Chapitre 5

Espaces métriques complets. Espaces de Banach

La droite réelle est complète, car toute suite numérique de Cauchy converge. Cette propriété n'est plus vraie pour le corps des nombres rationneles, ni pour certains espaces fonctionnels. Quand l'espace est complet, rsoudre un problème se fait souvent au moyen d'un algorithme conduisant à une suite convergente : c'est là la puissante force du théorème du point fixe.

Nota – Ce chapitre est essentiellement sur les espaces métriques.

5.1 Suites de Cauchy. Espaces complets

Soit (E, d) un espace métrique.

Définition 5.1.1 Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E est dite *de Cauchy* si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $N > 0$ tel que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ pour n, $m \geq N$.

Proposition 5.1.2 **(i)** *Toute suite de Cauchy est bornée.*

(ii) *Toute suite convergente est de Cauchy.*

(iii) *Une suite de Cauchy converge ssi elle admet une valeur d'adhérence.*

Voici deux exemples montrant que la limite d'une suite de Cauchy peut sortir de l'espace dans lequel est donnée la suite.

Exemple 5.1.3 **(a)** $E = \mathbb{Q}$: une suite de nombre rationnels ne converge pas nécessairement vers un nombre rationnel.

(b) $E = \mathcal{C}^0([0,1]; \mathbb{R})$ avec d_1 : la fonction $1_{[\frac{1}{2},1]}$ peut être bien une limite d'une suite de Cauchy dans (E, d_1).

Définition 5.1.4 Un espace métrique est dit *complet* si toute suite de Cauchy admet une (unique) limite dans l'espace.

On notera que tout espace compact est complet. Voici un exemple fondamental d'espace complet non compact.

Théorème 5.1.5 $\mathbb{R}$ *est complet.*

Corollaire 5.1.6 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Pour ce dernier énoncé, on notera que

Proposition 5.1.7 *L'espace métrique produit d'un nombre fini d'espaces métriques complets est complet.*

Un autre espace complet est l'ensemble des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$ muni de la convergence uniforme d_∞. En effet, plus généralement, on a :

Théorème 5.1.8 *Soit* $\mathcal{F}_b(E; F)$ *l'ensemble des fonctions définies et bornées d'un ensemble* E *à valeurs dans un espace métrique* (F, δ)*. Si* F *est complet, alors* $(\mathcal{F}_b(E; F), d_\infty)$ *est un espace métrique complet.*

Remarque 5.1.9 Pour la preuve du dernier théorème, à une suite de Cauchy on construit un candidat potentiel pour sa limite (à l'aide de la complétude fournie quelque part) puis vérifie que ceci est véritablement la limite.

Corollaire 5.1.10 *Si* (E, d) *est un espace métrique (ou topologique) compact, alors l'ensemble des fonctions numériques continues sur* E *constitue un espace complet pour la convergence uniforme.*

5.2 Propriétés des espaces complets

On avait déjà dit que tout espace métrique compact est complet et que l'espace produit d'un nombre fini d'espaces métriques complets est complet.

Proposition 5.2.1 *Dans un espace métrique complet, les sous-espaces complets sont les fermés.*

Proposition 5.2.2 *La réunion d'un nombre fini de sous-espaces complets d'un espace métrique est complète.*

Rappelons que dans un espace compact, une suite décroissante de fermés ne peut être d'intersection vide que si presque tous les fermés sont vides. Un résultat similaire est donné ci-dessous.

Théorème 5.2.3 (Lemme de Cantor) *Dans un espace complet, si* $(F_n)_{n\geq 0}$ *est une suite décroissante de fermés non vides telle que*

$$\delta(F_n) = \sup_{x,y\in F_n} d(x, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

alors $\cap_{n\geq 0} F_n$ *est un singleton.*

Corollaire 5.2.4 (Théorème de Baire) *Dans un espace complet, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses reste une partie dense.*

Le théorème de Baire résulte du lemme de Cantor de la manière suivante : soit (U_n) une suite d'ouverts denses et soit V un ouvert ; choisissons $x_0 \in U_0 \cap V$ et $r_0 > 0$ tels que $V_0 := B(x_0, r_0) \subset U_0 \cap V$, donc $F_0 := \bar{B}(x_0, \frac{r_0}{2}) \subset U_0 \cap V$; on recommence avec le couple (V_0, U_1) à la place de (V, U_0), ainsi la suite... ce qui donnera la suite des fermées F_n, à laquelle on peut appliquer Baire, pour obtenir un élément commun à V et $\cap_{n \geq 0} U_n$.

Corollaire 5.2.5 *Un espace vectoriel normé ne peut pas être une réunion dénombrable d'hyperplans.*

5.3 Espaces de Banach

Les espaces vectoriels normés font partie des espaces métriques de première importance.

Définition 5.3.1 Un espace vectoriel normé complet est appelé *espace de Banach.*

Exemple 5.3.2 Les $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ et tous les espaces vectoriels normés de dimension finie sont des espaces de Banach.

