

UNIVERSITÉ LILLE 1

MASTER 2 RECHERCHE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PREMIÈRE PARTIE DU COURS DE PROCESSUS STOCHASTIQUES

NOTES DE COURS RÉDIGÉES PAR ANTOINE AYACHE

Loi de probabilité d'un processus et sujets connexes

1. Définitions et propriétés de base d'un processus stochastique

Nous désignons par (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité, nous désignons par T un ensemble *arbitraire*, et nous désignons par S un espace métrique muni de la σ -algèbre borélienne notée par $\mathcal{B}(S)$, c'est-à-dire la σ -algèbre engendrée par les ouverts de S .

L'ensemble T est appelé *l'ensemble des indices*; souvent on prend $T = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N$ (où $N \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{R}_+^N, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$, ou encore une partie de l'un de ces ensembles. Ainsi, T peut faire référence au temps ou bien à l'espace ou encore aux deux à la fois; un indice $t \in T$ peut alors désigner un instant, une date, un point, un point en un certain instant, ou un point à une certaine date.

L'espace métrique S est parfois appelé *l'espace d'états*; souvent on prend $S = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^d$ (où $d \in \mathbb{N}^*$), \mathbb{C}^d , un ensemble fini ou un ensemble infini dénombrable.

Définition 1.1. un processus stochastique est une famille de variables aléatoires (c'est-à-dire des applications mesurables) indexées par T , définies sur le même espace de probabilité, en l'occurrence (Ω, \mathcal{F}, P) , et à valeurs dans $(S, \mathcal{B}(S))$; lorsque T est un sous-ensemble d'un espace multidimensionnel (typiquement \mathbb{R}^N), on préfère parfois utiliser la dénomination de champ stochastique plutôt que celle de processus stochastique.

Un processus (ou encore un champ) stochastique est habituellement noté par : $\{X_t\}_{t \in T}, \{Y_t\}_{t \in T}$ ou $\{Z_t\}_{t \in T}$; la valeur de la variable aléatoire X_t en un certain $\omega \in \Omega$ est alors désignée par $X_t(\omega)$. Une autre notation qu'on retrouve aussi dans la littérature et même parfois dans ce cours, est : $\{X(t)\}_{t \in T}, \{Y(t)\}_{t \in T}$ ou $\{Z(t)\}_{t \in T}$; la valeur de la variable aléatoire $X(t)$ en un certain $\omega \in \Omega$ est alors désignée par $X(t, \omega)$.

Désignons par S^T l'ensemble de toutes les applications¹ définies sur T à valeurs dans S ; un élément (autrement dit une application) appartenant à S^T , est noté par $\tilde{\omega}$ ², la valeur de $\tilde{\omega}$ en $t \in T$ est notée par $\tilde{\omega}(t)$. Maintenant, notre objectif est de définir, de façon naturelle, une σ -algèbre sur S^T qui sera notée par \mathcal{B}^3 .

Supposons que $k \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$ sont arbitraires⁴ et fixés; nous désignons par π_{t_1, \dots, t_k} l'application de S^T dans S^k , définie pour tout $\tilde{\omega}$, par,

$$\pi_{t_1, \dots, t_k}(\tilde{\omega}) = (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)),$$

une telle application est appelée *une projection*; par ailleurs, nous désignons par $\mathcal{B}(S^k)$ la σ -algèbre des sous-ensembles boréliens de S^k ; les sous-ensembles de S^T de la forme,

$$\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(A) = \{\tilde{\omega} \in S^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in A\},$$

1. Parfois, le terme "application" est remplacé par le terme "fonction", cependant l'on suppose toujours que celle-ci est définie en tout point de T .

2. Cette notation n'est pas innocente, en effet, plus tard S^T jouera parfois le rôle d'un espace de probabilité.

3. Lorsqu'il y a un risque d'ambiguïté on utilisera la notation $\mathcal{B}_{T,S}$.

4. Même si cela n'est pas indispensable, il est parfois/souvent commode de supposer que les t_1, \dots, t_k sont distincts (deux à deux); une telle hypothèse n'entraîne aucune perte de généralité et donc aucune modification dans les énoncés des résultats qui vont suivre.

où $A \in \mathcal{B}(S^k)$, constituent une σ -algèbre sur S^T que l'on note par $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$ (ou encore parfois de façon abusive par $\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(\mathcal{B}(S^k))$), soulignons que :

- on a $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k} = \mathcal{B}_{\pi(t_1), \dots, \pi(t_k)}$, pour toute permutation π de $\{1, \dots, k\}$;
- on a $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k} = \mathcal{B}_{s_1, \dots, s_{k'}}$, où $s_1, \dots, s_{k'} \in T$ sont distincts et vérifient $\{t_1, \dots, t_k\} = \{s_1, \dots, s_{k'}\}$;
- on a $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k} \subset \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}$, où $t_{k+1} \in T$ est arbitraire.

On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{C} de S^T est un *cylindre*, lorsqu'il appartient à au moins l'une des σ -algèbres $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$, autrement dit,

$$\mathcal{C} \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{(t_1, \dots, t_k) \in T^k} \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}.$$

Cette réunion (autrement dit l'ensemble de tous les cylindres de S^T) est notée par \mathcal{B}^0 ; dans la Remarque 1.19 qui sera donnée plus loin, nous verrons que \mathcal{B}^0 est en fait une algèbre. On désigne par \mathcal{B} la σ -algèbre sur S^T engendrée par tous les cylindres, c'est-à-dire que

$$\mathcal{B} = \sigma \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{(t_1, \dots, t_k) \in T^k} \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k} \right) = \sigma(\mathcal{B}^0);$$

on se gardera de croire que tout élément de \mathcal{B} est un cylindre : en général l'inclusion $\mathcal{B}^0 \subset \mathcal{B}$ est stricte. Notons au passage que la topologie la plus naturelle dont on peut munir l'ensemble S^T est la *topologie produit*, c'est-à-dire la plus petite (au sens de l'inclusion) topologie qui rend continue toutes les projections π_t , $t \in T$; les ouverts de cette topologie engendrent la σ -algèbre borélienne⁵ de S^T , désignée par $\mathcal{B}(S^T)$, l'on a toujours $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(S^T)$, mais cette inclusion peut être stricte, fondamentalement car tout ouvert de la topologie produit de S^T n'est pas forcément une réunion *dénombrable* de cylindres.

Nous allons maintenant étudier certaines relations entre, d'une part les processus stochastiques définis sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(S, \mathcal{B}(S))$, et d'autre part les mesures de probabilité sur l'espace mesurable⁶ (S^T, \mathcal{B}) .

Définition 1.2. Fixons $\omega \in \Omega$ et désignons par $X.(\omega) \in S^T$, l'application $T \rightarrow S$, $t \mapsto X_t(\omega)$; une telle application est appelée une *trajectoire* (ou parfois une *réalisation*) du processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$.

La remarque suivante permet de comprendre la raison pour laquelle la σ -algèbre \mathcal{B} a été définie de la sorte.

Remarque 1.3. L'application $\Phi_X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S^T, \mathcal{B})$, $\omega \mapsto \Phi_X(\omega) = X.(\omega)$, est mesurable.

PREUVE DE LA REMARQUE 1.3. Il suffit de prouver que pour tout cylindre $\mathcal{C} = \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(A)$, où $A \in \mathcal{B}(S^k)$, on a $\Phi_X^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{F}$. Or

$$\Phi_X^{-1}(\mathcal{C}) = \Phi_X^{-1}(\pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}(A)) = (\pi_{t_1, \dots, t_k} \circ \Phi_X)^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega)) \in A\}.$$

Etant donné que X_{t_1}, \dots, X_{t_k} sont des variables aléatoires, l'application $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S^k, \mathcal{B}(S^k))$, $\omega \mapsto (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_k}(\omega))$ est mesurable, cela prouve que $\Phi_X^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{F}$. \square

Définition 1.4. Soit $\{X_t\}_{t \in T}$ un processus stochastique, on note par $\tilde{\mathbb{P}}_X$ la mesure de probabilité sur (S^T, \mathcal{B}) , définie par,

$$\tilde{\mathbb{P}}_X(\tilde{B}) = P(\Phi_X^{-1}(\tilde{B})), \text{ pour tout } \tilde{B} \in \mathcal{B};$$

5. Au sens classique.

6. Rappelons qu'un *espace mesurable* est un ensemble muni d'une σ -algèbre, rappelons aussi qu'un *espace mesuré* est un ensemble muni, à la fois, d'une σ -algèbre et d'une mesure sur cette σ -algèbre.

1 Définitions et propriétés de base d'un processus stochastique

rappelons que P désigne la mesure de probabilité de référence dont est muni l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , espace sur lequel est défini $\{X_t\}_{t \in T}$. On appelle $\tilde{\mathbb{P}}_X$ la loi de probabilité du processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$, ou encore la mesure de probabilité induite par le processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$ sur l'espace mesurable (S^T, \mathcal{B}) .

Nous venons de voir que tout processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$, défini sur un espace de probabilité arbitraire (Ω, \mathcal{F}, P) , induit une mesure de probabilité, noté par $\tilde{\mathbb{P}}_X$, sur l'espace mesurable (S^T, \mathcal{B}) ; il semble naturel de se demander si la réciproque est vraie : est-ce que toute mesure de probabilité sur (S^T, \mathcal{B}) provient d'un processus stochastique? Plus précisément, étant donné une mesure de probabilité arbitraire Q sur (S^T, \mathcal{B}) , peut-on construire un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et un processus stochastique $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$, défini sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et à valeurs dans $(S, \mathcal{B}(S))$, tel que $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{X}} = Q$?

La remarque suivante montre que la réponse à cette question est positive.

