Université Lille I Année 2006-2007
M311 3ème année **Devoir n° 1**

Équations différentielles

Exercice 1 On considère l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients complexes constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{1}$$

Soit V l'espace vectoriel des solutions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On constante que $\dim V = n$.

1. Montrer que l'opérateur de différentiation $y \mapsto y'$ induit une application linéaire
$$D\colon V \to V.$$
2. Montrer que les valeurs propres de D sont les racines du polynôme
$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{2}$$
3. Montrer que, quelle que soit la valeur propre λ de D, il existe, à multiplication par un scalaire près, un seul vecteur propre $y_\lambda \in V$ associé avec λ.
4. Montrer que, pour que D soit diagonalisable, il faut et il suffit que $Q(x)$ admette n racines distinctes.
5. Soit λ une racine de $Q(x)$ de multiplicité m. Montrer que les m fonctions
$$y_\lambda,\ xy_\lambda,\ \frac{x^2}{2!}y_\lambda,\ \ldots\ ,\ \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}y_\lambda$$
sont linéairement indépendantes et engendrent un sous-espace vectoriel D-invariant V_λ de V de dimension m. Quelle est la matrice de D sur V_λ par rapport à cette base ?
6. Soit λ une racine de $Q(x)$ de multiplicité m. Montrer que λ est une racine du polynôme caractéristique $P(x)$ de D de multiplicité au moins égale à m.
7. Montrer que le polynôme caractéristique $P(x)$ de D coincide avec le polynôme $Q(x)$.
8. Montrer que, quelle que soit la valeur propre de D, si m est sa multiplicité dans $Q(x)$, alors D admet un tableau de Jordan d'ordre m et un seul.
9. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les racines distinctes de $P(x)$ et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Montrer que les fonctions
$$\begin{array}{c} \mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ x\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ \ldots\ ,\ x^{m_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x} \\ \ldots \\ \mathrm{e}^{\lambda_r x},\ x\mathrm{e}^{\lambda_r x},\ \ldots\ ,\ x^{m_r-1}\mathrm{e}^{\lambda_r x} \end{array} \tag{3}$$
engendrent l'espace vectoriel V des solutions de (1).
10. Rappeler le fait suivant : Pour que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme soit égal à son polynôme minimal il faut et il suffit que la forme de Jordan admette, pour toute valeur propre, un seul tableau de Jordan.

Exercice 2 (Trajectoires particulières) Considérons le champ de vecteurs linéaire de $\mathbb{R}^2$ défini par ses composantes

$$X(x,y) = ax + by, \quad Y(x,y) = cx + dy,$$

où a, b, c, d sont des réels vérifiant $ad - bc \neq 0$. Déterminer la forme des trajectoires de ce champ au voisinage de l'origine.
Rappel. Une *trajectoire* ou *courbe intégrale* du champ de vecteurs $(X, Y) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^0 est une courbe paramétrée $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, définie sur un intervalle ouvert I, telle que, quel que soit $t \in I$,

$$\gamma'(t) = (X(\gamma(t)), Y(\gamma(t))).$$

Indication : Distinguer les trois cas où la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a deux valeurs propres réelles, a une valeur propre complexe non reelle, et enfin le cas où cette matrice n'est pas diagonalisable. Justifier qu'il n'y a pas d'autre cas.

Exercice 3 (Différentielle) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ qui ne s'annule en aucun point et soit

$$J[y] := \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{f(x)}\, dx, \forall y \in C^1([0, 1]).$$

(1) Déterminer la différentielle de J en chaque $y_0 \in C^1([0, 1])$.
(2) Écrire l'équation d'Euler correspondante et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$(E_f) \qquad y' = C\sqrt{1 + y'^2}\, f(x),$$

où C est une constante.
(3) Donner la solution générale de (E_f). On observera que la solution générale dépend de deux constantes.
(4) On suppose que $f(x) = x + 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Montrer que la solution vérifie

$$(y(x) - 2)^2 + (x + 1)^2 = 5,$$

c'est-à-dire, la courbe intégrale se situe sur le cercle de centre $(-1, 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 4 (Mouvement képlérien) On note $\mathbf{x}$ le vecteur lieu ordinaire dans le plan, et on écrit $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, de telle sorte que x_1 et x_2 soient les coordonnées de $\mathbf{x}$ par rapport à l'origine. Le mouvement d'un corps (de masse 1) dans le plan, asujetti à un champs central de potentiel U qui ne dépend que de la distance de l'origine, est décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}\right). \tag{4}$$

En coordonnées polaires r et φ, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= r\mathbf{e}_r \\
\dot{\mathbf{x}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{x}} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.
\end{aligned}$$

