

---

## Examen M303 du 9 Janvier 2009

---

### Eléments de réponse et barème

### Questions du cours (4 points)

- (2 points)** Soit  $B = B_1 \cup B_2$ ,  $B_i = U_i \cap B$  et supposons que  $U_1$  et  $U_2$  sont des ouverts disjoints de  $E$ . D'après la définition de la connexité, il faut et il suffit de démontrer que  $B = B_1$  ou  $B = B_2$ , ce qui vaut dire que  $B \subset U_1$  ou  $B \subset U_2$ . Du fait que  $A \subset B$ , on obtient que  $A \subset U_1$  ou  $A \subset U_2$ , car  $A$  est connexe. On en déduit que  $\bar{A} \subset \bar{U}_1$  ou  $\bar{A} \subset \bar{U}_2$ , d'où:  $B \subset \bar{U}_1$  ou  $B \subset \bar{U}_2$ ; pour finir, il suffit de noter que  $U_1 \cap \bar{U}_2 = U_2 \cap \bar{U}_1 = \emptyset$ .
- (2 points)** Notons d'abord que toute suite de Cauchy d'éléments d'un sous-espace  $A$  est aussi suite de Cauchy pour l'espace initial  $E$  et qu'elle convergera dans  $E$  car celui-ci est complet. Si  $A$  est fermé, le sous-espace  $A$  est complet car toute suite de Cauchy de  $A$  admet une limite dans  $E$  qui appartient dans  $A$ . D'autre part, si  $A$  est complet,  $A$  est fermé car toute suite convergente de  $E$  est de Cauchy.

### Exercice (4 points)

- (1 point)** Soient  $f, g \in E$ ; on a :

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} \left| \int_0^x (t f(t)) dt \right| \leq k \|f - g\|_\infty,$$

où

$$k = \sup_{x \in [-1,1]} \left| \int_0^x |t| |dt| \right| = \sup_{x \in [-1,1]} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

- (2 points)** On a  $\|f_1 - f_0\|_\infty = 1$  et, plus généralement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n},$$

ce qui donne la convergence normale de la série  $\sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n)$  dans  $E$ . Puisque  $(E, \|\cdot\|_\infty)$  est complet, on obtient la convergence de la suite  $(f_n)$ .

- (1 point)** Soit  $f$  la limite de  $(f_n)$ ; on a  $\Phi(f) = f$ , c'est-à-dire:

$$f(x) = 1 + \int_0^x (t f(t)) dt,$$

ou encore:

$$f'(x) = x f(x), \quad f(0) = 1.$$

- (1 point; Bonus)** On a  $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ .

## Problème (12 points)

### 1. 4 points

- (a) **(1 point)** Puisque  $f$  et  $f_n$  sont supposées continues sur  $[-1, 1]$ , la fonction  $f - f_n$  l'est aussi et le sous-ensemble  $V_{n,\epsilon}$  est alors un ouvert de  $[-1, 1]$  car l'image réciproque de l'ouvert  $] - \infty, \epsilon[$  pour  $f - f_n$ .
- (b) **(0,5 point)** L'inclusion  $V_{n,\epsilon} \subset V_{n+1,\epsilon}$  vient du fait que  $f_n \leq f_{n+1}$ .
- (c) **(1 point)** La relation  $[-1, 1] = \cup_{n \geq 0} V_{n,\epsilon}$  résulte du fait qu'en tout point  $x \in [-1, 1]$ ,  $f_n(x) \leq f(x)$  et, pour  $n \rightarrow +\infty$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .
- (d) **(1,5 points)** Puisque  $[-1, 1]$  est compact, il existe un sous-recouvrement fini extrait du recouvrement ouvert  $\cup_{n \geq 0} V_{n,\epsilon}$ , c'est-à-dire:  $[-1, 1] = \cup_{n \in I_\epsilon} V_{n,\epsilon}$  pour un sous-ensemble fini  $I_\epsilon \subset \mathbb{N}$ . Soit  $N_\epsilon$  le plus grand entier appartenant à  $I_\epsilon$ ; on a, sur  $[-1, 1]$ :

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_{N_\epsilon}(x) < \epsilon$$

pour tout  $n \geq N_\epsilon$ , ce qui implique que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-1, 1]$ .