Remarque 1.5. Soit Q une mesure de probabilité arbitraire définie sur l'espace mesurable (S^T, \mathcal{B}) . Désignons par $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$ le processus stochastique à valeurs dans $(S, \mathcal{B}(S))$, défini sur l'espace de probabilité (S^T, \mathcal{B}, Q) (c'est-à-dire que l'on prend $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P}) = (S^T, \mathcal{B}, Q)$), par

$$\tilde{X}_t(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}(t), \text{ pour tous } t \in T \text{ et } \tilde{\omega} \in S^T; \quad (1.1)$$

on a alors $\tilde{\mathbb{P}}_{\tilde{X}} = Q$. Le processus $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$ ainsi défini, est appelé le processus canonique.

Définition 1.6. Supposons que $T \subset \mathbb{R}^N$, on dit qu'un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$ est mesurable, si l'application $(\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(T)) \rightarrow (S, \mathcal{B}(S))$, $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable.

On se gardera de confondre le fait que Φ_X soit mesurable (voir la Remarque 1.3) avec le fait que $\{X_t\}_{t \in T}$ le soit. Donnons un critère qui permet d'établir la mesurabilité de $\{X_t\}_{t \in T}$ dans le cas particulier où $T = \mathbb{R}$ et $S = \mathbb{R}^d$ (ou plus généralement $S = \mathbb{C}^d$).

Proposition 1.7. Supposons que $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R}^d (ou plus généralement à valeurs dans \mathbb{C}^d) vérifiant la propriété suivante : pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue à droite (ou encore continue à gauche). Alors le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est mesurable.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par $\{Y_t^n\}_{t \in \mathbb{R}}$ le processus stochastique défini pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, par

$$Y_t^n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_{\frac{k+1}{2^n}}(\omega) \mathbb{1}_{\left] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]}(t).$$

Clairement $\{Y_t^n\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus mesurable; de plus, grâce à la continuité à droite des trajectoires de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, pour tout $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, on a,

$$X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_t^n(\omega).$$

□

Exercice 1.1. En vous inspirant de ce qui précède, donner l'énoncé d'un critère permettant d'établir la mesurabilité d'un champ stochastique $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}^N}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d (ou plus généralement à valeurs dans \mathbb{C}^d); donner également la preuve de ce critère.

Nous allons maintenant voir trois notions d'égalité, de plus en plus fortes, entre deux processus stochastiques.

Définition 1.8. Soient $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ deux processus stochastiques à valeurs dans $(S, \mathcal{B}(S))$; on n'impose pas forcément à ces deux processus d'être définis sur un même espace de probabilité. On dit que $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles ou encore qu'ils sont égaux au sens des lois fini-dimensionnelles, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$, les vecteurs aléatoires⁷ $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ et $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$ sont de même loi i.e. pour tout $A \in \mathcal{B}(S^k)$, on a,

$$P'(\{\omega' \in \Omega' : (X_{t_1}(\omega'), \dots, X_{t_k}(\omega')) \in A\}) = P''(\{\omega'' \in \Omega'' : (X_{t_1}(\omega''), \dots, X_{t_k}(\omega'')) \in A\});$$

ici $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ est l'espace de probabilité sur lequel est défini $\{X_t\}_{t \in T}$ et $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$ est celui sur lequel est défini $\{Y_t\}_{t \in T}$.

Il est clair que deux processus stochastiques $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles, si et seulement si pour tout cylindre \mathcal{C} , l'on a, $\tilde{\mathbb{P}}_X(\mathcal{C}) = \tilde{\mathbb{P}}_Y(\mathcal{C})$; en fait l'égalité de $\tilde{\mathbb{P}}_X$ et $\tilde{\mathbb{P}}_Y$ sur l'algèbre des cylindres \mathcal{B}^0 , entraîne leur égalité sur la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{B}^0)$ (autrement dit leur égalité partout).

Théorème 1.9. Lorsque deux processus stochastiques $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ possèdent les mêmes lois fini-dimensionnelles, alors ces deux processus induisent la même mesure de probabilité sur (S^T, \mathcal{B}) , c'est-à-dire que pour tout $\tilde{B} \in \mathcal{B}$, l'on a, $\tilde{\mathbb{P}}_X(\tilde{B}) = \tilde{\mathbb{P}}_Y(\tilde{B})$.

Ainsi, $\tilde{\mathbb{P}}_X$ la loi de probabilité d'un processus $\{X_t\}_{t \in T}$ est complètement caractérisée par les lois fini-dimensionnelles de $\{X_t\}_{t \in T}$; signalons aussi au passage que la notion d'indépendance d'un nombre fini de processus stochastiques est définie au moyen de leurs lois fini-dimensionnelles :

Définition 1.10. Soit un entier $m \geq 2$. On dit que m processus stochastiques

$$\{X_t^1\}_{t \in T_1}, \{X_t^2\}_{t \in T_2}, \dots, \{X_t^m\}_{t \in T_m},$$

sont (mutuellement) indépendants, si pour tous $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}^*$ et pour tous

$$(t_1^1, \dots, t_{k_1}^1) \in T_1^{k_1}, (t_1^2, \dots, t_{k_2}^2) \in T_2^{k_2}, \dots, (t_1^m, \dots, t_{k_m}^m) \in T_m^{k_m},$$

les vecteurs aléatoires

$$(X_{t_1^1}^1, \dots, X_{t_{k_1}^1}^1), (X_{t_1^2}^2, \dots, X_{t_{k_2}^2}^2), \dots, (X_{t_1^m}^m, \dots, X_{t_{k_m}^m}^m),$$

sont mutuellement indépendants.

Avant d'établir l'important Théorème 1.9, donnons les définitions des deux autres notions d'égalité entre deux processus stochastiques.

Définition 1.11. Soient $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ deux processus stochastiques définis sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . On dit que $\{Y_t\}_{t \in T}$ est une version, ou encore une modification de $\{X_t\}_{t \in T}$, si pour tout $t \in T$, l'on a $P(X_t = Y_t) = 1$ (a-t-on alors forcément $P(\forall t \in T, X_t = Y_t) = 1$?)

Définition 1.12. Soient $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ deux processus stochastiques définis sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . On dit que $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ sont indistinguables, s'il existe un événement $\Omega^* \in \mathcal{F}$ (attention Ω^* ne dépend pas de t !), $P(\Omega^*) = 1$, tel que pour tout $\omega \in \Omega^*$ et tout $t \in T$, on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$.

Remarques 1.13. • Si T est un ensemble dénombrable, deux processus sont indistinguables si et seulement s'ils sont des versions l'un de l'autre. En revanche, lorsque T est un ensemble non dénombrable, deux processus peuvent être des versions l'un de l'autre sans pour autant être indistinguables (construire un contre exemple).

7. Dans ce cours, le terme "vecteur aléatoire" signifie toujours "variable aléatoire à valeurs dans un espace qui est un produit cartésien d'un nombre fini de copies d'un même espace métrique".

1 Définitions et propriétés de base d'un processus stochastique

- Supposons que $T = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}_+ et que $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ sont deux processus tels que pour tout $\omega \in \Omega$, les applications de T dans S , $t \mapsto X_t(\omega)$ et $t \mapsto Y_t(\omega)$ soient continues à droite (ou encore continues à gauche). Alors $\{X_t\}_{t \in T}$ et $\{Y_t\}_{t \in T}$ sont des versions l'un de l'autre si et seulement s'ils sont indistinguables.

L'objectif du restant de cette section est d'établir le Théorème 1.9, pour cela nous avons besoin de faire d'abord quelques rappels concernant la théorie de la mesure.

Définition 1.14. Soit $\tilde{\Omega}$ un ensemble, une classe \mathcal{K} de sous-ensembles de $\tilde{\Omega}$ est appelée un π -système, si elle vérifie les deux propriétés suivantes (a) et (b) :

- (a) $\emptyset \in \mathcal{K}$;
- (b) pour tous $A, B \in \mathcal{K}$, on a $A \cap B \in \mathcal{K}$.

Remarque 1.15. Lorsqu'on prend $\tilde{\Omega} = S^T$, la classe des cylindres est un π -système.

PREUVE DE LA REMARQUE 1.15. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$,

$$\emptyset_{S^T} = \{\tilde{\omega} \in S^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in \emptyset_{S^k}\},$$

où \emptyset_{S^T} et \emptyset_{S^k} , désignent les sous-ensembles vides, respectivement de S^T et S^k ; ainsi, on peut voir \emptyset_{S^T} comme un cylindre. Supposons maintenant que

$$\mathcal{C}' = \{\tilde{\omega} \in S^T : (\tilde{\omega}(t'_1), \dots, \tilde{\omega}(t'_{k'})) \in A'\}$$

et

$$\mathcal{C}'' = \{\tilde{\omega} \in S^T : (\tilde{\omega}(t''_1), \dots, \tilde{\omega}(t''_{k''})) \in A''\}$$

sont deux cylindres ; étant donné que $A' \in \mathcal{B}(S^{k'})$ et $A'' \in \mathcal{B}(S^{k''})$, l'on a que

$$A' \times A'' \in \mathcal{B}(S^{k'}) \otimes \mathcal{B}(S^{k''}) = \mathcal{B}(S^{k'+k''}),$$

et par conséquent

$$\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = \{\tilde{\omega} \in S^T : (\tilde{\omega}(t'_1), \dots, \tilde{\omega}(t'_{k'}), \tilde{\omega}(t''_1), \dots, \tilde{\omega}(t''_{k''})) \in A' \times A''\}$$

est un cylindre. □

Définition 1.16. Une classe \mathcal{G} de sous-ensembles de $\tilde{\Omega}$ est appelée un système de Dynkin, si elle vérifie les trois propriétés suivantes (i), (ii) et (iii) :

- (i) $\tilde{\Omega} \in \mathcal{G}$;
- (ii) pour tout $A \subset \tilde{\Omega}$

$$A \in \mathcal{G} \iff \tilde{\Omega} \setminus A \in \mathcal{G} ;$$

- (iii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de sous-ensembles appartenant à \mathcal{G} et qui sont deux à deux disjoints, alors

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{G}.$$

Définition 1.17. On dit qu'une classe de sous-ensembles \mathcal{G} d'un ensemble $\tilde{\Omega}$ est une algèbre, si cette classe vérifie les propriétés suivantes (i), (ii) et (iii).

