Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Devoir à la maison de Processus Stochastiques
Année 2012-2013
Ce problème sera noté

Partie I : Variables aléatoires réelles Symétriques α-Stables

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X, est notée par Φ_X ; rappelons que cette fonction est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, par $\Phi_X(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\xi X})$. Soient $\alpha \in]0,2]$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$ deux paramètres. Dans les questions 1) à 5), on suppose que X est une variable aléatoire Symétrique α-Stable de paramètre d'échelle σ ($S\alpha S(\sigma)$ en abrégé) ; cela signifie que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'on a, $\Phi_X(\xi) = e^{-\sigma^\alpha |\xi|^\alpha}$ (par convention $0^b = 0$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$).
1) Que peut-on dire de X lorsque $\sigma = 0$? Par la suite, on suppose que $\sigma > 0$.
2) Que peut-on dire de X lorsque $\alpha = 2$?
3) Montrer que les variables aléatoires X et $-X$ sont de même loi.
4) Que peut-on dire de la variable aléatoire $Y = X/\sigma$?
5) On suppose que $\alpha \in]0,2[$. On admet, qu'il existe alors deux constantes $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$, ne dépendant pas de X, telles que les deux inégalités : $c_1\sigma^\alpha\lambda^{-\alpha} \leq \mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq c_2\sigma^\alpha\lambda^{-\alpha}$, sont vérifiées, pour tout réel $\lambda \geq \sigma$.
a) Prouver que pour tout $\gamma \in]0,\alpha[$, on a $\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) < +\infty$ et que $\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) = \kappa(\alpha,\gamma)\sigma^\gamma$, où $\kappa(\alpha,\gamma)$ est une constante ne dépendant que de α et de γ.
b) Prouver que pour tout $\gamma \in [\alpha, +\infty[$, on a $\mathbb{E}\big(|X|^\gamma\big) = +\infty$.
6) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace de probabilité. Supposons qu'elles sont respectivement $S\alpha S(\sigma_1)$ et $S\alpha S(\sigma_2)$, que peut-on alors dire de la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, désignons par X_n une variable aléatoire réelle $S\alpha S(\sigma_n)$. Supposons que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle X. Que peut-on dire de X ?
8) On suppose que $\alpha \in]0,2[$ et on désigne par $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles $S\alpha S(1)$, définies sur un même espace de probabilité et mutuellement indépendantes. Est-il possible que la variable aléatoire $\frac{Y_1+\ldots+Y_N}{\sqrt{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle, lorsque l'entier N tend vers $+\infty$?

Partie II : Intégrale stochastique par rapport au Processus de Lévy $S\alpha S$

Dans toute cette partie le paramètre α appartient à $]0,2]$.
1) Au moyen du Théorème de consistance de Kolmogorov, établir l'existence d'un processus stochastique $\{Z'(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs réelles, vérifiant les deux propriétés suivantes : (i) $Z'(0) = 0$ presque sûrement ; (ii) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et pour tous réels $t_0 = 0 \leq t_1 \ldots \leq t_k$, les variables aléatoires $Z'(t_n) - Z'(t_{n-1})$, $n \in \{1,\ldots,k\}$ sont mutuellement indépendantes et $S\alpha S\big((t_n - t_{n-1})^{1/\alpha}\big)$ respectivement.
2) On désigne par $\{Z''(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique défini sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ que $\{Z'(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$; de plus on suppose que ces deux processus sont indépendants et possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles. On note alors, par $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ le processus stochastique tel que $Z(t) = Z'(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+$ et $Z(t) = Z''(-t)$ sinon ; on appelle $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ le Processus de Lévy $S\alpha S$. Dans le reste de cette partie, notre objectif est de définir une intégrale stochastique par rapport à $\{Z(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, cette intégrale est notée par $I(\cdot)$.

a) Soient deux réels arbitraires $u' \leq u''$, on désigne par $\mathbf{1}_{]u',u'']}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $]u',u'']$ et on pose $I(\mathbf{1}_{]u',u'']}) = Z(u'') - Z(u')$. Montrer que $I(\mathbf{1}_{]u',u'']})$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big((u''-u')^{1/\alpha}\big)$.

b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, c'est-à-dire une fonction de la forme $h = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n \mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]}$, où $N \in \mathbb{N}^*$, $(\beta_n)_{0\leq n<N}$ est une suite finie de réels, et $(u_n)_{0\leq n\leq N}$ est une suite finie strictement croissante de réels. On pose $I(h) = \sum_{n=0}^{N-1} \beta_n I(\mathbf{1}_{]u_n,u_{n+1}]})$. Montrer que $I(h)$ est une variable aléatoire $S\alpha S\big(\|h\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}\big)$, où $\|h\|_{L^\alpha(\mathbb{R})} = \big(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^\alpha \, dx\big)^{1/\alpha}$.

