

Chapitre 3

Espaces métriques compacts

Tout intervalle fermé et borné est un compact en ce sens que toutes ses suites ont une suite extraite convergeant dans l'intervalle. Ceci peut se voir par un procédé bien intuitif : on découpe l'intervalle en deux parts égales et une infinité de termes de la suite vont rester dans l'un des sous-intervalles obtenus ; on travaille ce sous-intervalle accompagné de cette suite extraite et on recommence le découpage. On voit apparaître une infinité de termes de la suite initiale qui vont être *coincés* dans une série de sous-intervalles emboîtés : d'où une sous-suite convergente. La propriété d'avoir une sous-suite convergente reste valable pour toute suite bornée. La limite de la sous-suite appartient à l'intervalle étudié car ce dernier est fermé.

Inversement au procédé de découper un intervalle en plusieurs sous-intervalles, la compacité sera aussi caractérisée par une finitude dans les recouvrements par des ouverts. Cette caractérisation sert à la définition d'un espace compact dans le cadre topologique (sans être nécessairement métrique).

Un résultat classique affirme qu'une application continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses extréma ; il sera généralisé sous la forme suivante : toute application continue envoie un compact sur un compact.

3.1 Définition. Premières propriétés

Soit (E, d) un espace métrique.

Définition 3.1.1 On dit que (E, d) est un *espace métrique compact* si toute suite d'éléments de (E, d) admet une suite extraite convergeant vers un point de E . Une partie A de E est dite *compacte* si le sous-espace métrique (A, d) est compact.

En d'autres termes, (E, d) est un espace métrique compact si toutes ses suites admettent au moins une *valeur d'adhérence* dans E .

Théorème 3.1.2 (Propriété de Bolzano-Weierstrass) *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si toute partie infinie A de E admet un point d'accumulation dans E , càd : il existe $a \in E$ dont tout voisinage contient une infinité d'éléments de A .*

Pour simplifier, on dira qu'une partie A est *bornée* si

$$\rho(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y) < \infty.$$

Parfois, $\rho(A)$ est appelé *diamètre* de A .

Proposition 3.1.3 *Si A est une partie compacte de (E, d) , Alors A est à la fois fermée et bornée.*

Pour démontrer cet énoncé, on peut se servir du lemme qui suit.

Lemme 3.1.4 *Les trois conditions sont équivalentes.*

(i) On a $\rho(A) < \infty$.

(ii) Il existe $a \in A$ tel que

$$\rho(a, A) := \sup_{x \in A} d(a, x) < +\infty.$$

(iii) Pour tout $a \in A$,

$$\rho(a, A) := \sup_{x \in A} d(a, x) < +\infty.$$

Exemple 3.1.5 (a) $[0, 1]$ est compact mais ni $]0, 1[$, ni \mathbb{R} ne l'est.

(b) Toute partie finie d'un espace métrique est compacte.

(c) Dans l'espace $(\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R}), d_\infty)$, soit A l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ telles que $\max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \leq 1$. Puisque $f \mapsto d_\infty(f, 0)$ est une application continue de $(\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R}), d_\infty)$ vers \mathbb{R} , A est un ensemble fermé. Il est évidemment borné, et pourtant il n'est pas compact.

3.2 Parties compactes de \mathbb{R}^n

Commençons par la propriété suivante :

Proposition 3.2.1 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques et considérons l'espace métrique produit $(E \times E', D)$, avec par exemple $D((x, x'), (y, y')) = d(x, y) + d'(x', y')$. Alors $E \times E'$ est compact ssi E et E' sont tous compacts.*

En ce qui concerne l'espace euclidien de dimension n , \mathbb{R}^n , on a, plus précisément :

Théorème 3.2.2 *Une partie A de \mathbb{R}^n est compacte ssi A est à la fois fermée et bornée.*

Corollaire 3.2.3 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une partie est compacte ssi elle est à la fois fermée et bornée.*

Pour obtenir le corollaire, il suffit de faire remarquer que tout espace vectoriel normé de dimension n sur le corps des réels est homéomorphe à l'espace euclidien \mathbb{R}^n .

Le résultat suivant peut être vu comme "la réciproque" du théorème 3.2.2.

Théorème 3.2.4 (Théorème de Riesz ; Voir TD) *Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé. E est de dimension finie ssi sa boule unité fermée $\bar{B}(0; 1)$ est compacte.*

En d'autres termes, un espace vectoriel normé est localement compact (ie. chaque point admet un voisinage compact) ssi il est de dimension finie.

3.3 Compacité et recouvrements ouverts

Soit A une partie non vide de (E, d) .

Définition 3.3.1 On appelle *recouvrement ouvert* de A toute collection d'ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$ de (E, d) telle que $A \subset \cup_{i \in I} U_i$. Le recouvrement est dit *fini* si I est fini.

Théorème 3.3.2 *Un espace métrique (E, d) est compact ssi, de tout recouvrement ouvert de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

La preuve peut se faire à l'aide du lemme suivant.

Lemme 3.3.3 (Voir TD) *Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E . Si E est compact, alors il existe $\rho > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe $i_x \in I$ tel que $B(x, \rho) \subset U_{i_x}$.*

Remarque 3.3.4 Dans un cadre plus étendu, un espace topologique est dit *compact* s'il est séparé (au sens de Hausdorff) et si de tout son recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini.

Corollaire 3.3.5 *Une partie A de (E, d) est compacte ssi, de toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de E telle que $A \subset \cup_{i \in I} U_i$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $A \subset \cup_{i \in J} U_i$.*

Corollaire 3.3.6 *Dans un espace métrique compact, si l'intersection d'une famille de fermés est vide, alors une sous-famille finie est d'intersection vide.*

3.4 Applications continues d'un espace compact

Rappelons que toute fonction numérique continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes inférieure et supérieure. Cette propriété implique que $f([a, b]) = [m, M]$ lorsque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Voici un résultat qui va dans le même sens.

Proposition 3.4.1 *Si f est une application continue de (E, d) vers (F, δ) , alors $f(K)$ est compact dans F pourvu que K soit compact dans E . Autrement dit, l'image par une application continue d'un compact reste un compact.*

Corollaire 3.4.2 *Toute fonction continue sur un espace métrique compact à valeurs dans \mathbb{R} est bornée et atteint ses bornes inférieure et supérieure.*

Exemple 3.4.3 (Voir TD) *Soient A, B deux parties compactes de (E, d) . A et B sont disjoints ssi $d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) > 0$. Pour voir ceci, on munit $E \times E$ de la métrique produit et on notera que l'application $d : E \times E \rightarrow [0, \infty)$ est continue et que $A \times B$ est compact dans $E \times E$.*

Corollaire 3.4.4 *La compacité est une notion topologique en ce sens que, si (E, d_1) et (E, d_2) sont topologiquement équivalents, alors la compacité par rapport à l'une distance entraîne celle par rapport à l'autre.*

Ceci découle de la proposition 3.4.1.

Le résultat suivant s'obtient avec la caractérisation de la compacité en termes de sous-recouvrements ouverts finis.

Théorème 3.4.5 (Heine) *Soient (E, d) et (F, d') des espaces métriques. On suppose que E est compact. Alors toute application continue de (E, d) vers (F, d') est uniformément continue.*