### 2. 4 points

- (a) **(1 point)** Soit  $x \in [0, 1]$ . Notons que la relation  $0 \leq p_n(x) \leq x$  est vraie pour  $n = 0$ . Supposons qu'elle est encore vraie au rang  $n = k$  et prouvons-la au rang suivant. Pour ceci, il suffit de noter que

$$p_k(x) + \frac{1}{2}(x^2 - p_k^2(x)) - x = (p_k - x) \left(1 - \frac{p_k(x) + x}{2}\right) \leq 0.$$

**(0,5 point)** La relation  $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$  résulte du fait que  $0 \leq p_n(x) \leq x$ .

- (b) **(1 point)** Si  $x \in [0, 1]$ ,  $(p_n(x))$  est une suite numérique croissante bornée et donc converge dans  $\mathbb{R}$ . Sa limite  $\ell(x)$  vérifiant la relation  $\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x^2 - \ell^2(x))$ , on obtient  $\ell(x) = x$  car  $\ell(x) \geq 0$ .

**(0,5 point)** Pour  $x \in [-1, 0[$ , il suffit de noter que les polynômes  $p_n$  sont des fonctions paires (ne dépendent que de  $x^2$ ).

- (c) **(0,5 point)** D'après la question 1d,  $(p_n)$  converge uniformément vers  $x$  sur  $[0, 1]$ .

**(0,5 point)** Puisque  $p_n$  sont pairs, on en déduit qu'ils convergent uniformément sur  $[-1, 0]$  vers  $-x$ . Ceci suffit pour conclure.

### 3. 4 points

- (a) **(1 point)** Le graphe de  $g$  est constitué de trois segments  $A_i A_{i+1}$  du plan, avec  $A_0(-1, 3)$ ,  $A_1(-\frac{1}{2}, 2)$ ,  $A_2(\frac{1}{3}, \frac{16}{3})$  et  $A_3(1, 4)$ .

- (b) **(1 point)** Toute expression de la forme  $\alpha|x + \frac{1}{2}| + \beta|x - \frac{1}{3}| + \gamma|x - 1| + c$  représente une fonction affine par morceaux et continue sur  $\mathbb{R}$ , les points "pointus" étant d'abscisse respective  $-\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  et 1. Pour identifier  $g$  à l'expression proposée, il suffit de tester, par exemple, si l'on y retrouve les quatre points  $A_i$  de la question (a) ci-dessus.

**(0,5 point)** On a  $c = \frac{3}{2}$ .

- (c) **(1,5 point)** Lorsque  $x \in [-1, 1]$ , on a  $X_i(x) \in [-1, 1]$  pour les changements de variable  $X_1(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$ ,  $X_2(x) = \frac{3x}{4} - \frac{1}{4}$  et  $X_3(x) = \frac{x-1}{2}$ , ce qui permet de dire que, d'après 2c,  $(g_n)$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers l'expression  $\frac{3}{2}\alpha|X_1(x)| + \frac{4}{3}\beta|X_2(x)| + 2\gamma|X_3(x)| + c$ , laquelle représente bien  $g$ .

4. **(3 points; Bonus)** Rappelons que toute fonction continue sur un compact est uniformément continue, ceci implique que les fonctions affines par morceaux sur  $[-1, 1]$  forment un sous-ensemble dense de  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ . En utilisant les polynômes définis dans la partie 2 du problème et en effectuant des changements de variables appropriés, on démontre que toute fonction affine par morceaux est limite uniforme de polynômes sur  $[-1, 1]$ . On en conclura ainsi...