- (i) $\tilde{\Omega} \in \mathcal{G}$;
- (ii) pour tout $A \subset \tilde{\Omega}$

$$C \in \mathcal{G} \iff \tilde{\Omega} \setminus C \in \mathcal{G} ;$$

- (iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{G}$, on a,

$$\bigcup_{n=1}^n C_n \in \mathcal{G}.$$

Remarque 1.18. *Un système de Dynkin est une algèbre si et seulement si il est un π -système.*

Remarque 1.19. \mathcal{B}^0 la classe des cylindres de S^T est une algèbre de S^T .

PREUVE DE LA REMARQUE 1.19. Supposons que $t_0 \in T$ est arbitraire et fixé, on a évidemment

$$S^T = \{\tilde{\omega} \in S^T : \tilde{\omega}(t_0) \in S\},$$

ce qui prouve que $S^T \in \mathcal{B}^0$. Supposons maintenant que $\mathcal{C} \in \mathcal{B}^0$ est arbitraire et montrons que $S^T \setminus \mathcal{C}$ appartient aussi à \mathcal{B}^0 . Nous savons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$ et $A \in \mathcal{B}(S^k)$, tels que

$$\mathcal{C} = \{\tilde{\omega} \in S^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in A\};$$

ainsi,

$$S^T \setminus \mathcal{C} = \{\tilde{\omega} \in S^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in S^k \setminus A\},$$

ce qui montre que $S^T \setminus \mathcal{C} \in \mathcal{B}^0$ (en effet $S^k \setminus A \in \mathcal{B}(S^k)$). Enfin, compte tenu de ce qui précède, et de la Remarque 1.15, l'on a que toute réunion finie de cylindres est un cylindre. \square

Remarque 1.20. *Si $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ est une famille de systèmes de Dynkin de $\tilde{\Omega}$ (ici l'ensemble I n'est pas nécessairement dénombrable), alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{G}_i$ est également un système de Dynkin de $\tilde{\Omega}$; ça a donc un sens de parler de plus petit (au sens de l'inclusion) système de Dynkin contenant une classe \mathcal{K} de sous-ensembles de $\tilde{\Omega}$.*

Lemme 1.21. *Soit \mathcal{K} un π -système et soit \mathcal{G} le plus petit système de Dynkin tel que $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{K})$, où $\sigma(\mathcal{K})$ est la plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{K} . Ainsi, lorsqu'un système de Dynkin contient un π -système, alors il contient aussi la σ -algèbre générée par ce π -système.*

PREUVE DU LEMME 1.21. Comme $\sigma(\mathcal{K})$ est un système de Dynkin, on a $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{K})$. Pour établir l'inclusion inverse, il convient d'abord de remarquer que, lorsqu'une classe de sous-ensembles de $\tilde{\Omega}$ est, à la fois un π -système et un système de Dynkin, alors cette classe forme une σ -algèbre (donner une preuve de ce résultat). Ainsi, pour montrer que $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{G}$, il suffit d'établir que \mathcal{G} est un π -système.

Supposons que $A \in \mathcal{G}$ est arbitraire et fixé, posons alors $\mathcal{G}_A = \{B \in \mathcal{G} : A \cap B \in \mathcal{G}\}$ et montrons que \mathcal{G}_A est un système de Dynkin. Clairement, il vérifie les conditions (i) et (iii) de la Définition 1.16; il vérifie aussi la condition (ii) de cette définition, puisque l'on a pour tout $B \in \mathcal{G}_A$,

$$A \cap (\tilde{\Omega} \setminus B) = \tilde{\Omega} \setminus [(A \cap B) \cup (\tilde{\Omega} \setminus A)].$$

Ayant montré que \mathcal{G}_A est un système de Dynkin, remarquons ensuite que lorsqu'on impose à A d'appartenir au π -système \mathcal{K} , l'on a alors $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}_A$, ce qui entraîne que $\mathcal{G}_A = \mathcal{G}$ (d'une part $\mathcal{G}_A \subset \mathcal{G}$ et d'autre part \mathcal{G} est le plus petit système de Dynkin contenant \mathcal{K}).

Il résulte de tout ce qui précède que pour tout $A \in \mathcal{K}$ et tout $B \in \mathcal{G}$, on a $A \cap B \in \mathcal{G}$. Ainsi pour tout $B \in \mathcal{G}$, on a $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}_B = \{A \in \mathcal{G} : A \cap B \in \mathcal{G}\}$ et par conséquent $\mathcal{G}_B = \mathcal{G}$, cela prouve que \mathcal{G} est un π -système. \square

Lemme 1.22. *Soient \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 deux mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ qui coïncident sur un π -système $\mathcal{K} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ (i.e. pour tout $A \in \mathcal{K}$, $\tilde{P}_1(A) = \tilde{P}_2(A)$), alors \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 coïncident sur $\sigma(\mathcal{K})$.*

PREUVE DU LEMME 1.22. Le π -système \mathcal{K} est clairement inclu dans

$$\mathcal{G} = \{B \in \tilde{\mathcal{F}} : \tilde{P}_1(B) = \tilde{P}_2(B)\}.$$

Ainsi, compte tenu, du Lemme 1.21, pour prouver que $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{G}$, il suffit de montrer que \mathcal{G} est un système de Dynkin; cela ne présente guère de difficulté (je vous conseille cependant de rédiger soigneusement la preuve, pour vous rendre compte de la raison pour laquelle l'on impose aux ensembles A_n , dans la condition (iii) de Définition 1.16, d'être deux à deux disjoints). \square

2 Théorème de consistance de Kolmogorov

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le Théorème 1.9.

PREUVE DU THÉORÈME 1.9. Ce théorème est une conséquence immédiate de la Remarque 1.15 et du Lemme 1.22. \square

2. Théorème de consistance de Kolmogorov

Dans la section précédente, nous avons vu que, l'ensemble des processus stochastiques indexés par un ensemble T et à valeurs dans un espace métrique S , et l'ensemble des mesures de probabilité sur (S^T, \mathcal{B}) , sont en bijection. Rappelons, au passage que la σ -algèbre \mathcal{B} est engendrée par la classe des cylindres, c'est-à-dire par la réunion de toutes les σ -algèbres $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$.

Dans cette nouvelle section, pour simplifier la présentation, nous supposons que $S = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que nous nous restreignons aux processus stochastiques à valeurs réelles. Notre objectif est d'établir, l'existence d'un processus dont les lois fini-dimensionnelles sont prescrites et vérifient deux conditions, dites *les conditions de consistance* (voir la Définition 2.1 ci-dessous). Plus précisément, étant donné, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$, une mesure de probabilité P_{t_1, \dots, t_k} sur la σ -algèbre $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$; on voudrait montrer que lorsque les P_{t_1, \dots, t_k} vérifient les conditions de consistance, alors il existe \tilde{P} une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$ dont la restriction à chaque $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$, coïncide avec P_{t_1, \dots, t_k} . Il est à noter que lorsqu'une telle mesure de probabilité \tilde{P} existe, alors les lois fini-dimensionnelles du processus canonique $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$ défini sur l'espace de probabilité $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}, \tilde{P})$ par $\tilde{X}_t(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}(t)$, sont exactement les mesures de probabilité P_{t_1, \dots, t_k} .

Définition 2.1. (*conditions de consistance*) On dit que les mesures de probabilité P_{t_1, \dots, t_k} vérifient les conditions dites conditions de consistance, lorsque ces mesures possèdent les deux propriétés suivantes (a) et (b).

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$, toute permutation π de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$, et tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, l'on a,

$$P_{t_1, \dots, t_k} \left(\left\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in A \right\} \right) = P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}} \left(\left\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in A \right\} \right).$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tout $(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}) \in T^{k+1}$, et tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$,

$$P_{t_1, \dots, t_k} \left(\left\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in A \right\} \right) = P_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}} \left(\left\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k), \tilde{\omega}(t_{k+1})) \in A \times \mathbb{R} \right\} \right).$$

Notons que, lorsque les mesures de probabilité P_{t_1, \dots, t_k} sont définies comme les restrictions aux σ -algèbres $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$ d'une même mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$, alors les P_{t_1, \dots, t_k} vérifient automatiquement les conditions de consistance. La réciproque est également vraie, comme le montre le théorème suivant qui est le principal résultat de cette section.

Théorème 2.2. (*Théorème de consistance de Kolmogorov*) Supposons que $\{P_{t_1, \dots, t_k} : k \in \mathbb{N}^* \text{ et } (t_1, \dots, t_k) \in T^k\}$ est une famille de mesures de probabilité définies respectivement sur les σ -algèbres $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$ et vérifiant les conditions de consistance. Il existe alors une unique mesure de probabilité \tilde{P} sur $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$ dont la restriction à chaque $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$ coïncide avec P_{t_1, \dots, t_k} .

Pour pouvoir prouver le Théorème 2.2, nous avons besoin de préliminaires.

Définition 2.3. On dit qu'une classe de sous-ensembles \mathcal{G} d'un ensemble $\tilde{\Omega}$ est une semi-algèbre, si cette classe vérifie les propriétés suivantes (i), (ii) et (iii).

