Département de Mathématiques
Université de Lille 1

M303 Topologie
Année 2008/2009

Partiel M303 du 12 Novembre 2008

Durée 2h. Documents et appareils numériques interdits.
Toute reponse est à justifier avec soin.

Exercice 1 (Question du cours) Soit (E, d) un espace métrique et soit A un sous-ensemble de E. On pose $B = E \setminus A$.

1. Rappeler la définition de l'intérieur $\mathring{A}$ de A.
2. Vérifier que si $x \notin \mathring{A}$, alors pour tout $r > 0$, on a $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$.
3. En déduire que $\mathring{A} \cup B$ est dense dans E.

Exercice 2 Soit δ la distance définie sur $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante:

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{si } x_1 = x_2 \\ |x_1 - x_2| + |y_1| + |y_2| & \text{sinon} \end{cases}$$

(On ne demande pas de vérifier que δ est une distance.)

1. Décrire les boules ouvertes $B((0, 0), r)$ et $B((0, 1), r)$ pour $r \in]0, 1[$.
2. Quelle est la fermeture de l'ensemble $]1, 2[\times]1, 2[$?

Exercice 3 Soit (E, d) un espace métrique compact et soit f une application de (E, d) vers lui-même vérifiant la propriété (1) ci-dessous:

$$(1) \qquad \forall (x, y) \in E \times E,\ x \neq y \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)\,.$$

On pose $\varphi(x) = d(x, f(x))$ pour tout $x \in E$.

1. Montrer que φ est une application continue de E dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que φ atteint son minimum sur E.
3. En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$. Montrer l'unicité d'un tel x.
4. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Montrer que f vérifie la propriété (1) ci-dessus. Y-a-t-il un point fixe de f ? Conclusion.

Exercice 4 Soit $T > 0$, $E = \mathcal{C}^0([-T,T],\mathbb{R})$ et soit $F = \mathcal{C}^1([-T,T],\mathbb{R})$. On considère

$$\mathcal{N}_1(f) = \sup_{x\in[-T,T]} |f(x)|, \quad \mathcal{N}_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[-T,T]} |f'(x)|$$

et

$$\mathcal{N}_3(f) = \sup_{x\in[-T,T]} |f(x)| + \sup_{x\in[-T,T]} |f'(x)|,$$

où $\mathcal{N}_1$ est une norme aussi bien sur E que sur F alors que $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_3$ sont des normes sur F.

1. Montrer que si $x \in [-T,T]$ et $f \in F$, alors on a :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + T \sup_{x\in[-T,T]} \left|f'(x)\right|.$$

2. Démontrer que pour tout $f \in F$, on a:

$$\mathcal{N}_2(f) \leq \mathcal{N}_3(f) \leq (T+1)\mathcal{N}_2(f).$$

3. Démontrer que les normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ ne sont pas équivalentes sur F (Indication: On pourra considérer les fonctions polynomiales x^n, avec $n \in \mathbb{N}$).

4. Soit Φ l'application linéaire définie de $(F, \mathcal{N}_2)$ vers $(E, \mathcal{N}_1)$ par la relation

$$\Phi(f) = f' + 2f.$$

   Montrer que Φ est continue.

5. **(Bonus)** Déterminer la plus petite constante $C \geq 0$ telle que

$$\mathcal{N}_1(\Phi(f)) \leq C\mathcal{N}_2(f)$$

   pour toute fonction $f \in F$.