Modèle poissonnien régulier approchant un modèle de rupture

Laboratoire Paul Painlevé — Université de Lille

AMIRI Arij

Sous la direction de DACHIAN Sergueï

Résumé

De manière informelle, une rupture est un changement abrupt dans la loi statistique d'un phénomène. En statistique paramétrique, pour des modèles réguliers, les estimateurs usuels (bayésiens et maximum de vraisemblance) sont en général asymptotiquement normaux et efficaces. Dans les problèmes singuliers, comme ceux de rupture (le paramètre estimé est alors la position d'une discontinuité), les propriétés des estimateurs sont radicalement différents. Dans ce travail, nous étudions, pour des observations poissonniennes, le modèle où la fonction d'intensité passe rapidement d'une valeur donnée à une autre (sur un petit intervalle dont la taille converge vers 0), approchant ainsi une fonction d'intensité discontinue (rupture).

Modèle régulier approchant un modèle de rupture

On suppose qu'on observe $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$, où les $X_j = \big(X_j(t),\ 0 \le t \le \tau\big)$, $j = 1, \dots, n$, sont des processus de Poisson de fonction d'intensité $\lambda_\theta^{(n)}$ donnée par

$$\lambda_\theta^{(n)}(t) = a + \frac{r}{\delta_n}(t-\theta)\,\mathbb{1}_{[\theta,\theta+\delta_n]}(t) + r\,\mathbb{1}_{]\theta+\delta_n,\tau]}(t), \quad 0 \le t \le \tau.$$

Ici $\delta_n \searrow 0$ et le paramètre inconnu $\theta \in]\alpha, \beta[\subset]0, \tau[$.
La vraisemblance (par rapport à n processus de Poisson indépendants d'intensité 1) est donnée par

$$\mathbf{L}\big(\theta, X^{(n)}\big) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \int_0^\tau \ln \lambda_\theta^{(n)}(t)\,\mathrm{d}X_j(t) - n\int_0^\tau \Big(\lambda_\theta^{(n)}(t) - 1\Big)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Méthodologie

On étudie l'estimateur du maximum de vraisemblance et les estimateurs bayésiens de θ. On cherche à déterminer leurs propriétés asymptotiques (la vitesse de convergence, la consistance, l'efficacité, la convergence des moments, ...) en utilisant la méthode d'analyse de rapport de vraisemblance normalisé introduite par Ibragimov et Khasminskii (*cf.* [1]).
Nous avons montré que le comportement des estimateurs dépend de la vitesse de convergence de δ_n vers zéro. Plus précisément, on distingue les deux cas (lent et rapide)

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et

$$n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Méthode d'analyse de rapport de vraisemblance normalisé

On cherche d'abord la bonne suite $\varphi_n \searrow 0$ (dite *vitesse de normalisation de vraisemblance*) telle que le rapport de vraisemblance normalisé

$$\begin{aligned} Z_n(u) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\theta+u\varphi_n}\big(X^{(n)}\big)}{\mathrm{d}\mathbf{P}_\theta} = \frac{\mathbf{L}\big(\theta+u\varphi_n, X^{(n)}\big)}{\mathbf{L}\big(\theta, X^{(n)}\big)} \\ &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_0^\tau \ln\left(\frac{\lambda_{\theta+u\varphi_n}^{(n)}(t)}{\lambda_\theta^{(n)}(t)}\right)\mathrm{d}X_j(t) - n\int_0^\tau\Big(\lambda_{\theta+u\varphi_n}^{(n)}(t) - \lambda_\theta^{(n)}(t)\Big)\,\mathrm{d}t\right\}, \quad u \in \left]\tfrac{\alpha-\theta}{\varphi_n}, \tfrac{\beta-\theta}{\varphi_n}\right[, \end{aligned}$$

converge (dans un espace fonctionnel adapté) vers un processus limite non dégénéré ($\not\equiv 1$) sur $\mathbb{R}$. On en déduit ensuite les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance ainsi que celles des estimateurs bayésiens.

