Département de Mathématiques
Université de Lille 1

M303 Topologie
Année 2009/2010

Examen M303, le 9 Janvier 2010

Durée 3h. Documents et appareils numériques interdits.
Toute reponse est à justifier avec soin.

Exercice 1

Soit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et soit $\mathcal{N}$ une norme sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices inversibles forment un ensemble ouvert de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{N})$.

Exercice 2

1. Rappeler une définition d'un espace connexe et démontrer que l'image d'un espace connexe par une application continue à valeurs dans un autre espace constitue une partie connexe de ce dernier.
2. Soit f une application continue et injective de $\mathbb{R}$ dans lui-même et soit g l'application définie dans $\mathbb{R}^2$ par la relation $g(x,y) = f(x) - f(y)$. On pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$.
   (a) Montrer que g est continue dans $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que C est connexe et que $0 \notin g(C)$.
   (c) En déduire que f est strictement monotone.

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$, $E_\alpha = \mathcal{C}^1([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions numériques définies, continues et continuement dérivables dans l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$ et soit $\| \ \|$ la norme définie dans E_α par

$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \in [-\alpha, \alpha]} |f'(x)|.$$

1. (a) Montrer que si $f \in E_\alpha$, alors $|f(x)| \leq \|f\|(|x| + 1)$ sur $[-\alpha, \alpha]$.
   (b) Montrer que $(E_\alpha, \| \ \|)$ est un espace de Banach.
2. Soit Φ l'application définie de $(E_\alpha, \| \ \|)$ vers lui-même par

$$f \mapsto \Phi(f) : \Phi(f)(x) = \frac{1}{3} \int_0^x t f(t) dt + \sin(x^2) .$$

   (a) Montrer que Φ est lipschitzienne dans $(E_\alpha, \| \ \|)$.

T.S.V.P.

(b) Si $\alpha = 1$, montrer que l'application Φ admet un point fixe dans l'espace E_1 correspondant.

3. Soit h le point fixe de Φ dans E_1 étudié dans la question 2.(b) ci-dessus. Déterminer une équation différentielle du premier ordre non homogène satisfaite par h et préciser une condition initiale correspondante.

Exercice 4

Soit (E, d) un espace métrique, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E et soit $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non vide.
2. Si U est un ouvert de E contenant K, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $K_n \subset U$.
3. Si pour chaque $\epsilon > 0$, on note $U_\epsilon := \{x \in E : \inf_{y\in K} d(x, y) < \epsilon\}$, montrer que U_ϵ est un ouvert borné contenant K.
4. Si A est une partie bornée non vide de E, on note $\delta(A) := \sup_{x,y\in A} d(x, y)$ le diamètre de A.
   (a) Donner une estimation de la quantité $\delta(U_\epsilon) - \delta(K)$ pour chaque ensemble U_ϵ étudié dans la question 3. ci-dessus.
   (b) Montrer que $\delta(K) = \lim_{n\to+\infty} \delta(K_n)$.