- (i) $\emptyset \in \mathcal{G}$ et $\tilde{\Omega} \in \mathcal{G}$;
- (ii) pour tous $C_1, C_2 \in \mathcal{G}$, on a $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{G}$;

(iii) pour tous $C_1, C_2 \in \mathcal{G}$ vérifiant $C_2 \subset C_1$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et il existe n ensembles deux à deux disjoints $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{G}$, tels que :

$$C_2 \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \emptyset \text{ et } C_1 = C_2 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right).$$

Exercice 2.1. 1) Montrer que toute algèbre est une semi-algèbre.

2) Montrer que la classe des intervalles de \mathbb{R} est une semi-algèbre, mais qu'elle n'est pas une algèbre. Comment peut-on étendre ce résultat à \mathbb{R}^N ?

Exercice 2.2. On désigne par \mathcal{K} la classe des sous-ensembles de \mathbb{R}^T de la forme :

$$\{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in I_1 \times \dots \times I_k\},$$

où $k \in \mathbb{N}^*$, $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$ et I_1, \dots, I_k sont des intervalles de \mathbb{R} . Montrer que \mathcal{K} est une semi-algèbre. Est-ce que \mathcal{K} est une algèbre ?

Définition 2.4. Soit m une fonction à valeurs dans \mathbb{R}_+ et qui est définie sur une semi-algèbre \mathcal{G} d'un ensemble $\tilde{\Omega}$. On dit que m est σ -additive, lorsque pour toute suite $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de \mathcal{G} , deux à deux disjoints et vérifiant $\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in \mathcal{G}$, l'on a,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(C_i).$$

Le théorème fondamental suivant qui sera admis, est le principal ingrédient de la preuve du Théorème 2.2.

Théorème 2.5. (Théorème d'extension de Carathéodory) Soit m une fonction σ -additive définie sur une semi-algèbre \mathcal{G} d'un ensemble $\tilde{\Omega}$. Alors, m peut être prolongée, de façon unique, en une mesure sur $\sigma(\mathcal{G})$, la σ -algèbre engendrée par \mathcal{G} , c'est-à-dire qu'il existe une unique mesure μ définie sur $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{G}))$ telle que $\mu(C) = m(C)$ pour tout $C \in \mathcal{G}$.

Lemme 2.6. Soit m une fonction à valeurs dans \mathbb{R}_+ , définie sur une algèbre \mathcal{G} d'un ensemble $\tilde{\Omega}$ et vérifiant les deux conditions suivantes (a) et (b).

(a) (additivité) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{G}$, deux à deux disjoints,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n m(C_i);$$

(b) (sous- σ -additivité) pour toute suite $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de \mathcal{G} , deux à deux disjoints et vérifiant $\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in \mathcal{G}$, l'on a,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(C_i).$$

Alors m est σ -additive, autrement dit l'inégalité dans (b) est forcément une égalité.

PREUVE DU LEMME 2.6. Soit $(C_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de \mathcal{G} , deux à deux disjoints et vérifiant $\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \in \mathcal{G}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i = \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right) \cup \left(\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \right] \cap \left[\tilde{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i \right] \right)$$

et donc, la propriété d'additivité de m implique que,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i\right) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n m(C_i).$$

2 Théorème de consistance de Kolmogorov

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i\right) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} m(C_i).$$

□

Lemme 2.7. Soient S un espace métrique arbitraire et $\mathcal{B}(S)$ la σ -algèbre formée par les sous-ensembles boréliens de S . Toute mesure finie P sur $(S, \mathcal{B}(S))$ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(S)$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe U et K , respectivement un ouvert et un fermé de S , tels que :

$$K \subset A \subset U \text{ et } P(U \setminus K) = P(U) - P(K) < \epsilon.$$

Notons que dans le cas où $S = \mathbb{R}^d$, quitte à remplacer K par son intersection avec une boule fermée de rayon suffisamment grand, on peut supposer que K est compact.

PREUVE DU LEMME 2.7. Si A est un fermé, on peut prendre $K = A$ et U un ouvert de la forme,

$$U = \left\{ x \in S : \text{dist}(x, A) < \frac{1}{n} \right\},$$

où l'entier n est suffisamment grand, et où $\text{dist}(\cdot, A) : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction continue sur S , strictement positive sur $S \setminus A$, définie par,

$$\text{dist}(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}, \quad \text{pour tout } x \in S,$$

d étant la distance dont S est muni. Désignons maintenant par \mathcal{G} la classe des sous-ensembles A de S , tels que pour tout $\epsilon > 0$, il existe K et U avec les propriétés désirées. On vient de voir que \mathcal{G} contient le π -système \mathcal{K} qui est formé par tous les sous-ensembles fermés de S . Ainsi, compte tenu du Lemme 1.21, pour établir que $\mathcal{B}(S) = \sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{G}$, il suffit de prouver que \mathcal{G} est un système de Dynkin; montrons que c'est bien le cas. Il est clair que \mathcal{G} vérifie les conditions (i) et (ii) (voir la Définition 1.16) montrons que \mathcal{G} vérifie aussi la condition (iii) (voir la Définition 1.16). Supposons que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de sous-ensembles appartenant à \mathcal{G} et qui sont deux à deux disjoints, prouvons que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{G}$. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ouvert U_n et un fermé K_n tels que $K_n \subset A_n \subset U_n$ et $P(U_n) - P(K_n) < 2^{-n-1}\epsilon$; de plus, il résulte du Théorème de la convergence dominée, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que $P\left(\left[\bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} U_n\right] \setminus \left[\bigcup_{n=1}^{n_0} U_n\right]\right) < 2^{-1}\epsilon$. Posons alors, $K_0 = \bigcup_{n=1}^{n_0} K_n$ et $U_0 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n$; clairement, $K_0 \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset U_0$, de plus,

$$\begin{aligned} P(U_0) - P(K_0) &= P\left(\left[\bigcup_{n=n_0+1}^{+\infty} U_n\right] \setminus \left[\bigcup_{n=1}^{n_0} U_n\right]\right) + P\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} U_n\right) - P(K_0) \\ &\leq 2^{-1}\epsilon + \left(\sum_{n=1}^{n_0} P(U_n)\right) - P(K_0) \\ &= 2^{-1}\epsilon + \sum_{n=1}^{n_0} (P(U_n) - P(K_n)) \\ &< 2^{-1}\epsilon + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-1}\epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.8. Soit $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite arbitraire de cylindres. Lorsque T est un ensemble infini, on peut toujours construire $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels tous strictement positifs (i.e. $k_0 \geq 1$), et $(t_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments distincts de T , vérifiant pour tout $i \in \mathbb{N}$, $D_i \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_i}}$

PREUVE DU LEMME 2.8. Au moyen d'un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, nous allons montrer qu'il existe $n + 1$ entiers naturels k_0, \dots, k_n vérifiant $0 < k_0 < \dots < k_n$ et il existe k_n éléments distincts de T , t_1, \dots, t_{k_n} , tels que :

$$\text{pour tout } i \in \{0, \dots, n\}, D_i \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_i}}. \quad (\mathcal{P}_n)$$

Montrons d'abord que (\mathcal{P}_0) est vraie, comme D_0 est un cylindre il existe $k'_0 \in \mathbb{N}^*$ et $s_{0,1}, \dots, s_{0,k'_0} \in T$ tels que $D_0 \in \mathcal{B}_{s_{0,1}, \dots, s_{0,k'_0}}$ i.e. il existe $A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k'_0})$ tel que $D_0 = \pi_{s_{0,1}, \dots, s_{0,k'_0}}^{-1}(A')$. Soit $k_0 \in \{1, \dots, k'_0\}$ et t_1, \dots, t_{k_0} des éléments distincts de $\{s_{0,1}, \dots, s_{0,k'_0}\}$, tels que $\{t_1, \dots, t_{k_0}\} = \{s_{0,1}, \dots, s_{0,k'_0}\}$, montrons que $D_0 \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_0}}$ i.e. il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_0})$ tel que $D_0 = \pi_{t_1, \dots, t_{k_0}}^{-1}(A)$. Il est clair que cela est vrai quand $k_0 = k'_0$ (en effet les $s_{0,1}, \dots, s_{0,k'_0}$ sont alors distincts, ainsi on peut prendre $t_1 = s_{0,1}, \dots, t_{k_0} = s_{0,k_0}$ et $A = A'$), montrons que cela l'est aussi lorsque $k_0 < k'_0$. Afin de simplifier nos notations nous allons supposer que $k_0 = k'_0 - 1$, que $s_{0,1}, \dots, s_{0,k'_0-1}$ sont distincts, et que $s_{0,1} = s_{0,k'_0}$ (dans le cas général, la preuve se fait selon le même principe); il est donc naturel de prendre $t_1 = s_{0,1}, \dots, t_{k_0} = s_{0,k_0}$. Désignons alors par $\mathcal{I} : (\mathbb{R}^{k_0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_0})) \rightarrow (\mathbb{R}^{k_0+1}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_0+1}))$ l'application linéaire injective et continue (donc mesurable), définie par $\mathcal{I}(x_1, \dots, x_{k_0}) = (x_1, \dots, x_{k_0}, x_1)$, pour tous $(x_1, \dots, x_{k_0}) \in \mathbb{R}^{k_0}$; en posant $A = \mathcal{I}^{-1}(A')$, l'on a que $D_0 = \pi_{t_1, \dots, t_{k_0}}^{-1}(A)$.