Modèle régulier ($\delta_n = \delta > 0$)

Le cas régulier a été étudié par Kutoyants (*cf.* [2]). Dans ce cas le modèle est localement asymptotiquement normal (LAN) : on a $\varphi_n = 1/\sqrt{n}$ et, dans l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et de limite zéro en $\pm\infty$ muni de la norme sup,

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Z_I,$$

où

$$Z_I(u) = \exp\left\{u\Delta - \frac{u^2}{2}I\right\},$$

avec $\Delta \sim \mathcal{N}(0, I)$ et I l'information de Fisher donnée par

$$I = \frac{r}{\delta}\ln\left(\frac{a+r}{a}\right).$$

Modèle de rupture ($\delta_n = 0$)

Le cas de rupture a été étudié par Kutoyants (*cf.* [2]). Dans ce cas on a $\varphi_n = 1/n$ et, dans l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ des fonctions càdlàg de limite zéro en $\pm\infty$ muni de la topologie usuelle de Skorokhod,

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Z_{a,a+r},$$

où

$$Z_{a,a+r}(u) = \begin{cases} \exp\Big\{\ln\big(\frac{a}{a+r}\big)Y_{a+r}(u) + ru\Big\}, & \text{si } u \ge 0, \\ \exp\Big\{\ln\big(\frac{a+r}{a}\big)Y_a(-u) + ru\Big\}, & \text{si } u \le 0, \end{cases}$$

avec Y_a et Y_{a+r} deux processus de Poisson homogènes indépendantes d'intensités respectives a et $a+r$.

Résultats pour le cas lent ($n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$)

Nous avons montré le théorème suivant.

Théorème

Soit $n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En choisissant comme vitesse de normalisation de vraisemblance

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{\delta_n}{n}},$$

le rapport de vraisemblance normalisé Z_n converge vers le processus Z donnée par

$$Z(u) = \exp\left\{u\Delta - \frac{u^2}{2}F\right\}, \quad u \in \mathbb{R},$$

où

$$F = r\ln\left(\frac{a+r}{a}\right)$$

et Δ est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, F)$.

Remarque

Notons que Z_n et Z sont continus et que la convergence a lieu en loi dans l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ (muni de la norme sup).

Remarque

Ceci nous permet de déduire les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance ainsi que celles de des estimateurs bayésiens.

Résultats et perspectives pour le cas rapide ($n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$)

Nous conjecturons le résultat suivant.

Conjecture

Soit $n\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En choisissant comme vitesse de normalisation de vraisemblance

$$\varphi_n = \frac{1}{n},$$

le rapport de vraisemblance normalisé Z_n converge vers le processus Z donnée par

$$Z(u) = \begin{cases} \exp\Big\{\ln\big(\frac{a}{a+r}\big)Y_{a+r}(u) + ru\Big\}, & \text{si } u \ge 0, \\ \exp\Big\{\ln\big(\frac{a+r}{a}\big)Y_a(-u) + ru\Big\}, & \text{si } u \le 0, \end{cases}$$

où Y_a et Y_{a+r} sont deux processus de Poisson homogènes indépendants d'intensités respectives a et $a+r$.

Remarque

Nous avons déjà montré que les lois fini-dimensionnelles de Z_n convergent vers celles de $Z_{a,a+r}$. Ceci nous permet de déduire les propriétés des estimateurs bayésiens.

Remarque

Par contre, pour obtenir les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance, on a besoin de la convergence de Z_n vers $Z_{a,a+r}$, qui ne peut pas avoir lieu dans $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie usuelle de Skorokhod $\big($ni, bien sûr, dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})\big)$. Il faut donc travailler dans une topologie alternative. Pour cela, nous sommes en train d'étudier des différentes topologies sur l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbb{R})$.

Principales références bibliographiques

Références

[1] I. A. Ibragimov and R. Z. Hasminskii. *Statistical estimation*, volume 16 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981. Asymptotic theory, Translated from the Russian by Samuel Kotz.

[2] Yu. A. Kutoyants. *Parameter estimation for stochastic processes*, volume 6 of *Research and Exposition in Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, 1984. Translated from the Russian and edited by B. L. S. Prakasa Rao.

[3] Yu. A. Kutoyants. *Statistical inference for spatial Poisson processes*, volume 134 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1998.