

Partiel, Equations différentielles M311

Mercredi 28 Mars 2007

Eléments de réponse et détail du barème.

Exercice 1 – (3 points) Soit $a \in \mathbb{R}$. On désigne par \mathcal{C}_a la courbe plane passant par le point $(0, a)$ et satisfaisant à la condition suivante : *En chaque point, la pente vaut 2 fois la distance du point à l'axe des abscisses.*

(i) Démontrer que \mathcal{C}_a est la courbe intégrale du problème de Cauchy $y' = 2|y|$, $y(0) = a$.

• 0,5 point

(ii) Expliquer pourquoi la courbe \mathcal{C}_a ne rencontre pas l'axe des abscisses pour $a \neq 0$.

• Unicité : 1 point. Si l'on donne des solutions explicites, voir la question (iii).

(iii) Selon le signe de a , déterminer une expression explicite définissant la courbe \mathcal{C}_a et donner son graphe correspondant.

• Expressions explicites : 1 point. Si l'on a déjà donné ces expressions à la question (ii), on ne donnera 2 points que s'il y a lieu des discussions pour les prolongement et unicité; sinon, 1,5 points seulement.

• Dessin : 0,5 point.

Exercice 2 – (5 points) Dans l'espace $\mathcal{C}^1([1, 2]; \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in [1, 2]} |f(x)| + \sup_{x \in [1, 2]} |f'(x)|,$$

on considère la fonctionnelle J définie par

$$J : y \mapsto \int_1^2 \frac{y'^2}{x^3} dx.$$

(i) Pour chaque $y_0 \in \mathcal{C}^1([1, 2]; \mathbb{R})$, déterminer la différentielle de J en y_0 .

• Evaluer $J(y_0 + h) - J(y_0)$ puis donner la bonne expression de $DJ(y_0)h$: 1 pt

• Linéarité et continuité de l'expression : 1 pt

• $J(y_0 + h) - J(y_0) = DJ(y_0)h + o(\|h\|)$: 0,5 pt

(ii) Ecrire l'équation d'Euler correspondant à la fonctionnelle J et la résoudre sous la contrainte $y(1) = 1$, $y(2) = 2$.

• Equa. Euler : $2y' = \text{Cte} \times x^3$ ou $x^2 y'' = 3y'$. 1 pt

• Solution : $y = (x^4 + 14)/15$. 1,5 pt; si les coefficients ne sont pas bons, 0,5 pt pour chaque coefficient.

Problème – (13 points +2) On considère l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad y' = f(x, y), \quad f(x, y) = y^2 - x - 1.$$

Le problème comporte trois parties, qui sont relativement indépendantes.

Partie I – Cauchy-Lipschitz (2+1)

(i) Soit $B > 0$. Trouver une constante K , en fonction de B , telle que l'on ait $|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|$ sur la bande $\mathbb{R} \times [-B, B]$.

• $K = 2B$ par exemple. 1 pt.

(ii) Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$.

- *Cauchy-Lipschitz en soulignant que f est localement lip.. 1 pt.*

(iii) (Bonus) La fonction f est-elle lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 ? Justifier votre réponse.

- *Non. 1 pt.*

Partie II – Itération de Picard (7)

(iv) Rappeler le procédé d'itération de Picard pour obtenir une solution de l'équation (E) avec la condition initiale $y(0) = 0$.

- *1 pt*

On note $y_0 \equiv 0$ le terme initial et on désigne par y_1, y_2, \dots les termes qui suivent ; on constate que ce sont des polynômes sans terme constant.

(v) Expliciter y_1 et y_2 .

- $y_1 = -x - x^2/2$, 0,5 pt ; $y_2 = -x - x^2/2 + x^3/3 + x^4/4 + x^5/20$, 1 pt.

(vi) Soit δ_n l'entier tel que $y_n(x) - y_{n-1}(x) = x^{\delta_n} z_n(x)$, z_n désignant un polynôme en x de terme constant non nul. Démontrer que si $n \geq 1$, on a $\delta_{n+1} = \delta_n + 2$. En déduire une expression explicite de δ_n en fonction de n .

- *Relation entre δ_n et le suivant : 0,75 pt.*

- $\delta_n = 2n - 1$. 0,75 pt

Pour abréger, un polynôme sera appelé **du type P1** si tous ses coefficients sont majorés en valeur absolue par un. On admettra le résultat suivant : Si p est un polynôme du type P1, il en est de même pour le polynôme défini par l'intégrale

$$\int_0^x (p(t))^2 dt.$$

(vii) Démontrer par récurrence, que les polynômes y_n sont tous du type P1.

- *Dire que si $n \geq 1$, $\int_0^x (y_n(t))^2 dt$ est un polynôme ayant $x^3/3$ pour terme de degré le plus bas : 0,5 pt.*

- *le reste : 0,5 pt.*

(viii) Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que la série de terme général $(y_{n+1}(x) - y_n(x))$ converge normalement sur $[-a, a]$.

- *Dire que $\sup_{|x| \leq a} |z_{n+1}(x)| \leq 2/(1-a)$ puis que $\sup_{|x| \leq a} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq 2a^{2n-1}/(1-a)$: 1 pt*

En déduire la convergence de la suite (y_n) .

- *Convergence uniforme sur tout compact inclus dans $] -1, 1[$: 1 pt. 0,5 pt s'il manque uniforme ou compact, etc...*

Partie III – Limite à l'infini (4+1)

Soit u la solution de (E) telle que $u(0) = 0$.

(ix) (Bonus) Démontrer que u est décroissante et minorée par la fonction $-\sqrt{x+1}$ pour tout $x > 0$ appartenant au domaine de définition de u .

- *Remarquer que $y^2 \geq x+1 \Leftrightarrow y' \geq 0$, ce qui donne, en particulier, le sens de variation de y ; 1 pt.*

- *le reste : 1 pt*

(x) En déduire que u est définie sur l'intervalle $] -1, \infty[$.

- *d'abord sur $] -1, 0]$ avec (viii) : 0,5 pt*

- *Sur $[0, \infty[$ avec le critère de prolongement : 1 pt*

(xi) Montrer que si $x \rightarrow +\infty$, on a $u(x) \rightarrow -\infty$.

- *La limite existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ car la fonction est décroissante : 0,5 pt*

- *Elle vaut $-\infty$ car sinon, en contradiction avec $u' = u - x - 1 \rightarrow -\infty$. 1 pt*