Master 2 Recherche Mathématiques Appliquées
Devoir à la maison de Processus Stochastiques
Année 2011-2012
Ce problème sera noté

Quelques préliminaires

Bases hilbertienne : Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ [1] muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. On dit qu'une suite $\{e_n\}_{n\in\mathcal{I}}$ [2] d'éléments de H, est *une base hilbertienne* de H, si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de H i.e. pour tous $p, q \in \mathcal{I}$ on a $\langle e_p, e_q\rangle = 1$ lorsque $p = q$ et $\langle e_p, e_q\rangle = 0$ sinon ;

(ii) les combinaisons linéaires des e_n sont denses dans H i.e. pour tout $a \in H$ et tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $L \in \mathbb{N}$, il existe $n_0, \dots, n_L \in \mathcal{I}$ et il existe $\lambda_{n_0}, \dots, \lambda_{n_L} \in \mathbb{R}$ tels que $\left\| a - \sum_{l=0}^{L} \lambda_{n_l} e_{n_l} \right\| < \eta$.

Les conditions (i) et (ii) impliquent que tout $a \in H$ vérifie $a = \sum_{n\in\mathcal{I}} \langle a, e_n\rangle e_n$; plus précisément, pour toute suite $(\mathcal{I}_L)_{L\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de $\mathcal{I}$ vérifiant, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_L \subset \mathcal{I}_{L+1}$ et $\bigcup_{L\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_L = \mathcal{I}$, l'on a, $\lim_{L\to+\infty} \left\| a - \sum_{n\in\mathcal{I}_L} \langle a, e_n\rangle e_n \right\| = 0$. Il en résulte que $\langle a, b\rangle = \sum_{n\in\mathcal{I}} \langle a, e_n\rangle\langle b, e_n\rangle$ pour tous $a, b \in H$ et par conséquent $\|a\|^2 = \sum_{n\in\mathcal{I}} |\langle a, e_n\rangle|^2$ pour tout $a \in H$.

Le système de Haar : On pose $\mathcal{D} = \big\{(0,0)\big\} \cup \big\{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : 1 \le k \le 2^j\big\}$ et pour tout $(j,k) \in \mathcal{D}$,

$$h_{j,k} = \begin{cases} \mathbf{1}_{[0,1[} \text{ lorsque } (j,k) = (0,0), \\ \\ 2^{j/2}\left(\mathbf{1}_{[(k-1)2^{-j},\,(2k-1)2^{-j-1}[} - \mathbf{1}_{[(2k-1)2^{-j-1},\,k2^{-j}[}\right) \text{ sinon ;} \end{cases}$$

notons que pour tous réels $\alpha < \beta$, $\mathbf{1}_{[\alpha,\beta[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[\alpha, \beta[$. On admet que la suite $\{h_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathcal{D}}$, qu'on appelle *le système de Haar*, est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2\big([0,1]\big)$ formé par les fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[0,1]$ et de carré intégrable sur cet intervalle (au sens de la mesure de Lebesgue notée par du). Rappelons que $L^2\big([0,1]\big)$ est muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(u)g(u)\,du$.

Dans tout ce problème, on désigne par $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Partie I : processus gaussiens et bases hilbertiennes

On note par $\mathcal{I}$ un ensemble dénombrable et par $(\mathcal{I}_L)_{L\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles finis de $\mathcal{I}$ vérifiant, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_L \subset \mathcal{I}_{L+1}$ et $\bigcup_{L\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_L = \mathcal{I}$. On désigne par $\{e_n\}_{n\in\mathcal{I}}$ une base hilbertienne de $L^2\big([0,1]\big)$ et on désigne par $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathcal{I}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées et réduites, définies sur Ω. Enfin, $(f_t)_{t\in[0,1]}$ est une famille de fonctions qui appartiennent à $L^2\big([0,1]\big)$.

[1] On peut, plus généralement supposer que H est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, pour simplifier on se restreint à $\mathbb{R}$.

[2] $\mathcal{I}$ est un ensemble dénombrable, mais il ne s'agit pas forcément d'une partie de $\mathbb{N}$.

