

Chapitre 2

Applications continues

On verra que la continuité est essentiellement une notion topologique, non réservée spécialement aux espaces métriques. Par contre, dans le dernier sous-paragraphe, on expliquera quelques notions liées à la continuité mais plutôt spécifiques dans le cas linéaire entre deux espaces vectoriels normés.

2.1 Applications continues d'espaces métriques

Pour la continuité d'une application entre deux espaces métriques, on commence par la définition "simple" suivante.

Définition 2.1.1 Soient (E, d_E) et (F, d_F) . Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *continue* en a si $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow f(a)$.

Exemple 2.1.2 Soit $a \in E$ et (E, d) un espace métrique. L'application $x \mapsto d(a, x)$ est continue de E dans $[0, \infty[$.

Théorème 2.1.3 Soit $f : E \rightarrow F$ et soit $b = f(a)$. f est continue en a ssi pour tout $V \in \mathcal{V}_b$, on a $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$.

Corollaire 2.1.4 (Caractérisation d'une application continue) Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes.

- (i) $f : E \rightarrow F$ est continue en tout point de E .
- (ii) Pour tout ouvert U de (F, d_F) , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de (E, d_E) .
- (iii) Pour tout fermé W de (F, d_F) , $f^{-1}(W)$ est un fermé de (E, d_E) .

Comme application, on notera que si f, g sont des applications numériques continues sur un espace métrique (E, d) , alors $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\}$ est un fermé de E , $\{x \in E : f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de E .

Comme dans le cas classique, on peut montrer que la composée de deux applications continues reste continue.

Définition 2.1.5 (a) On appelle *homéomorphisme* toute application "bicontinue" en ce sens que f établit une bijection entre les espaces donnés et que f et son inverse sont toutes continues.

(b) Deux espaces sont dits *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme entre eux.

Exemple 2.1.6 Une isométrie est, par définition, une application d'un espace métrique dans lui-même conservant la métrique de tout couple de points : $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. On peut vérifier que toute isométrie est un homéomorphisme.

Proposition 2.1.7 Deux distances d_1 et d_2 sur E sont topologiquement équivalents ssi l'application identité est un homéomorphisme entre (E, d_1) et (E, d_2) .

Applications lipschitziennes

Une application $f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $d_F(f(x), f(y)) \leq C d_E(x, y)$. Lorsque la constante C peut être choisie < 1 et que $E = F$, on dit que f est une application contractante. Il est facile de démontrer le

Théorème 2.1.8 Toute application lipschitzienne est continue et, en particulier, uniformément continue en ce sens que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in E$, $d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \epsilon$.

La proposition 2.1.7 ci-dessus peut alors être renforcée de la façon suivante :

Proposition 2.1.9 Deux distances d_1 et d_2 sur E sont équivalents ssi l'application identité est un homéomorphisme lipschitzien entre (E, d_1) et (E, d_2) .

2.2 Applications continues d'espaces topologiques

Soient (E, \mathcal{U}) et (F, \mathcal{W}) des espaces topologiques.

Définition 2.2.1 Une application $f : (E, \mathcal{U}) \rightarrow (F, \mathcal{W})$ est dite *continue en* $a \in E$ si, pour tout voisinage W de $f(a)$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a .

Proposition 2.2.2 Soit $f : (E, \mathcal{U}) \rightarrow (F, \mathcal{W})$, $a \in E$ et $b = f(a)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) f est continue en $a \in E$.
- (ii) Pour tout $W \in \mathcal{W}_b$, il existe $U \in \mathcal{U}_a$ avec $U \subset f^{-1}(W)$.

On remarquera que $U \subset f^{-1}(W) \Leftrightarrow f(U) \subset W$.

Théorème 2.2.3 (Caractérisation d'une application continue) Une application $f : (E, \mathcal{U}) \rightarrow (F, \mathcal{W})$ est continue en tout point de E ssi l'image réciproque d'un ouvert par f est un ouvert.

Remarque 2.2.4 L'image d'un ouvert par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert!!!

Corollaire 2.2.5 Soit X un sous-ensemble non vide de (E, \mathcal{U}) et soit ι l'application qui "injecte" X dans E : $\iota(x) = x$ pour tout $x \in X$. Alors ι est continue de (X, \mathcal{U}^X) dans (E, \mathcal{U}) .

Définition 2.2.6 Une application $f : (E, \mathcal{U}) \rightarrow (F, \mathcal{W})$ est appelée *homéomorphisme* si f est une bijection et f, f^{-1} sont continues partout. Si c'est le cas, les espaces topologiques $(E, \mathcal{U}), (F, \mathcal{W})$ sont dits *homéomorphes*.

Théorème 2.2.7 *Supposons que $f : (E, \mathcal{U}) \rightarrow (F, \mathcal{W})$ est une bijection. Alors f est un homéomorphisme ssi f est une application continue et ouverte (en ce sens que l'image d'un ouvert est un ouvert).*

Remarque 2.2.8 Si E contient plus de deux éléments, l'application "identité" $x \mapsto x, (E, \mathcal{G}) \rightarrow (E, \mathcal{D})$ n'est continue nulle part lorsque \mathcal{G} est la topologie grossière et \mathcal{D} , discrète. Pourtant cette même application est continue de (E, \mathcal{D}) vers (E, \mathcal{G}) .

2.3 Applications linéaires continues d'espaces vectoriels normés

Une grande nouveauté est qu'une application linéaire d'espaces vectoriels normés n'est pas nécessairement continue si l'espace au départ est de dimension infinie, vu l'exemple ci-dessous :

Exemple 2.3.1 L'application linéaire

$$f : (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto f(\phi) = \phi(0)$$

n'est continue nulle part dans $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.

En effet, on peut observer que

Théorème 2.3.2 *Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Soit $x_0 \in E$ un élément quelconque. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) f est continue sur E .
- (ii) f est continue en $0 \in E$.
- (iii) f est continue en x_0 .
- (iv) Il existe $C_0 > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq C_0 \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.
- (v) On a $\sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|f(x)\|_F < \infty$.

Corollaire 2.3.3 *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire définie sur E est continue.*

Dans le cas général, lorsque $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est une application linéaire continue, on définit la norme de f , notée $\|f\|$, par la relation suivante :

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

On dira que f est bornée (sur la sphère unité) si $\|f\| < \infty$. D'où l'équivalence entre dire que f est continue et dire que f est bornée ou encore dire que f est lipschitzienne.