Supposons maintenant que (\mathcal{P}_n) est vraie pour un entier naturel arbitraire n , et montrons que cela implique que (\mathcal{P}_{n+1}) est vraie également. Etant donné que D_{n+1} est un cylindre, il existe $k'_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et $s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}} \in T$ tels que $D_{n+1} \in \mathcal{B}_{s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}}$; deux cas peuvent alors se présenter : $\{s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}\} \subset \{t_1, \dots, t_{k_n}\}$ et le cas contraire. Dans le premier cas, on prend $k_{n+1} = k_n + 1$ et $t_{k_{n+1}}$ un élément arbitraire de $T \setminus \{t_1, \dots, t_{k_n}\}$, on a bien $D_{n+1} \in \mathcal{B}_{s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}} \subset \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_n}} \subset \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_{n+1}}}$. Plaçons nous maintenant dans le second cas et désignons par t'_1, \dots, t'_q , des éléments distincts de $\{s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}\} \setminus \{t_1, \dots, t_{k_n}\}$, tels que $\{t'_1, \dots, t'_q\} = \{s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}\} \setminus \{t_1, \dots, t_{k_n}\}$, on prend alors $k_{n+1} = k_n + q$, et $t_{k_{n+1}} = t'_1, \dots, t_{k_n+q} = t'_q$; ensuite, en utilisant le fait que $D_{n+1} \in \mathcal{B}_{s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}} \subset \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_n}, s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}}$ et un raisonnement analogue à celui qui a permis d'établir (\mathcal{P}_0) , on peut prouver que $D_{n+1} \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_{n+1}}}$ (plus précisément que $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_{n+1}}} = \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_n}, s_{n+1,1}, \dots, s_{n+1,k'_{n+1}}}$). \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le Théorème 2.2.

PREUVE DU THÉORÈME 2.2. Rappelons que les cylindres forment une algèbre de \mathbb{R}^T qu'on désigne par \mathcal{B}^0 . Pour tout $B \in \mathcal{B}^0$, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_k \in T$ tels que $B \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$; posons,

$$m(B) = P_{t_1, \dots, t_k}(B). \quad (2.1)$$

Grâce aux conditions de consistance, cette définition de $m(B)$ a un sens, même si B appartient à la fois à $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$ et $\mathcal{B}_{s_1, \dots, s_{k'}}$; en effet, dans ce cas, l'on a $P_{t_1, \dots, t_k}(B) = P_{s_1, \dots, s_{k'}}(B)$. On souhaite appliquer le Théorème 2.5 (le Théorème d'extension de Carathéodory), pour prolonger m , en une unique mesure de probabilité sur la σ -algèbre $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}^0)$; pour ce faire, il faut prouver que m est une fonction σ -additive sur \mathcal{B}^0 , d'après le Lemme 2.6, cela revient à montrer que m est une fonction, à la fois, additive et sous- σ -additive sur cette algèbre.

Montrons d'abord l'additivité de m . Désignons par B_0, B_1, \dots, B_n , $n + 1$ cylindres tels que B_1, \dots, B_n soient deux à deux disjoints et $B_0 = \bigcup_{i=1}^n B_i$; grâce au Lemme 2.8, l'on a que ces $n + 1$ cylindres appartiennent à une même σ -algèbre $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$; ainsi en utilisant (2.1) et la propriété d'additivité

2 Théorème de consistance de Kolmogorov

de P_{t_1, \dots, t_k} , on obtient,

$$m(B_0) = P_{t_1, \dots, t_k}(B_0) = \sum_{i=1}^n P_{t_1, \dots, t_k}(B_i) = \sum_{i=1}^n m(B_i).$$

Montrons maintenant la sous- σ -additivité de m ; ceci est la partie difficile de la preuve du Théorème 2.2. Il faut prouver que pour tout cylindre B_0 et pour toute suite $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de cylindres deux à deux disjoints, vérifiant $B_0 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$, l'on a $m(B_0) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(B_i)$. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde; supposons que m n'est pas sous- σ -additive sur \mathcal{B}^0 , c'est-à-dire qu'il existe un cylindre B_0 et $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de cylindres deux à deux disjoints, tels que,

$$B_0 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i \text{ et } m(B_0) = \epsilon + \sum_{i=1}^{+\infty} m(B_i), \quad (2.2)$$

où ϵ est un certain réel strictement positif. Nous notons par $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite de cylindres définie par $D_0 = B_0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$D_j = B_0 \setminus \bigcup_{i=1}^j B_i. \quad (2.3)$$

Il est clair que $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, de plus, (2.2) et le fait que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $m(\bigcup_{i=1}^j B_i) = \sum_{i=1}^j m(B_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(B_i)$, entraînent que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$m(D_j) \geq \epsilon. \quad (2.4)$$

Grâce au Lemme 2.8, on sait que l'on peut construire $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels tous strictement positifs, et $(t_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments distincts de T , vérifiant la propriété suivant : pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i})$ tel que

$$D_i = \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in A_i\}. \quad (2.5)$$

Par ailleurs, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on peut définir sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i})$, une mesure de probabilité $P'_{t_1, \dots, t_{k_i}}$, par,

$$P'_{t_1, \dots, t_{k_i}}(A) = P_{t_1, \dots, t_{k_i}}(\{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in A\}), \quad (2.6)$$

pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_i})$. D'après le Lemme 2.7, cette mesure est régulière; ainsi, il existe C_i un compact de \mathbb{R}^{k_i} , tel que,

$$C_i \subset A_i \text{ et } P'_{t_1, \dots, t_{k_i}}(A_i \setminus C_i) < 2^{-i-1}\epsilon. \quad (2.7)$$

Désignons par $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$, la suite de cylindres, décroissante au sens de l'inclusion, définie pour tout $j \in \mathbb{N}$ par,

$$K_j = \bigcap_{i=0}^j \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in C_i\}; \quad (2.8)$$

l'inclusion $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_i}} \subset \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_j}}$ pour tout $i \in \{0, \dots, j\}$, implique que $K_j \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_{k_j}}$, ainsi il existe $L_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k_j})$, tel que,

$$K_j = \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_j})) \in L_j\}. \quad (2.9)$$

De plus, il résulte de l'inclusion $D_j \subset D_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, j\}$, de la propriété d'additivité de m , de (2.5), de (2.1), de (2.6) et de (2.7), que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 m(D_j \setminus K_j) &= m\left(\bigcup_{i=0}^j \left[D_j \setminus \{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in C_i \} \right]\right) \\
 &\leq m\left(\bigcup_{i=0}^j \left[D_i \setminus \{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in C_i \} \right]\right) \\
 &\leq \sum_{i=0}^j m\left(D_i \setminus \{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in C_i \}\right) \\
 &= \sum_{i=0}^j P_{t_1, \dots, t_{k_i}}\left(\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in A_i \setminus C_i \}\right) \\
 &= \sum_{i=0}^j P'_{t_1, \dots, t_{k_i}}(A_i \setminus C_i) < \sum_{i=0}^j 2^{-i-1} \epsilon < \epsilon.
 \end{aligned}$$

Ainsi (2.4) et la propriété d'additivité de m , impliquent que $m(K_j) > 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$; on a par conséquent $K_j \neq \emptyset_{\mathbb{R}^T}$ ce qui revient à dire (voir (2.9)) que $L_j \neq \emptyset_{\mathbb{R}^{k_j}}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, désignons par $y^j = (y_1^j, \dots, y_{k_j}^j)$ un vecteur arbitraire de L_j , ce vecteur est choisi une fois pour toute. Fixons, $m \in \mathbb{N}$, on a $k_j \geq k_m \geq m$ pour tout entier $j \geq m$; ainsi quand $j \geq m$, tout vecteur y^j possède une m -ième coordonnée y_m^j ; avec la convention que $y_m^j = y_1^j$ lorsque $m = 0$ (notons que l'on a aussi $y_m^j = y_1^j$ dans le cas où $m = 1$). Pour tout $j \geq m$, désignons par $\tilde{\omega}^j$, l'élément de \mathbb{R}^T , défini pour tout $s \in T$, par

$$\tilde{\omega}^j(s) = \begin{cases} 0, & \text{lorsque } s \in T \setminus \{t_1, \dots, t_{k_j}\} \\ y_l^j, & \text{lorsqu'il existe } l \in \{1, \dots, k_j\}, \text{ tel que } s = t_l \text{ (un tel } l \text{ est unique car les } t_l \text{ sont distincts)}. \end{cases}$$

On a $\tilde{\omega}^j \in K_j$, puisque $(\tilde{\omega}^j(t_1), \dots, \tilde{\omega}^j(t_{k_j})) = (y_1^j, \dots, y_{k_j}^j) \in L_j$; ainsi (2.8) implique que,

$$(\tilde{\omega}^j(t_1), \dots, \tilde{\omega}^j(t_m), \dots, \tilde{\omega}^j(t_{k_m})) = (y_1^j, \dots, y_m^j, \dots, y_{k_m}^j) \in C_m; \quad (2.10)$$

avec la convention que $\tilde{\omega}^j(t_m) = \tilde{\omega}^j(t_1)$ lorsque $m = 0$. Etant donné que C_m est un compact de \mathbb{R}^{k_m} qui ne dépend pas de j , il résulte de (2.10) que la norme euclidienne, dans \mathbb{R}^{k_m} , du vecteur $(y_1^j, \dots, y_m^j, \dots, y_{k_m}^j)$ est bornée indépendamment de j ; par conséquent, la suite numérique $(y_m^j)_{j \geq m}$ est bornée (par une constante finie qui dépend a priori de m , mais ne dépend pas de j). Ainsi, il existe une sous-suite $(y_m^{j_q})_{q \in \mathbb{N}}$ et il existe $y_m \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{q \rightarrow +\infty} y_m^{j_q} = y_m$. A cause de (2.10) et de la compacité de C_m , la suite $(y_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$, vérifie,

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{N}, (y_1, \dots, y_{k_m}) \in C_m. \quad (2.11)$$

Désignons enfin par $\tilde{\omega}^\infty$, l'élément de \mathbb{R}^T , défini pour tout $s \in T$, par

$$\tilde{\omega}^\infty(s) = \begin{cases} 0, & \text{lorsque } s \in T \setminus \{t_l : l \in \mathbb{N}^*\} \\ y_l, & \text{lorsqu'il existe } l \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } s = t_l \text{ (un tel } l \text{ est unique car les } t_l \text{ sont distincts)}. \end{cases}$$

3 Construction de processus classiques au moyen du Théorème de consistance

Il résulte de (2.8), (2.11), (2.7), (2.5) et (2.3), que

$$\tilde{\omega}^\infty \in \bigcap_{j=0}^{+\infty} K_j = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_{k_i})) \in C_i\} \subset \bigcap_{i=0}^{+\infty} D_i = B_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i,$$

ce qui contredit l'hypothèse $B_0 = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$. \square

3. Construction de processus classiques au moyen du Théorème de consistance

3.1. Famille de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Théorème 3.1. *Soit \mathbb{P} une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors, pour tout ensemble non vide T , il existe une unique mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ sur $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$, telle que $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$ le processus canonique (voir (1.1)) défini sur l'espace de probabilité $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}, \tilde{\mathbb{P}})$ vérifie la propriété suivante : pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_k \in T$ distincts, les variables aléatoires $\tilde{X}_{t_1}, \dots, \tilde{X}_{t_k}$ sont mutuellement indépendantes et de même loi \mathbb{P} .*

La remarque suivante résulte du Théorème 2.5 (le Théorème d'extension de Carathéodory).