3) Il convient maintenant de faire quelques rappels sur les espaces L^p. Pour tout réel $p > 0$, on désigne par $L^p(\mathbb{R})$ (resp. $L^p(\Omega)$), l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue mesurables (resp. des variables aléatoires réelles Y définies sur Ω) vérifiant $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < +\infty$ (resp. $\mathbb{E}(|Y|^p) < +\infty$) ; on pose $\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\big)^{1/p}$ (resp. $\|Y\|_{L^p(\Omega)} = \big(\mathbb{E}(|Y|^p)\big)^{1/p}$). Lorsque $p \in [1,+\infty[$, alors $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ (resp. $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$) est une norme sur $L^p(\mathbb{R})$ (resp. $L^p(\Omega)$), pour laquelle cet espace est un espace de Banach. Lorsque $p \in]0,1[$, alors l'application $\Delta_{L^p(\mathbb{R})} : L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ (resp. $\Delta_{L^p(\Omega)} : L^p(\mathbb{R}) \times L^p(\Omega) \to \mathbb{R}_+$) définie par $\Delta_{L^p(\mathbb{R})}(f_1,f_2) = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)|^p \, dx$ (resp. $\Delta_{L^p(\Omega)}(Y_1,Y_2) = \mathbb{E}|Y_1 - Y_2|^p$) est une distance sur $L^p(\mathbb{R})$ (resp. $L^p(\Omega)$), pour laquelle cet espace est complet. Signalons enfin, que les fonctions en escalier forment un sous-espace vectoriel dense dans $L^p(\mathbb{R})$, au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ lorsque $p \in [1,+\infty[$, ou bien au sens de la distance $\Delta_{L^p(\mathbb{R})}$ quand $p \in]0,1[$.

a) Soit $f \in L^\alpha(\mathbb{R})$, on désigne par $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier qui converge vers f dans $L^\alpha(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\gamma \in]0,\alpha[$, $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\gamma(\Omega)$.

b) Montrer que la suite $\big(I(h_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $S\alpha S\big(\|f\|_{L^\alpha(\mathbb{R})}\big)$, notée par $I(f)$, qui ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escalier $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

c) Prouver que I est une application linéaire de $L^\alpha(\mathbb{R})$ dans $L^\gamma(\Omega)$, où $\gamma \in]0,\alpha[$ est arbitraire.

Partie III : Mouvement Fractionnaire Stable Linéaire (MFSL)

Dans toute cette partie, sauf indication supplémentaire, le paramètre α appartient à $]0,2]$. $H \in]0,1[$ désigne un autre paramètre. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on suppose que $(x)_+^{H-1/\alpha} = x^{H-1/\alpha}$ lorsque $x > 0$, et $(x)_+^{H-1/\alpha} = 0$ sinon. Pour tout réel s fixé, $K_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, désigne la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $K_s(t) = (s-t)_+^{H-1/\alpha} - (-t)_+^{H-1/\alpha}$.

1) Montrer que pour tout réel s fixé, la fonction K_s appartient à l'espace $L^\alpha(\mathbb{R})$. On note par $\{X(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$, le processus stochastique, appelé MFSL, défini pour tout $s \in \mathbb{R}$, par $X(s) = I(K_s)$.

2) Fixons $N \in \mathbb{N}^*$ et $s_1, \ldots, s_N \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{n=1}^N \lambda_n X(s_n)$ est $S\alpha S$[1] et déterminer son paramètre d'échelle.

b) Prouver que pour tout réel $a > 0$, $(X(as_1), \ldots, X(as_N))$ et $a^H(X(s_1), \ldots, X(s_N))$ sont deux vecteurs aléatoires égaux en loi[2].

3) On suppose que $\alpha \in]1,2[$ et $H \in]1/\alpha, 1[$. Montrer que le processus $\{X(s)\}_{s\in[0,1]}$ admet une modification dont les trajectoires sont, avec probabilité 1, des fonctions höldériennes d'ordre β, où $\beta \in]0, H - 1/\alpha[$ est arbitraire.

---

[1] Lorsqu'un processus vérifie cette propriété, alors on dit que ce processus est $S\alpha S$.

[2] Lorsqu'un processus stochastique vérifie cette propriété, on dit qu'il est H-auto-similaire.