1) Pour tous $L \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $X_L(t) = \sum_{n \in \mathcal{I}_L} \langle f_t, e_n \rangle \epsilon_n$. Montrer que pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, pour tous $t_1, \ldots, t_M \in [0,1]$ et pour tous $\gamma_1, \ldots, \gamma_M \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\sum_{m=1}^{M} \gamma_m X_L(t_m)$ est une gaussienne centrée dont la variance vaut : $\sum_{n \in \mathcal{I}_L} \left| \langle \sum_{m=1}^{M} \gamma_m f_{t_m}, e_n \rangle \right|^2$.

2) Fixons $t \in [0,1]$, montrer que $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ formé par les variables aléatoires réelles définies sur Ω et dont le second moment est fini ; rappelons que $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire défini par $((X,Y)) = \mathbb{E}(XY)$, où $\mathbb{E}(\cdot)$ désigne l'espérance.

3) Prouver que $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $L^2(\Omega)$ et que sa limite ne dépend pas du choix de la suite des ensembles d'indices $(\mathcal{I}_L)_{L \in \mathbb{N}}$; autrement dit, si on remplace $(\mathcal{I}_L)_{L \in \mathbb{N}}$ par une autre suite $(\mathcal{I}'_L)_{L \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de $\mathcal{I}$ vérifiant, pour tout $L \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}'_L \subset \mathcal{I}'_{L+1}$ et $\bigcup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{I}'_L = \mathcal{I}$, alors l'on obtient, à un événement $\mathbb{P}$-négligeable près, la même limite. Désormais la limite de $\{X_L(t)\}_{L \in \mathbb{N}}$ est notée par $X(t)$.

4) Montrer que $\{X(t)\}_{t \in [0,1]}$ est un processus stochastique gaussien centré dont la fonction de covariance s_X est donnée, pour tous $t_1, t_2 \in [0,1]$, par $s_X(t_1, t_2) = \int_0^1 f_{t_1}(u) f_{t_2}(u)\, du$ (indication : pour établir la gaussianité de ce processus on pourra utiliser la notion de fonction caractéristique).

Partie II : représentation du mouvement brownien dans le système de Schauder

On appelle *le système de Schauder*, la suite $\{\Delta_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{D}}$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tous $(j,k) \in \mathcal{D}$ et $t \in [0,1]$, par $\Delta_{j,k}(t) = \int_0^t h_{j,k}(u)\, du$.

1) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, l'on a : $\Delta_{0,0}(t) = t$.

2) On suppose $(j,k) \in \mathcal{D} \setminus \{(0,0)\}$; prouver que le support de la fonction $\Delta_{j,k}$ est l'intervalle $\left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right]$, puis que l'on a pour $t \in \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right]$,

$$\Delta_{j,k}(t) = 2^{j/2} \min\left\{ \left(t - \frac{k-1}{2^j}\right), \left(\frac{k}{2^j} - t\right) \right\}.$$

3) Dans un même repère orthogonal, tracer en quatre couleurs différentes les graphes respectifs des fonctions $\Delta_{2,1}$, $\Delta_{2,2}$, $\Delta_{2,3}$ et $\Delta_{2,4}$.

4) Prouver que pour tous $t_1, t_2 \in [0,1]$, l'on a : $\min(t_1, t_2) = \sum_{(j,k) \in \mathcal{D}} \Delta_{j,k}(t_1) \Delta_{j,k}(t_2)$.

5) Soit $\{\epsilon_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathcal{D}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes centrées et réduites, définies sur Ω. Pour tout $t \in [0,1]$, on pose

$$B(t) = \sum_{(j,k) \in \mathcal{D}} \Delta_{j,k}(t) \epsilon_{j,k}.$$

Après avoir justifié la convergence de cette série, montrer que le processus stochastique $\{B(t)\}_{t \in [0,1]}$ ainsi défini, possède la même loi que celle d'un mouvement brownien standard.

6) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'on a : $\max_{t \in [0,1]} \left(\sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t) \right) = 2^{-\frac{j}{2}-1}$.

7) Au moyen du Lemme de Borel-Cantelli prouver que l'on a presque sûrement,

$$\sup_{(j,k) \in \mathcal{D}} \frac{|\epsilon_{j,k}|}{\sqrt{1+j}} < \infty.$$

8) Au moyen de II-6) et II-7), montrer qu'il existe Ω^* un événement de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega^*$, la fonction $t \longmapsto \Delta_{0,0}(t)\epsilon_{0,0}(\omega) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{2^j} \Delta_{j,k}(t) \epsilon_{j,k}(\omega)$ est bien définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue sur $[0,1]$.