Remarque 3.2. *Soit \mathbb{P} une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, notée par $\mathbb{P}^{\otimes n}$ (avec la convention que $\mathbb{P}^{\otimes 1} = \mathbb{P}$), et vérifiant la propriété suivante :*

$$\text{pour tous } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbb{P}^{\otimes n}(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{l=1}^n \mathbb{P}(A_l). \quad (3.1)$$

On a par conséquent,

$$\text{pour tous, } n', n'' \in \mathbb{N}^*, D' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n'}) \text{ et } D'' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n''}), \quad \mathbb{P}^{\otimes n'+n''}(D' \times D'') = \mathbb{P}^{\otimes n'}(D') \mathbb{P}^{\otimes n''}(D''). \quad (3.2)$$

PREUVE DU THÉORÈME 3.1. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_k \in T$ distincts, désignons par P_{t_1, \dots, t_k} la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$ définie pour tout $B \in \mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$, par,

$$P_{t_1, \dots, t_k}(B) = \mathbb{P}^{\otimes k}(D), \quad (3.3)$$

où $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ est tel que, $B = \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in D\}$. Ces mesures de probabilité vérifient les conditions de consistance. Plus précisément, la condition (a) est satisfaite car le Théorème de Fubini permet de montrer que : pour toute permutation π de $\{1, \dots, k\}$ et pour tout $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, on a, $\mathbb{P}^{\otimes k}(D) = \mathbb{P}^{\otimes k}(D_\pi)$, où, par définition, $D_\pi = \{(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) : (x_1, \dots, x_k) \in D\}$. La condition (b) est vérifiée car, (3.2) et le fait que $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$, impliquent que pour tout $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, on a $\mathbb{P}^{\otimes k+1}(D \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}^{\otimes k}(D) \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^{\otimes k}(D)$.

Ainsi, grâce au Théorème 2.2 (le Théorème de consistance de Kolmogorov), il existe $\tilde{\mathbb{P}}$ une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$, dont la restriction à chacune des σ -algèbres $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_k \in T$ distincts, coïncide avec P_{t_1, \dots, t_k} . Il résulte alors de (3.3), que $\mathbb{P}^{\otimes k}$ est la loi de probabilité du vecteur aléatoire $(\tilde{X}_{t_1}, \dots, \tilde{X}_{t_k})$, ce qui prouve que les coordonnées de ce vecteur sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi \mathbb{P} . \square

3.2. Chaîne de Markov. Les chaînes de Markov servent à modéliser des systèmes aléatoires dont l'évolution future ne dépend pas du passé mais uniquement du présent.

Définition 3.3. *Une suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, est appelée une chaîne de Markov si elle vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'une des quatre conditions suivantes (i), (ii), (iii) et (iv), qui sont en fait équivalentes.*

(i) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a, presque sûrement,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_{n+1} \in A\}} | X_0, \dots, X_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X_{n+1} \in A\}} | X_n).$$

(ii) Pour tout $C \in \sigma(X_m : m \geq n)$, on a, presque sûrement,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_C | X_0, \dots, X_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_C | X_n).$$

(iii) Pour toute variable aléatoire Y définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) , $\sigma(X_m : m \geq n)$ -mesurable et bornée, on a, presque sûrement,

$$\mathbb{E}(Y | X_0, \dots, X_n) = \mathbb{E}(Y | X_n).$$

(iv) Les σ -algèbres $\sigma(X_m : m \geq n)$ et $\sigma(X_k : k \leq n)$ sont conditionnellement indépendantes sachant X_n ; ce qui signifie que pour toutes variables aléatoires bornées Y et Z définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) , respectivement $\sigma(X_m : m \geq n)$ et $\sigma(X_k : k \leq n)$ mesurables, on a presque sûrement,

$$\mathbb{E}(YZ | X_n) = \mathbb{E}(Y | X_n) \mathbb{E}(Z | X_n).$$

Pour construire des suites de variables aléatoires de ce type, nous avons besoin de la notion de *noyau markovien*; grossièrement parlant un tel noyau est une famille de mesures de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui sont indexées *mesurablement* par \mathbb{R}^d , où d désigne un entier naturel strictement positif; plus précisément :

Définition 3.4. On appelle *noyau markovien de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$* , une application $N : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$, $(x, A) \mapsto N(x, A)$ vérifiant les deux conditions suivantes (a) et (b).

(a) Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fixé, l'application $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$, $x \mapsto N(x, A)$ est mesurable.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, l'application $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$, $A \mapsto N(x, A)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

En fait, on peut voir un noyau markovien comme la version régulière de la loi conditionnelle d'une variable aléatoire réelle sachant une autre variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , plus précisément :

Théorème 3.5. Soient X et Y respectivement une variable aléatoire réelle et une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d . Il existe un noyau markovien de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tel que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, on a, presque sûrement,

$$\mathbb{E}(\varphi(X) | Y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) N(Y, dx).$$

Un procédé classique permettant de construire des noyaux markoviens, est décrit dans la proposition suivante :

Proposition 3.6. Soit $\psi : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable et soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on a,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) d\mu(y) = 1;$$

alors l'application $N : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$,

$$(x, A) \mapsto N(x, A) = \int_A \psi(x, y) d\mu(y),$$

est un noyau markovien de $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Grâce au théorème suivant, on peut construire des chaînes de Markov à valeurs réelles.

3 Construction de processus classiques au moyen du Théorème de consistance

Théorème 3.7. *Soit N un noyau markovien de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et soit μ_0 une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors, il existe $\tilde{\mathbb{P}}$ une unique mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, telle que le processus canonique $\{\tilde{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, défini sur l'espace de probabilité $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \tilde{\mathbb{P}})$, soit une chaîne de Markov vérifiant les deux propriétés suivantes (i) et (ii).*

(a) μ_0 est la loi de probabilité de \tilde{X}_0 .

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\tilde{\mathbb{P}}$ presque sûrement,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbf{1}_{\{\tilde{X}_{n+1} \in A\}} | \tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_n) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbf{1}_{\{\tilde{X}_{n+1} \in A\}} | \tilde{X}_n) = \int_A N(\tilde{X}_n, dx_{n+1}).$$

PREUVE DU THÉORÈME 3.7. Considérons les mesures de probabilité P'_n , $n \in \mathbb{N}$ définies par récurrence, respectivement sur les σ -algèbres $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, de la façon suivante : $P'_0 = \mu_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P'_n est l'unique mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, vérifiant pour tout $(D, A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P'_n(D \times A) = \int_D \left(\int_A N(x_{n-1}, dx_n) \right) P'_{n-1}(dx_0 \dots dx_{n-1}); \quad (3.4)$$

l'existence et l'unicité d'une telle mesure de probabilité est donnée par le Théorème 2.5 (le Théorème d'extension de Carathéodory) ; rappelons que les ensembles du type $D \times A$, où $(D, A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, constituent une semi-algèbre qui engendre la σ -algèbre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Désignons maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par P_n , la mesure de probabilité définie sur la σ -algèbre cylindrique $\mathcal{B}_{0, \dots, n}$, pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+1})$, par

$$P_n \left(\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\tilde{\omega}(0), \dots, \tilde{\omega}(n)) \in C \} \right) = P'_n(C). \quad (3.5)$$