Une technique bien pratique est d'écrire, dans un espace vectoriel, une suite sous forme d'une série de la manière suivante :

$$a_n := \sum_{m=0}^{m} x_m, \quad x_0 = a_0,\ x_1 = a_1 - a_0,\ x_2 = a_2 - a_1,\ \ldots$$

Cela étant, on a (sous réserve que la convergence ait lieu en termes de la suite ou de la série) :

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{m=n+1}^{n+k} x_m\,, \quad a_n \to \sum_{m=0}^{\infty} x_m\ (n \to \infty)\,.$$

Définition 5.3.3 Dans un espace vectoriel normé, une série $\sum_{n \geq 0} x_n$ est dite *normalement convergente* si la série $\sum_{n \geq 0} \|x_n\|$ est bornée (donc converge).

Théorème 5.3.4 *Un espace vectoriel normé E est de Banach ssi toute série normalement convergente converge dans E.*

5.4 Théorème du point fixe

Soit f une application d'un espace métrique (E, d) dans un autre, (F, δ).

Définition 5.4.1 **(a)** L'application f est dite *lipschitzienne* s'il existe $k > 0$ tel que, pour tout x, $y \in E$, on a : $\delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

(b) Lorsqu'on peut choisir $k \in]0, 1[$, on dit que f est *contractante.*

Proposition 5.4.2 *Toute application lipschitzienne est continue et, en plus, uniformément continue.*

Dans la suite, soit $(E, \| \ \|)$ un espace de Banach et soit $f : E \to E$ une application.

Définition 5.4.3 On dit que f admet un *point fixe* s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Théorème 5.4.4 *Toute contraction d'un espace de Banach admet un unique point fixe.*

L'existence du point fixe résulte de l'itération de f à partir d'un point arbitraire $x_0 \in E$ de E : on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ et on vérifie que la suite (x_n) converge dans E, car Cauchy.

Remarque 5.4.5 Résoudre une équation du genre $F(u) = 0$ revient à considérer le point fixe de l'application $f(u) := F(u) + u$. Le théorème d'exstence Cauchy-Lipschitz en thérie des équations différentielles en est un exemple important. Voici un modèle de travail :

$$y' = y,\ y(0) = 1; \quad y(t) - 1 = \int_0^t y(s)ds;$$

$$F(y)(t) = y(t) - 1 - \int_0^t y(s)ds\,; \quad f(y)(t) = -1 - \int_0^t y(s)ds,$$

$$E = \mathcal{C}^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \mathbb{R}),\ \|y\| = \sup_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |y(t)| + \sup_{t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |y'(t)|\,.$$

5.5 Espaces de fonctions continues. Théorème d'Ascoli

Du théorème 5.1.8, on déduit le résultat suivant.

Proposition 5.5.1 *Si F est un espace de Banach, les ensembles $\mathcal{F}_b(E, F)$ (E ensemble), $\mathcal{C}_b(E, F)$ (E espace topologique) munis de la norme $\| \ \|_\infty$ de la convergence uniforme sont des espaces de Banach.*

Dans un même ordre d'idée, on notera que $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de Banach avec la norme $\mathcal{N}_k$:

$$\mathcal{N}_k(u) = \sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_\infty.$$

Remarque 5.5.2 Si E est un espace métrique compact, on a $\mathcal{C}_b(E, F) = \mathcal{C}(E, F)$.

Remarque 5.5.3 Comme on l'avait dit au paragraphe 5.1, $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ est incomplet pour la distance d_1.

Si le théorème du point fixe permet de résoudre, par itération ou par un procédé algorithmique, des équations fonctionnelles au moyen des applications contractantes, le théorème d'Ascoli, dit aussi d'Arzela-Ascoli, affirmera que l'absence du caractère contractant peut souvent être remédiée par la notion d'équicontinuité, cette dernière conduisant à la compacité de l'espace fonctionnel attaché. (Les fonctions forment rarement des espaces compacts, même pour la boule unité de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ avec la norme de la convergence uniforme)

Définition 5.5.4 Soit Σ une famille d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (F, δ). On dit que Σ est *équi-continue* si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ avec ceci : pour toute $u \in \Sigma$ et x, $y \in E$,

$$d(x, y) \leq \eta \Rightarrow \delta(u(x), u(y)) \leq \epsilon.$$

Exemple 5.5.5 La famille des moômes $(x^n)_n$ est équi-continue sur $[0, \alpha)$ pour tout $\alpha < 1$ mais ne l'est plus pour $\alpha = 1$.

Remarque 5.5.6 Toute fonction d'une famille équi-continue est uniformément continue. Dans la pratique, E sera souvent choisie compacte.

Par conséquent, si Σ est une famille équi-continue, alors $\Sigma \subset \mathcal{C}(E, F)$.

Théorème 5.5.7 (Théorème d'Ascoli) *Soit (u_n) une suite équi-continue de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $\max_{t\in[0,1]} |u_n(t)| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe une suite extraite de (u_n) qui converge uniformément sur $[0, 1]$.*

Formulation équivalente : *si $\Phi \subset (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ est une partie bornée et équicontinue, alors Φ est relativement compacte.*

Remarque 5.5.8 Le cadre de travail $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ peut être bien élargi...