

Examen, Equations différentielles M311

Le Mercredi 30 Mai 2007

Eléments de réponse et détail du barème

Exercice (5 points) On considère l'opérateur différentiel (L) suivant :

$$(L) \quad L(y) := y'' - 2y' + y.$$

(i) Donner une base pour l'espace des solutions pour l'équation différentielle homogène $L(y) = 0$, c'ad : $y'' - 2y' + y = 0$.

0,75 pt : $y = e^x$ et $y = xe^x$.

(ii) Donner deux solutions linéairement indépendantes du système associé à l'équation $L(y) = 0$, obtenu en posant $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ depuis cette dernière.

0,75 pt : (e^x, e^x) et $(xe^x, e^x + xe^x)$.

(iii) Déterminer la solution du problème de Cauchy ci-dessous :

$$L(y) = xe^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

1,5 pt : Une solution particulière $y_p = (-2 + x)e^{2x}$ (0,5 pt) ; déterminer les coefficients $a = 2$ et $b = 1$ tels que $y = y_p + ae^x + bxe^x$ vérifie la C.I. (1 pt).

Ou bien, la méthode de variation de la constante.

(iv) Déterminer la fonction de Green pour le problème aux limites ci-dessous :

$$L(y) = b(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

2 pts : Ecrire $G_0(x, t) = (x - t)e^{x-t}$ si $t < x$, $= 0$ sinon, en calculant la résolvante $R(x, t)$ (0,75 pt) ; poser ensuite $G(x, t) = \mu_1(t)e^x + \mu_2(t)xe^x + G_0(x, t)$ et exprimer les conditions aux bords (0,5 pt) ; trouver $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = (-1 + t/2)e^{-t}$ (0,75 pt). Si tout va bien, rajouter 1pt pour **bonus**.

Ou bien, on écrit $L(y) = e^x(e^{-x}y)''$ et on applique les bonnes formules... Le **bonus** est aussi valable si la démarche fonctionne !

Problème – (15 points) On considère l'équation différentielle (E) ci-dessous :

$$(E) \quad y'' + x^2y = 0.$$

Toute solution de (E) étant définie dans \mathbb{R} tout entier, on entendra par *solution de* (E) toute fonction \mathcal{C}^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui satisfait l'équation (E).

Le problème comporte trois parties, qui peuvent être traitées indépendamment.

Partie I – Propriétés générales (6 pt)

(i) (Questions de cours) Soient u et v deux solutions de (E). Montrer que u et v sont linéairement indépendantes si et seulement si il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0)v'(x_0) \neq u'(x_0)v(x_0)$.

En déduire que deux solutions indépendantes de (E) n'ont pas de zéro commun.

2 pt : le wronskien non nul implique que c'est un système fondamental (1pt) ; zéro commun : 0,5pt ; bonne présentation (lien avec le système) : 0,5 pt.

(ii) Si u est une solution de (E) et si $v(x) = u(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, vérifier que v est aussi solution de (E) .

1 pt : dire que $v'(x) = -u'(-x)$ (0,5pt) et $v''(x) = u''(-x)$ (0,25 pt) ; le reste, 0,25pt.

(iii) Soit u une solution de (E) . Démontrer que u est une fonction paire, c-à-d : $u(-x) = u(x)$ si, et seulement si, $u'(0) = 0$.

1,5 pt : "seulement si" : on se sert de la relation $-u'(-x) = u'(x)$ (0,5 pt) ; "si" : les solutions $u(x)$ et $u(-x)$ ont même C.I. en 0, donc sont identiques par Cauchy (1 pt).

(iv) Soit u une solution de (E) . On pose $U(x) = (u(x))^2 + \frac{(u'(x))^2}{x^2}$ pour $x > 0$.

(a) Donner le sens de variation de $U(x)$ sur $]0, +\infty[$.

1 pt : $U'(x) = -2(u'(x))^2/x^3 < 0$ pour $x > 0$, donc décroissant.

(b) En déduire que toute solution de (E) est bornée sur \mathbb{R} .

0,5 pt : d'après (a), u est bornée sur $]0, +\infty[$ (0,25pt) ; $u(-x)$ aussi, ce qui vaut dire que $u(x)$ est bornée pour $x < 0$.