Montrons que les mesures de probabilités P_n , $n \in \mathbb{N}$, vérifient les conditions de consistance. Le fait que les $n+1$ entiers $0, \dots, n$ peuvent être numérotés, de manière tout à fait naturelle (en commençant par 0 et en finissant par n), d'une façon unique, nous permet de nous affranchir de la vérification de la condition (a). Par ailleurs, étant donné que pour tout $x_{n-1} \in \mathbb{R}$ fixé, $N(x_{n-1}, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, l'on a,

$$\int_{\mathbb{R}} N(x_{n-1}, dx_n) = N(x_{n-1}, \mathbb{R}) = 1;$$

ainsi, il résulte de (3.5) et (3.4), que tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} P_n \left(\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\tilde{\omega}(0), \dots, \tilde{\omega}(n-1), \tilde{\omega}(n)) \in D \times \mathbb{R} \} \right) &= P'_n(D \times \mathbb{R}) \\ &= \int_D \left(\int_{\mathbb{R}} N(x_{n-1}, dx_n) \right) P'_{n-1}(dx_0 \dots dx_{n-1}) = \int_D P'_{n-1}(dx_0 \dots dx_{n-1}) \\ &= P'_{n-1}(D) = P_{n-1} \left(\{ \tilde{\omega} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\tilde{\omega}(0), \dots, \tilde{\omega}(n-1)) \in D \} \right), \end{aligned}$$

ce qui montre que la condition de consistance (b) est satisfaite. On peut donc utiliser le Théorème 2.2 (le Théorème de consistance) qui donne l'existence d'une unique mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$, dont la restriction à chacune des σ -algèbres $\mathcal{B}_{0, \dots, n}$, $n \in \mathbb{N}$, coïncide avec P_n . Ainsi, il résulte de (3.5), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P'_n est la loi de probabilité du vecteur aléatoire $(\tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_n)$. Ensuite, il découle de la définition de P'_n , que μ_0 est la loi de \tilde{X}_0 et, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, que la loi conditionnelle de \tilde{X}_n sachant $\tilde{X}_0 = x_0, \dots, \tilde{X}_{n-1} = x_{n-1}$ est $N(x_{n-1}, \cdot)$; ainsi, cette loi, ne dépend en fait que de x_{n-1} . On a donc, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\tilde{\mathbb{P}}$ presque sûrement,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbf{1}_{\{\tilde{X}_n \in A\}} | \tilde{X}_0, \dots, \tilde{X}_{n-1}) = \int_A N(\tilde{X}_{n-1}, dx_n) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(\mathbf{1}_{\{\tilde{X}_n \in A\}} | \tilde{X}_{n-1}).$$

□

3.3. Processus gaussien.

Définition 3.8. Soit un processus stochastique $\{X_t\}_{t \in T}$ à valeurs réelles. On dit que ce processus est gaussien si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1, \dots, t_k \in T$, le vecteur⁸ aléatoire $Y_{t_1, \dots, t_k} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})^*$ est gaussien i.e. pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire réelle $\sum_{l=1}^k \lambda_l X_{t_l}$ est gaussienne⁹.

Lorsque Y_{t_1, \dots, t_k} est un vecteur aléatoire gaussien, alors sa loi de probabilité est complètement déterminée par ses "moments" des deux premiers ordres ; plus précisément, par le vecteur,

$$M(t_1, \dots, t_k) = (m(t_1), \dots, m(t_k))^* = (\mathbb{E}(X_{t_1}), \dots, \mathbb{E}(X_{t_k}))^*,$$

appelé *espérance* (ou encore *moyenne*) de Y_{t_1, \dots, t_k} , et par la matrice carrée symétrique et semi-définie positive¹⁰,

$$\sum(t_1, \dots, t_k) = (s(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq k} = (\text{cov}(X_{t_i}, X_{t_j}))_{1 \leq i, j \leq k},$$

appelée *matrice de variances-covariances* de Y_{t_1, \dots, t_k} . Plus, précisément la fonction caractéristique¹¹ $\Phi_{Y_{t_1, \dots, t_k}}$, de Y_{t_1, \dots, t_k} , est donnée pour tout $u \in \mathbb{R}^k$ (u est identifié à une matrice colonne), par,

$$\Phi_{Y_{t_1, \dots, t_k}}(u) = \exp(i \langle u, M(t_1, \dots, t_k) \rangle) \exp\left(-\frac{1}{2} u^* \sum(t_1, \dots, t_k) u\right).$$

Il est important de noter que : $\det(\sum(t_1, \dots, t_k)) = 0$ si et seulement si au moins l'une des variables aléatoires qui sont les coordonnées de Y_{t_1, \dots, t_k} , s'exprime comme une combinaison linéaire d'autres coordonnées de ce vecteur. Signalons aussi que Y_{t_1, \dots, t_k} n'admet de densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^k , que si, $\det(\sum(t_1, \dots, t_k)) \neq 0$, cette densité est alors donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, (x est identifié à une matrice colonne), par,

$$\left(\det(\sum(t_1, \dots, t_k))\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - M(t_1, \dots, t_k))^* \sum(t_1, \dots, t_k)^{-1}(x - M(t_1, \dots, t_k))\right).$$

Exercice 3.1. Considérons un vecteur aléatoire dont les coordonnées sont des variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes ; montrer que ce vecteur aléatoire est gaussien. Au moyen, d'un contre-exemple, montrer que ce n'est pas forcément le cas, lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'indépendance des coordonnées.

Remarque 3.9. Il résulte de ce qui précède, qu'à tout processus gaussien $\{X_t\}_{t \in T}$ à valeurs réelles, on peut associer les applications $m : T \rightarrow \mathbb{R}$ et $s : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ (définies dans ce qui suit), qui déterminent complètement la loi de probabilité de ce processus ;

- l'application m est appelée fonction de moyenne, parce qu'elle est définie pour tout $t \in T$, par $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$;
- l'application s est appelée fonction de covariance, parce qu'elle est définie pour tout $(t', t'') \in T \times T$, par $s(t', t'') = \text{cov}(X_{t'}, X_{t''})$.

Notons que l'application s vérifie l'importante propriété suivante désignée par (SSDP) : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1, \dots, t_k \in T$, la matrice carrée $(s(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ est symétrique et semi-définie positive.

8. Pour des raisons de commodité on considère toujours que Y_{t_1, \dots, t_k} est un vecteur (ou matrice) colonne ; ici le symbole "*" signifie transposition.

9. Par convention, une variable aléatoire réelle constante presque sûrement, est considérée comme faisant partie des variables aléatoires gaussiennes (autrement dit les mesures de Dirac font partie des lois gaussiennes).

10. De façon générale, on dit qu'une matrice carrée symétrique à coefficients réels, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$, est semi-définie positive, lorsque pour tout $u = (u_1, \dots, u_k)^* \in \mathbb{R}^k$, on a $u^* A u = \sum_{1 \leq i, j \leq k} a_{ij} u_i u_j \geq 0$. Si A vérifie de plus, pour tout $u \in \mathbb{R}^k$, $u^* A u = 0_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $u = 0_{\mathbb{R}^k}$; alors on dit que A est définie positive.

11. De façon générale, Φ_Y la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire Y à valeurs dans \mathbb{R}^k , est définie pour tout $u \in \mathbb{R}^k$, par $\Phi_Y(u) = \mathbb{E}(e^{i \langle u, Y \rangle})$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^k ; la loi de probabilité de Y est complètement déterminée par la fonction Φ_Y .

3 Construction de processus classiques au moyen du Théorème de consistance

Le théorème suivant donne une réciproque de la Remarque 3.9.

Théorème 3.10. *Soit $m : T \rightarrow \mathbb{R}$ une application arbitraire, et soit $s : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ une application arbitraire mais vérifiant toutefois la propriété (SSDP). Alors, il existe une unique mesure de probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B})$ telle que le processus canonique $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$ défini sur l'espace de probabilité $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}, \tilde{\mathbb{P}})$ soit un processus gaussien de fonction de moyenne m et de fonction de covariance s .*

PREUVE DU THÉORÈME 3.10. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $t_1, \dots, t_k \in T$, on peut définir une mesure de probabilité P_{t_1, \dots, t_k} sur la σ -algèbre $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$, par,

$$P_{t_1, \dots, t_k}(C) = P'_{t_1, \dots, t_k}(A),$$

où $C = \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k)) \in A\}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ étant arbitraire, et où P'_{t_1, \dots, t_k} est la loi de probabilité d'un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^k , d'espérance $(m(t_1), \dots, m(t_k))^*$ et de matrice de variances-covariances $(s(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq k}$. Montrons que les mesures de probabilité P_{t_1, \dots, t_k} vérifient les conditions de consistance. Par la suite, nous supposons que $k \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_k, t_{k+1} \in T$ sont arbitraires et fixés. Désignons par $Z^{(k+1)} = (Z_1, \dots, Z_k, Z_{k+1})^*$ un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^{k+1} , de moyenne $(m(t_1), \dots, m(t_k), m(t_{k+1}))^*$ et de matrice de variances-covariances $(s(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq k+1}$; on suppose que ce vecteur gaussien est défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, p) . $Z^{(k)}$ désigne le vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^k , $Z^{(k)} = (Z_1, \dots, Z_k)^*$. Clairement, sa moyenne est $(m(t_1), \dots, m(t_k))^*$ et sa matrice de variances-covariances est $(s(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq k}$; ainsi, on a,

$$P_{t_1, \dots, t_k}(C) = p(\{\omega \in \Omega : Z^{(k)}(\omega) \in A\}). \quad (3.6)$$

Commençons d'abord par établir que la condition de consistance (a) est satisfaite. Soit π une permutation arbitraire de $\{1, \dots, k\}$, lorsqu'on considère la σ -algèbre $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k}$ comme $\mathcal{B}_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}}$, on doit alors exprimer C sous la forme $C = \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_{\pi(1)}), \dots, \tilde{\omega}(t_{\pi(k)})) \in A_\pi\}$, où A_π est l'ensemble borélien de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ défini par $A_\pi = \{(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) : (x_1, \dots, x_k) \in A\}$. Ainsi,

$$P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}}(C) = P'_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}}(A_\pi),$$

où $P'_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}}$ est la loi de probabilité d'un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^k , d'espérance $(m(t_{\pi(1)}), \dots, m(t_{\pi(k)}))^*$ et de matrice de variances-covariances $(s(t_{\pi(i)}, t_{\pi(j)}))_{1 \leq i, j \leq k}$. Un tel vecteur gaussien est $Z_\pi^{(k)} = (Z_{\pi(1)}, \dots, Z_{\pi(k)})^*$; on a donc

$$P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}}(C) = p(\{\omega \in \Omega : Z_\pi^{(k)}(\omega) \in A_\pi\}). \quad (3.7)$$

Il résulte de (3.6), de (3.7) et de l'égalité ensembliste $\{\omega \in \Omega : Z^{(k)}(\omega) \in A\} = \{\omega \in \Omega : Z_\pi^{(k)}(\omega) \in A_\pi\}$, que $P_{t_1, \dots, t_k}(C) = P_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}}(C)$.

