

Chapitre 4

Connexité

Si la compacité exprime une finitude (sous-recouvrement fini) ou une petitesse (sous-ensemble fermé et borné) d'une topologie, la connexité demande une continuité des voisinages d'un espace ou le caractère d'avoir un seul morceau : $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas connexe car il possède deux composantes disjointes d'une de l'autre. Sur la droite réelle toute partie connexe est un intervalle. La propriété que toute application continue envoie un intervalle en un autre se généralisera de la façon suivante : l'image "continue" d'un connexe reste connexe.

Nota – Ce chapitre peut être intitulé **Espaces topologiques connexes**.

4.1 Définition. Premières propriétés

Commençons par le cadre général et soit (E, \mathcal{U}) un espace topologique.

Définition 4.1.1 (a) One dit que E est un espace topologique *connexe* si les seules parties à la fois ouvertes et fermées sont \emptyset et E : *tout ou rien*.

(b) Une partie A de E est dite *connexe* si l'espace induit (A, \mathcal{U}^A) l'est.

Exemple 4.1.2 (a) Sur la droite réelle, ni \mathbb{R}^* ni $[0, 1] \cup]2, 3]$ n'est pas connexe, car $] -\infty, 0[$ est à la fois un ouvert et un **fermé** pour \mathbb{R}^* , et il en est de même pour $[0, 1]$ sur $[0, 1] \cup]2, 3]$.

(b) Un singleton forme une partie connexe dans \mathbb{R} mais ni \mathbb{N} , ni \mathbb{Z} , ni \mathbb{Q} n'est connexe dans \mathbb{R} .

Le résultat suivant affirme qu'un connexe ne peut être partagé par deux ouverts disjoints.

Proposition 4.1.3 *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) A est une partie connexe de (E, \mathcal{U}) .

(ii) pour toute paire (U_1, U_2) d'ouverts disjoints de E telle que $A \subset (U_1 \cup U_2)$, on a $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$.

On rappelle qu'un sous-ensemble A de \mathbb{R} est un intervalle si la propriété suivante est vérifiée : si $x, y \in A$, avec $x < y$, alors $[x, y] \subset A$.

Théorème 4.1.4 *Les seules parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.*

4.2 Fonctions continues et connexité

Commençons par la caractérisation suivante de la connexité en termes des fonctions continues à valeurs dans $\{0, 1\}$:

Théorème 4.2.1 *Un espace topologique (E, \mathcal{U}) est connexe ssi les seules applications continues de (E, \mathcal{U}) vers $\{0, 1\}$ sont les fonctions constantes.*

On obtient alors :

Théorème 4.2.2 *Soient (E, \mathcal{U}) et (F, \mathcal{V}) des espaces topologiques et f une application continue de (E, \mathcal{U}) vers (F, \mathcal{V}) . Alors l'image par f de tout connexe de (E, \mathcal{U}) reste connexe dans (F, \mathcal{V}) .*

Comme application, on vérifie que l'ensemble des fonctions constantes constitue une partie connexe dans $(\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), d_\infty)$, en considérant l'application continue

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}); \quad \Phi(a) = f_a, \quad f_a(x) = a \quad \forall x \in [0, 1].$$

Rappelons le cas particulier classique suivant :

Théorème 4.2.3 (Théorème des valeurs intermédiaires) *L'image d'un intervalle par une fonction numérique continue reste un intervalle.*

Par ailleurs, avec le théorème 4.2.1, on démontre

Corollaire 4.2.4 *L'adhérence d'une partie connexe est connexe.*

Pour ce dernier, remarquons que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, relation traduisant, dans le cas métrique, le fait que, si $x_n \rightarrow x$, alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

4.3 Composantes connexes

Lorsque deux connexes d'intersection non vide se mettent ensemble, on obtient un connexe : ceci se voit avec le théorème 4.2.2. En effet, on a l'énoncé général qui suit.

Proposition 4.3.1 *Dans un espace topologique, toute famille de parties connexes ayant deux à deux une intersection non vide a une réunion connexe.*

Définition 4.3.2 Soit (E, \mathcal{U}) un espace topologique et soit $a \in E$. On appelle *composante connexe de a* le plus grand connexe de E contenant a .

Cette définition a un sens, d'après la proposition qui la précède, car il suffit de réunir tous les connexes contenant a .

Remarque 4.3.3 La propriété d'appartenir à une même composante connexe définit une relation d'équivalence et les classes d'équivalence correspondantes sont exactement les différentes composantes connexes. Par conséquent, un espace topologique est réunion disjointe de composantes connexes.

4.4 Connexité par arcs

Lorsque'on peut passer continument d'un point quelconque à un autre dans un espace donné, on dira que celui-ci est connexe par arcs. Plus précisément,

Définition 4.4.1 Soit (E, \mathcal{U}) un espace topologique. Un *chemin* dans (E, \mathcal{U}) est la donnée d'une application continue de l'intervalle fermé $[0, 1]$ à valeurs dans (E, \mathcal{U}) .

Définition 4.4.2 Une partie A de (E, \mathcal{U}) est dite *connexe par arcs* ssi deux points quelconques de E peuvent être reliés par un chemin.

Remarque 4.4.3 La connexité par arcs est bien la connexité intuitive qu'on possède dans la vie courante.

Théorème 4.4.4 1. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

2. *L'image continue d'un connexe par arcs reste connexe par arcs.*

Comme application on peut noter que le graphe d'une application numérique continue sur un intervalle de la droite réelle constitue une partie connexe par arcs du plan réel.

Exercice 4.4.5 Le graphe Γ de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, 1]$ est connexe dans \mathbb{R}^2 , et il en est de même pour son adhérence, $\bar{\Gamma}$. Pourtant, Γ est connexe par arcs alors que $\bar{\Gamma}$ ne l'est pas.

Proposition 4.4.6 *Lorsque deux connexes par arcs se rencontrent, leur réunion fait un nouveau connexe par arcs.*

Proposition 4.4.7 *Dans \mathbb{R}^n ou, plus généralement, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, tout convexe est connexe par arcs.*

Remarque 4.4.8 (a) On notera en particulier le cas des boules.

(b) Les domaines étoilés sont connexes par arcs.