Éléments de réponse

Examen M303, le 9 Janvier 2010

Exercice 1 (3/20)

Soit on utilise le fait que l'ensemble des matrices inversibles est l'image réciproque de la droite réelle privée de zéro, par l'application déterminant qui est continue car polynomiale, en soulignant que les normes sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ sont toutes équivalentes. Soit on rappelle que tout élément proche de la matrice identité est inversible et qu'il en est de même pour tout élément inversible, car $v^{-1} = (u+w)^{-1} = (u(I+x))^{-1}) = (I+x)^{-1}u^{-1}$ pour tout v proche de u (inversible), avec $w = v - u$, $x = u^{-1}w$.

Exercice 2 (5/20*)

1. (2 pts) *Voir le cours.*
2. (a) (1 pt) *Si $(x, y) \to (x_0, y_0)$, alors $x \to x_0$ et $y \to y_0$ et, avec la continuité de f, on obtient que $g(x, y) \to g(x_0, y_0)$, d'où la continuité recherchée.*

   (b) (1 pt) *Si (x_1, y_1) et $(x_2, y_2 \in C$, le segment reliant ces deux points, $\{t(x_1, y_2) + (1-t)(x_2, y_2) : t \in [0, 1]\}$, reste inclus dans C et cela montre que C est connexe par arcs, donc connexe. Pour voir que $0 \notin g(C)$, il suffit de noter que $f(x) \neq f(y)$ lorsque $x \neq y$.*

   (c) (1 pt) *En tant qu'image continue d'un connexe, $g(C)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ donc est un intervalle de $\mathbb{R}$; du fait que $0 \notin g(C)$, on obtient que $g(C)$ se situe intégralement soit dans $]-\infty, 0[$ soit dans $]0, +\infty[$, ce qui correspond respectivement au cas où f est strictement décroissante ou strictement croissante.*

Exercice 3 (6/20*)

1. (a) (1 pt) *Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ ou $[x, 0]$ selon le signe de x, on a $f(x) - f(0) = xf'(\xi)$ avec x se trouvant entre 0 et x, ce qui donne $|f(x)| \leq |f(0)| + |x| \max_{\xi \in [-\alpha, \alpha]} |f'(\xi)| \leq (1 + |x|)\|f\|$.*

   (b) (2 pts) *Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(E_\alpha, \|\ \|)$. D'abord, d'après la question précédente, si l'on note $\|\ \|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$, on a $\|f\|_\infty \leq (1 + \alpha)\|f\|$, ce qui permet de dire que (f_n) est de Cauchy pour $\|\ \|_\infty$ et, par suite (f_n) converge uniformément vers une fonction continue sur $[-\alpha, \alpha]$ qu'on notera f_∞. Afin de vérifier que $f_n \to f_\infty$ sous la norme $\|\ \|$, notons que les fonctions dérivées f'_n forment aussi une suite de Cauchy pour la norme $\|\ \|_\infty$ et soit g la limite de celles-ci; en écrivant $f_n(x) = \int_0^x f'_n(t)dt + f_n(0)$ et par passage à la limite on obtient que $f_\infty = \int_0^x g(t)dt + f_\infty(0)$, ce qui montre que $f_\infty \in E_\alpha$, avec $f'_\infty = g$. Pour finir, il suffit de noter que $\|f_n - f_\infty\| \leq \|f_n - f_\infty\|_\infty + \|f'_n - f'_\infty\|_\infty \to 0$ pour $n \to \infty$.*

2. (a) (1 pt) *Si* $f,\ g \in E_\alpha$, *on a* $\|\Phi(f) - \Phi(g)\| = \frac{1}{3}\max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |x(f(x) - g(x))| \leq \frac{\alpha(1+\alpha)}{3}\|f - g\|$, *d'après la question 1.(a).*

   (b) (1 pt) *Si* $\alpha = 1$, Φ *est* k*-Lipschitzienne avec* $k = \frac{2}{3} < 1$, *et le théorème du point fixe s'applique à* Φ *dans l'espace* $(E_\alpha, \|\ \|)$, *ce dernier étant de Banach d'après la question 1.(b).*

3. (1 pt) *En dérivant* $\Phi(h)(x) = h(x)$ *par rapport à* x, *on trouve* $h'(x) = xh(x) + 2x\cos(x^2)$. *On remarquera que* $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$.

Exercice 4 (6/20*)

1. (1.5 pts) K *étant un fermé inclus dans des compacts, il suffit de démontrer que* K *contient au moins un élément. Pour voir ceci, soit* $x_n \in K_n \neq \emptyset$*; puisque* $K_n \subset K_0$ *et que* K_0 *est compact, on peut extraire de* (x_n) *une suite* $(x_{\phi(n)})_n$ *qui converge vers une limite dans* K_0 *qu'on notera* ℓ. *Ensuite, compte tenu du fait que* $K_n \subset K_m$ *pour* $n \geq m$ *et que* K_m *est compact,* $(x_{\phi(n)})_{n\geq m}$ *est une suite d'éléments de* K_m *et on a* $\ell \in K_m$, *ceci pour tout entier* $m \in \mathbb{N}$*; on en déduit que* $\ell \in K$*:* $K \neq \emptyset$.

2. (1,5 pts) U *étant ouvert, son complémentaire* U^c *est fermé et par suite* $K_n \cap U^c$ *est un compact de* E, *car fermé d'un compact. Par hypothèse, on a* $(\cap_n K_n) \cap U^c = \emptyset$, *ce qui vaut dire que* $\cap_n(K_n \cap U^c) = \emptyset$*; on en déduit qu'il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\cap_{0\leq n\leq N}(K_n \cap U^c) = \emptyset$*:* $K_N \subset U$.

3. (1 pt) *Comme dans le cours, notons* $d(x, K) = \inf_{y\in K} d(x, y)$*; on a* $d(x, K) = 0$ *pour tout* $x \in K$, *ce qui implique que* $K \subset U_\epsilon$. *Comme* K *est compact, il est borné et il en est de même pour* U_ϵ *car, si* $d(x, x_0) \leq B$ *pour tout* $x \in K$ *(*x_0 *étant fixé dans* K, $B > 0$*), on aura* $d(x, x_0) \leq B + \epsilon$. *Enfin, les inégalités triangulaires montreront que* $x \mapsto d(x, K)$ *est continue de* E *dans* $\mathbb{R}$, *ce qui explique le caractère ouvert de* U_ϵ.

4. (a) (1 pt) $0 < \delta(U_\epsilon) - \delta(K) \leq 2\epsilon$.

   (b) (1 pt) *Pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *avec* $K \subset K_{n_\epsilon} \subset U_\epsilon$, *ce qui donne* $\delta(K) \leq \delta(K_{n_\epsilon}) \leq \delta(U_\epsilon)$*; or* $\delta(U_\epsilon) \leq \delta(K) + 2\epsilon$, *avec le principe des gendarmes on en déduit que la suite décroissante* $(\delta(K_n))_n$ *converge vers* $\delta(K)$.

(*) Pour chacun des trois derniers exercices, la note sera augmentée d'une unité si la réponse est complète.