Montrons maintenant que la condition de consistance (b) est satisfaite. Lorsqu'on regarde C , comme un élément de la σ -algèbre $\mathcal{B}_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}$, il faut l'exprimer sous la forme $C = \{\tilde{\omega} \in \mathbb{R}^T : (\tilde{\omega}(t_1), \dots, \tilde{\omega}(t_k), \tilde{\omega}(t_{k+1})) \in A \times \mathbb{R}\}$. Ainsi,

$$P_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}(C) = P'_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}(A \times \mathbb{R}),$$

où $P'_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}$ est la loi de probabilité d'un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^{k+1} , d'espérance $(m(t_1), \dots, m(t_k), m(t_{k+1}))^*$ et de matrice de variances-covariances $(s(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq k+1}$. En fait, un tel vecteur gaussien est $Z^{(k+1)} = (Z_1, \dots, Z_k, Z_{k+1})^*$, qu'on a introduit plus haut; on a donc

$$P_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}(C) = p(\{\omega \in \Omega : Z^{(k+1)}(\omega) \in A \times \mathbb{R}\}). \quad (3.8)$$

Finalement, il résulte de (3.6), (3.8), et des égalités ensemblistes $\{\omega \in \Omega : Z^{(k+1)}(\omega) \in A \times \mathbb{R}\} = \{\omega \in \Omega : Z^{(k)}(\omega) \in A \text{ et } Z_{k+1}(\omega) \in \mathbb{R}\} = \{\omega \in \Omega : Z^{(k)}(\omega) \in A\}$, que $P_{t_1, \dots, t_k}(C) = P_{t_1, \dots, t_k, t_{k+1}}(C)$. \square

La résultat suivant est une importante conséquence Théorème 3.10.

Corollaire 3.11. *Désignons par $L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs réelles de carré intégrable sur un espace mesuré arbitraire (A, \mathcal{A}, μ) . Rappelons que $L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ est muni du produit scalaire, noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(A, \mathcal{A}, \mu)}$, et défini pour tous $g, h \in L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ par,*

$$\langle g, h \rangle_{L^2(A, \mathcal{A}, \mu)} = \int_A g(s)h(s) d\mu(s).$$

Soit $(f_t)_{t \in T}$ une famille de fonctions appartenant à $L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$. Alors il existe un processus gaussien indexé par T et à valeurs réelles, dont la fonction de covariance est l'application de $T \times T$ dans \mathbb{R} :

$$(t', t'') \mapsto \langle f_{t'}, f_{t''} \rangle_{L^2(A, \mathcal{A}, \mu)} = \int_A f_{t'}(s)f_{t''}(s) d\mu(s);$$

la fonction de moyenne de ce processus peut être choisie arbitrairement.

PREUVE DU COROLLAIRE 3.11. Il suffit de montrer que l'application $T \times T \rightarrow \mathbb{R}$, $(t', t'') \mapsto \langle f_{t'}, f_{t''} \rangle_{L^2(A, \mathcal{A}, \mu)}$ vérifie la propriété (SSDP). C'est bien le cas, en effet, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$ et $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$, on a grâce à la bilinéarité et à la positivité du produit scalaire,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq k} u_i u_j \langle f_{t_i}, f_{t_j} \rangle_{L^2(A, \mathcal{A}, \mu)} = \left\langle \sum_{i=1}^k u_i f_{t_i}, \sum_{j=1}^k u_j f_{t_j} \right\rangle_{L^2(A, \mathcal{A}, \mu)} = \left\| \sum_{l=1}^k u_l f_{t_l} \right\|_{L^2(A, \mathcal{A}, \mu)}^2 \geq 0.$$

\square

Définition 3.12 (mouvement brownien/processus de Wiener). *On dit qu'un processus gaussien indexé par \mathbb{R}_+ et à valeurs réelles, est un mouvement brownien ou encore un processus de Wiener, lorsqu'il est centré (i.e. sa fonction de moyenne est identiquement nulle), et sa fonction de covariance vaut $c \min(t', t'')$, en tout $(t', t'') \in \mathbb{R}_+^2$, où c désigne une constante strictement positive ne dépendant pas de (t', t'') . D'habitude, un tel processus est noté par $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ (une autre notation classique est $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$); clairement on a $c = \text{Var}(B_1)$, puisque*

$$\text{cov}(B_{t'}, B_{t''}) = c \min(t', t''), \quad \text{pour tout } (t', t'') \in \mathbb{R}_+^2. \quad (3.9)$$

Signalons enfin que lorsque $\text{Var}(B_1) = 1$ alors le mouvement brownien $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est dit standard.

Remarque 3.13. *L'existence du mouvement brownien résulte du Corollaire 3.11, où l'on suppose que $L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace de Lebesgue habituel $L^2(\mathbb{R}_+)$ et $f_t(s) = c^{1/2} \mathbf{1}_{[0, t]}(s)$ pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$, où $\mathbf{1}_{[0, t]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, t]$ de \mathbb{R}_+ .*

La proposition suivante peut "assez facilement" être établie au moyen de (3.9); sa preuve est donc laissée en exercice.

Proposition 3.14 (quelques propriétés fondamentales du mouvement brownien).

- (a) *Le mouvement brownien part toujours de zéro : on a presque sûrement $B_0 = 0$.*
- (b) *Les accroissements du mouvement brownien sur des intervalles disjoints (complètement ou à un point près) sont indépendants : pour tout entier $k \geq 2$, et tous $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k$, les variables aléatoires (gaussiennes centrées)*

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

sont mutuellement indépendantes.

- (c) *Pour tout $(t', t'') \in \mathbb{R}_+^2$, on a $\mathbb{E}(|B_{t'} - B_{t''}|^2) = c|t' - t''|$.*

3 Construction de processus classiques au moyen du Théorème de consistance

- (d) Les accroissements du mouvement brownien sont stationnaires : pour tout $(s', s'') \in \mathbb{R}_+^2$ fixé, les processus (gaussiens centrés) $\{B_{t+s'} - B_{s'}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $\{B_{t+s''} - B_{s''}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ possèdent la même loi de probabilité ; signalons aussi que cette loi est la même que celle du mouvement brownien $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.
- (e) Le mouvement brownien est un processus stochastique autosimilaire¹² d'ordre $1/2$: pour tout nombre réel strictement positif fixé a , les processus (gaussiens centrés) $\{B_{at}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ et $\{a^{1/2}B_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ possèdent la même loi de probabilité.

Exercice 3.2. Désignons par $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien. Soit le processus stochastique $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ défini par $W(0) = 0$ presque sûrement, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $W(t) = tB(1/t)$ presque sûrement. Montrer que $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien.

Avant de clore ce chapitre, nous allons montrer que le Corollaire 3.11 permet, de façon relativement facile de construire des processus gaussiens stationnaires.

Définition 3.15 (stationnarité au sens strict). Désignons par $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un processus stochastique à valeurs réelles, qui n'est pas forcément gaussien. On dit que ce processus est stationnaire au sens strict, lorsqu'il vérifie la propriété suivante : pour tout $(s', s'') \in \mathbb{R}^2$ fixé, les processus stochastiques $\{X_{t+s'}\}_{t \in \mathbb{R}}$ et $\{X_{t+s''}\}_{t \in \mathbb{R}}$ possèdent la même loi de probabilité.

Définition 3.16 (stationnarité au sens large). Désignons par $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ un processus stochastique à valeurs réelles, qui n'est pas forcément gaussien, mais qui est cependant du second ordre, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(Y_t^2) < +\infty$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On dit que ce processus est stationnaire au sens large lorsque l'on a, $\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\text{cov}(Y_{t'}, Y_{t''}) = \text{cov}(Y_{t'-t''}, Y_0)$ pour tous $t', t'' \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.17. Lorsqu'un processus stochastique du second ordre à valeurs réelles, est stationnaire au sens strict, alors il l'est au sens large. La réciproque n'est pas toujours vraie, cependant elle le devient, lorsqu'on impose de plus au processus, d'être Gaussien.

Proposition 3.18. Soit θ un réel arbitraire et soit f une fonction arbitraire de l'espace de Lebesgue habituel $L^2(\mathbb{R})$. Il existe un processus stochastique indexé par \mathbb{R} , à valeurs réelles, gaussien et stationnaire, noté par $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, tel que l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(Z_t) = \theta$, et pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\text{cov}(Z_h, Z_0) = \int_{\mathbb{R}} f(s+h)f(s) ds = \int_{\mathbb{R}} e^{ih\xi} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad (3.10)$$

où \widehat{f} désigne la transformée de Fourier¹³ de f . Notons que, lorsqu'une fonction paire et positive¹⁴ g de $L^1(\mathbb{R})$, vérifie pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\text{cov}(Z_h, Z_0) = \int_{\mathbb{R}} e^{ih\xi} g(\xi) d\xi$, alors on a pour Lebesgue presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $g(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2$; la fonction $\xi \mapsto |\widehat{f}(\xi)|^2$ est appelée la densité spectrale du processus stationnaire $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.18. L'existence de $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ résulte du Corollaire 3.11, où l'on suppose que $L^2(A, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R})$ et $f_t(s) = f(s+t)$ pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$. La seconde égalité dans (3.10), résulte de l'identité de Plancherel. Nous ne donnerons pas la preuve du restant de la proposition. \square

12. C'est notamment grâce à cette propriété que l'on peut voir le mouvement brownien comme un objet fractal.

13. Avec la convention que \widehat{g} , la transformée de Fourier d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, par

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi s} g(s) ds.$$

14. c'est-à-dire que l'on a pour Lebesgue presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $g(\xi) = g(-\xi)$ et $g(\xi) \in \mathbb{R}_+$.