Ainsi pour prouver que $\|T_3\| = \|s\|_\infty$, il suffit de montrer que $\|T_3\| \geqslant \|s\|_\infty$. Cette inégalité est bien vérifiée puisque l'on a pour tout $J \in \mathbb{N}$, $\|T_3\| \geqslant |T(\delta^{(J)})| = |s_J|$.

b) On a pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$, $x = \sum_{j=0}^{+\infty} x_j \delta^{(j)}$, où la série converge au sens de la norme de $\ell^1(\mathbb{N})$. Ainsi en utilisant le fait que T_4 est une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbb{N})$, on obtient

$$T_4(x) = T_4\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_j \delta^{(j)}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} t_j x_j \ , \qquad (5)$$

où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $t_j = T_4(\delta^{(j)})$. De plus la suite $t = (t_j)_{j\in\mathbb{N}}$

appartient à $\ell^\infty(\mathbb{N})$, car l'on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, $|t_j| = |T_4(\delta^{(j)})| \leqslant \|T_4\| < +\infty$.

3) a) Il est clair que la suite $\tilde{x}$ n'appartient pas à l'espace $c_0(\mathbb{N})$. Désignons par G le sous-espace de $\ell^\infty(\mathbb{N})$

$$G = \{x + \lambda\tilde{x},\ x \in c_0(\mathbb{N}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}\}. \quad (6)$$

Soit $\tilde{T}_5$ la forme linéaire définie sur G par

$$\tilde{T}_5(x + \lambda\tilde{x}) = \lambda \quad (7)$$

Il est clair que l'on a $\tilde{T}_5(x) = 0$ pour tout $x \in c_0(\mathbb{N})$ et que $\tilde{T}_5(\tilde{x}) = 1$. Montrons que $\tilde{T}_5$ est continue. On a pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \lim\limits_{j\to+\infty}(x_j + \lambda)$.
On a par conséquent,

$$|\tilde{T}_5(x + \lambda\tilde{x})| = |\lambda| \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j + \lambda| = \|x + \lambda\tilde{x}\|_\infty .$$

Enfin, il résulte du Théorème d'extension continue (Hahn-Banach) qu'il existe T_5 une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ qui prolonge $\tilde{T}_5$ (et vérifie $\|\tilde{T}_5\| = \|T_5\|$).

b) Soit $J : \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow (\ell^1(\mathbb{N}))''$, l'injection canonique. D'après le cours, on sait que J est définie pour tout $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ et tout $f \in (\ell^1(\mathbb{N}))'$ par

$$\langle J(x), f\rangle_{(\ell^1(\mathbb{N}))'', (\ell^1(\mathbb{N}))'} = \langle f, x\rangle_{(\ell^1(\mathbb{N}))', \ell^1(\mathbb{N})} . \quad (8)$$

D'après la question 2)b), on sait que pour tout $g \in (\ell^1(\mathbb{N}))'$, ~~il existe une unique suite~~ $t(g) = (t_j(g))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ telle que l'on a pour tout $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$,

$$\langle g, x \rangle_{(\ell^1(\mathbb{N}))', \ell^1(\mathbb{N})} = \sum_{j=0}^{+\infty} t_j(g)\, x_j \quad . \quad (9)$$

Soit $\check{L} \in (\ell^1(\mathbb{N}))''$ la forme linéaire continue sur $(\ell^1(\mathbb{N}))'$ définie pour tout $g \in (\ell^1(\mathbb{N}))'$ par

$$\langle \check{L}, g \rangle_{(\ell^1(\mathbb{N}))'', (\ell^1(\mathbb{N}))'} = T_S(t(g)) \quad (10)$$