Partie II – Zéros des solutions (4pt + 2 pt)

Soit u une solution de (E) . On suppose que u n'est pas identiquement nulle, et on pose

$$\Omega_0^+ = \{x > 0 : u(x) = 0\}, \quad \Omega_1^+ = \{x > 0 : u'(x) = 0\}.$$

(i) Montrer que $\Omega_0^+ \cap \Omega_1^+ = \emptyset$.

0,5 pt : si $u(x_0) = u'(x_0) = 0$, on aurait $u = 0$ partout.

(ii) Soient $\beta > \alpha > 0$ tels que $\alpha \in \Omega_0^+$ et $\beta \in \Omega_1^+$. Montrer que $\Omega_1^+ \cap]\alpha, \beta[\neq \emptyset$. (Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle.)

0,5 pt : Rolle.

(iii) Soient $\beta > \alpha > 0$ tels que $\beta < \alpha + \frac{\pi}{\beta}$.

(a) Donner une fonction $v(x)$ définie et \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R} , non identiquement nulle, vérifiant

$$v'' + \alpha^2 v = 0, \quad v(\alpha) = v\left(\alpha + \frac{\pi}{\alpha}\right) = 0.$$

0,75 pt : $v = \sin(\alpha(x - \alpha))$ par exemple.

(b) Donner une fonction $w(x)$ définie et \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , vérifiant

$$w'' + \beta^2 w = 0, \quad \{x \in [\alpha, \beta] : w(x) = 0\} = \emptyset.$$

0,75 pt : $w = \sin(\beta(x - \alpha - \epsilon))$, avec $\epsilon \in]0, \frac{\pi}{\beta} + \alpha - \beta[$.

(iv) En utilisant le théorème de comparaison, établir les assertions suivantes :

(a) Pour tout $\alpha > 0$, on a $\Omega_0^+ \cap]\alpha, \alpha + \frac{\pi}{\alpha}[\neq \emptyset$.

0,75 pt : Sur $[\alpha, \beta]$, comparer (E) avec l'équation de (iii.a).

(b) Si $\beta > \alpha > 0$ et $\beta - \alpha < \frac{\pi}{\beta}$, l'ensemble $\Omega_0^+ \cap [\alpha, \beta]$ contient au plus un élément.

0,75 pt : Sur $[\alpha, \beta]$, comparer (E) avec l'équation de (iii.b).

(v) (Hors barème) Donner une description des zéros de u dans \mathbb{R} .

2 pt : les zéros de u forment une suite croissante $\{z_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ telle que (1) : $z_n \rightarrow \pm\infty$ si $n \rightarrow \pm\infty$ (0,5pt); (2) si $z_n > 0$, $z_{n+1} \in]z_n, z_n + \pi/z_n[$ (0,5 pt); (3) entre z_n et z_{n+1} , il y a un et un seul zéro de u' (0,5 pt). Bonne présentation, en particulier pour le cas de $z_n < 0$: 0,5pt.

Partie III – Expressions analytiques (5 pt)

Soient u et v les solutions de (E) telles que $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $v(0) = 0$ et $v'(0) = 1$.

(i) Montrer que u et v forment une base de l'espace des solutions de (E).

1 pt : les deux sont linéairement indépendantes.

(ii) Soit $A(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ une série entière vérifiant (E).

(a) Pour tout $n \geq 2$, déterminer a_n en fonction de a_0 , a_1 et de n . (Indication : on pourra commencer par vérifier la relation $a_n = -\frac{a_{n-4}}{n(n-1)}$ si $n \geq 4$; on observera qu'une bonne partie de coefficients sont nuls.)

2 pt : $a_n = 0$ si $n = 2$ ou 3 modulo 4 (0,5 pt);

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n(n-1)} = \dots = (-1)^{n/4} \frac{a_0}{n(n-1)(n-4)(n-5)\dots 4.3}$$

si $n \geq 4$ est un multiple de 4 (0,5 pt);

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n(n-1)} = \dots = (-1)^{(n-1)/4} \frac{a_1}{n(n-1)(n-4)(n-5)\dots 5.4}$$

si $n \geq 5$ est de la forme $4m + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$ (0,5 pt). Si tout va bien, +0,5 pt.

(c) Déterminer le rayon de convergence de $A(x)$.

1 pt : $R = \infty$.

(iii) En déduire qu'on a :

$$u(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{4m}}{4m(4m-1)(4m-4)(4m-5)\dots 4.3},$$

$$v(x) = x \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{4m}}{(4m+1)(4m)(4m-3)(4m-4)\dots 5.4} \right).$$

1 pt : vérification directe.