1. Montrer que l'équation (4) entraîne les équations
$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \tag{5}$$
$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \tag{6}$$
2. Montrer que l'équation (6) entraîne l'existence d'une constante M telle que la dérivée $\dot{\varphi}$ satisfasse à l'équation
$$\dot{\varphi} = \frac{M}{r^2}. \tag{7}$$
Cette constante M est le *moment cinétique*, et on a ainsi établi la loi de *conservation du moment cinétique*. En particulier, le moment cinétique ne dépend pas du temps t et est déterminé par les conditions initiales.
Remarque. Si le problème est formulé dans l'espace $\mathbb{R}^3$ ordinaire, la loi de conservation du moment cinétique entraîne que le mouvement a lieu dans un plan si M est non nul et le long d'une droite si c'est nul.
3. On définit le *potentiel effectif* V par la formule
$$V(r) = U(r) + \frac{M^2}{2r^2}. \tag{8}$$
Substituer à $\dot{\varphi}$ le membre droit de l'équation (7) dans (5) fournit l'équation différentielle
$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{M^2}{r^4} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \tag{9}$$
De même, on définit l'énergie E resp.l'énergie *effective* E_{eff} par
$$E = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + U = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{2} + U \tag{10}$$
resp.
$$E_{\text{eff}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + U = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2r^2} + U. \tag{11}$$
On constate que $E_{\text{eff}} = E$. Montrer que (9) entraîne que l'énergie E ne dépend pas du temps t et est donc une constante déterminée par les conditions initiales. En déduire que l'énergie E fournit une première intégration, c.a.d. au voisinage de chaque valeur $\dot{r}$ non nulle, l'équation différentielle
$$\dot{r}^2 = 2(E - V(r)) \tag{12}$$
entraîne l'équation (5) ; une solution de (12) est alors solution de (9) et donc de (5).
4. Résoudre (12) par une *quadrature*, c.a.d. par une intégration. En utilisant la méthode de séparation des variables, en déduire l'équation de l'orbite en coordonnées polaires pour le cas où M est non nul.
5. Décrire les solutions de façon explicite pour le cas où M est non nul et $U = -\frac{k}{r}$ (potentiel newtonien), k étant une constante non negative. En déduire la première et la deuxieme loiképlérienne.
Rappel : La *première loi képlérienne* dit que la *trajectoire d'une planète est une ellipse dont un foyer est le soleil* ; la *deuxième loi képlérienne* est la *loi des aires*.
Indication. Pour trouver une primitive du type recherché, on pourra dériver la fonction ϑ de la variable r donnée par la formule
$$\vartheta(r) = \arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{k}{M}}{B}$$
où B est une constante non nulle qu'on déterminera.

6. Montrer que la *loi newtonienne de gravitation* disant que le potentiel gravitationnel est donné par $U = -\frac{k}{r}$ est une conséquence de la première loi keplérienne.
7. Montrer qu'en général, pour que les solutions de (9) fournissent des orbites fermées, il faut et il suffit que U s'écrive sous la forme $U = -\frac{k}{r}$, $k > 0$, ou $U = ar^2$, $a > 0$.

Indication. On pourra consulter la partie I.2.8 du livre de V. I. Arnold intitulé “Mathematical methods of classical mechanics”.

Optionnel :

Exercice 5 (L'exponentielle d'une matrice) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On considera les matrices carrées d'ordre n comme éléments de l'espace normé $E = M_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2, muni d'une norme quelconque. On rappelle les faits suivants :
(i) Pour une matrice carrée A d'ordre n l'exponentielle matricielle

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!}$$

est une série absolument convergente.
(ii) Si les matrices carrées A et B commutent, c'est-à-dire, si $AB = BA$, on a

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}.$$

(iii) Quelle que soit la matrice carrée A, la matrice e^A est inversible d'inverse e^{-A}.
(iv) Pour une matrice carrée A d'ordre n, l'exponentielle matricielle, considérée comme fonction matricielle

$$\mathrm{e}_A \colon \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad t \longmapsto \mathrm{e}^{tA},$$

est différentiable et on a

$$\mathrm{e}_A'(t) = A\mathrm{e}^{tA} = A\mathrm{e}_A(t).$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'est pas nécessaire de calculer la série $\sum \frac{(tA)^n}{n!}$.

1. Soient P une matrice carrée inversible d'ordre n et A une matrice carrée quelconque d'ordre n. Montrer que
$$\mathrm{e}^{PAP^{-1}} = P\,\mathrm{e}^{A}\,P^{-1}.$$
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{K}$, et soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ telle que, avec la matrice
$$P = [y_1, \ldots, y_n]$$
dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de base $y_1, \ldots, y_n$ donnés, on ait
$$A = P\,J\,P^{-1},$$
avec un tableau diagonal
$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix}$$

de matrices de Jordan

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{bmatrix}$$

d'ordre (disons) α_j, les $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ étant les valeurs propres de A. Pour $1 \leqslant j \leqslant s$, on pose

$$Q_j = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \frac{t^{\alpha_j-1}}{(\alpha_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{\alpha_j-2}}{(\alpha_j-2)!} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^{tJ} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{t\lambda_1}Q_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t\lambda_2}Q_2 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{t\lambda_s}Q_s \end{bmatrix}$$

d'où

$$\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tJ}P^{-1}.$$