Supposons que $\ell^1(\mathbb{N})$ est réflexif, c.à.d que l'injection canonique est bijective. Il existe alors $\check{x} = (\check{x}_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ telle que $J(\check{x}) = \check{L}$. Il résulte alors de (10), (8) et (9) que pour tout $g \in (\ell^1(\mathbb{N}))'$ on a

$$\begin{aligned} T_S(t(g)) &= \langle \check{L}, g \rangle_{(\ell^1(\mathbb{N}))'', (\ell^1(\mathbb{N}))'} \\ &= \langle J(\check{x}), g \rangle_{(\ell^1(\mathbb{N}))'', (\ell^1(\mathbb{N}))'} \\ &= \langle g, \check{x} \rangle_{(\ell^1(\mathbb{N}))', \ell^1(\mathbb{N})} = \sum_{j=0}^{+\infty} t_j(g) . \check{x}_j \quad . \quad (11) \end{aligned}$$

D'après la question 2) a) on sait que $(\ell^1(\mathbb{N}))' \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})$, $g \longmapsto t(g)$ est surjective. Il résulte de (11) que pour tout $u = (u_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on a

$$T_S(u) = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j\, \check{x}_j . \quad (12)$$

De plus comme T_S est nulle sur $c_0(\mathbb{N})$, on a pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\check{x}_j = T_S(\delta^{(j)}) = 0$. Cela signifie que T_S est la forme linéaire nulle sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et contredit le fait que $T_S(\check{\alpha}) = 1$.

<u>Exercice 3</u> 1) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, posons $G_{p,q,\varepsilon} = \{x \in [0,1] ; |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon\}$. $G_{p,q,\varepsilon}$ est l'image réciproque de l'intervalle fermé $]-\infty, \varepsilon]$ par l'application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ $x \mapsto |f_p(x) - f_q(x)|$. $G_{p,q,\varepsilon}$ est donc un fermé de $[0,1]$. On a de plus $F_{n,\varepsilon} = \bigcap_{p \geq n} \bigcap_{q \geq n} G_{p,q,\varepsilon}$, ce qui prouve que $F_{n,\varepsilon}$ est un fermé de $[0,1]$.

Par hypothèse, on sait que pour tout $x \in [0,1]$ la suite $(f_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente. Cette suite est donc une suite de Cauchy, ainsi il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $p \geq n$ et tout entier $q \geq n$ on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. Cela prouve que $[0,1] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon}$.

2) U_ε est un ouvert de $[0,1]$, car il s'écrit comme une réunion d'ouverts de $[0,1]$. Soit $H_\varepsilon = [0,1] \setminus U_\varepsilon$ (le complémentaire de U_ε dans $[0,1]$). Il est clair que H_ε est fermé, montrons qu'il est d'intérieur vide. Comme $H_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F_{n,\varepsilon} \cap H_\varepsilon)$, il suffit de montrer que chacun des fermés $F_{n,\varepsilon} \cap H_\varepsilon$ est d'intérieur vide (Théorème de Baire). $\overset{\circ}{\overbrace{F_{n,\varepsilon} \cap H_\varepsilon}} = \emptyset$, car $\overset{\circ}{\overbrace{F_{n,\varepsilon} \cap H_\varepsilon}} \subset \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon} \subset U_\varepsilon$ et $\overset{\circ}{\overbrace{F_{n,\varepsilon} \cap H_\varepsilon}} \subset H_\varepsilon$ et $H_\varepsilon \cap U_\varepsilon = \emptyset$.

3) Soit $x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} U_{1/k}$, montrons que f est continue en x_0. Pour tout $\varepsilon > 0$, $x_0 \in U_{\varepsilon/3} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon/3}$. Il existe donc un entier n et un voisinage V_1 de x_0 tels que $V_1 \subset F_{n,\varepsilon/3}$. Ainsi pour tout $x \in V_1$, on a pour tout $p \geq n$ et tout $q \geq n$ $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon/3$ et par conséquent on a pour tout $x \in V_1$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/3 \qquad (1)$$

D'autre part la fonction f_n étant continue en x_0, il existe V_2 un voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in V_2$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon/3 . \qquad (2)$$

Il résulte de (1) et (2) que pour tout $x \in V_1 \cap V_2$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon .$$

Ce qui prouve que f est continue en x_0. Enfin en utilisant le Théorème de Baire on peut montrer que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} U_{1/k}$ est partout dense dans $[0,1]$ et cela entraîne que $\mathcal{C}$ est partout dense dans $[0,1]$.