Chapitre 1

Généralités sur les espaces métriques et introduction aux espaces topologiques

Les notations $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ sont comme d'habitude.

On utilisera les normes $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$. De même, on étudiera les normes analogues $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ sur l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^\infty([a,b];\mathbb{R})$, avec $-\infty < a < b < +\infty$:

1.1 Distance

Mesurer la proximité de deux points du plan ou deux objets dans la vie quotidienne, c'est de connaître la distance entre eux. C'est à partir de ceci qu'on va commencer notre cours.

Définition 1.1.1 Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ possédant les trois propriétés qui suivent :

(i) $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$;

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ pour tout couple $(x,y) \in E \times E$;

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pour tout triple $(x,y,z) \in E^3$.

Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance.

Remarque 1.1.2 **(a)** La propriété (ii) ci-dessus dit que la distance est *symétrique* alors que (iii) s'appelle *inégalité triangulaire*.

(b) On entend par espace métrique la donnée d'un couple formé d'un ensemble avec une métrique définie au-dessus ; ainsi, on notera (E,d) pour désigner une telle donnée. On peut munir plusieurs métriques sur un même ensemble.

Exemple 1.1.3 **(a)** La distance habituelle sur la droite réelle et celle du plan.

(b) La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$; les distances max et $+$.

(c) Si $E = \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$, on peut poser (**Voir TD**)

$$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|, \quad d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

et

$$d_2(f,g) = \Big[\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx\Big]^{1/2}.$$

(d) La distance discrète sur un ensemble donné : $d(x,y) = 0$ ou 1 selon si $x = y$ ou non.

(e) La distance SNCF dans le plan est définie par : $d(P,Q) = PQ$ si P et Q sont alignés à O, $d(P,Q) = OP + OQ$ sinon. Ici O désigne Paris.

Distances équivalentes

Pour comparer plus tard les structures topologiques définies par deux métriques différentes, on introduit la notion d'équivalence entre deux distances :

Définition 1.1.4 Deux distances d_1 et d_2 sur E sont dites *équivalentes* s'il existe C_1, $C_2 > 0$ tels que, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)\,.$$

Exemple 1.1.5 **(a)** Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_2, d_∞ et d_1 sont deux à deux équivalentes.

(b) Sur $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$, les distances d_2, d_∞ et d_1 ne sont pas équivalentes (**Voir TD**).

Exercice 1.1.6 Sur $\mathbb{R}$, déterminer lesquelles sont équivalentes parmi les distances suivantes : δ est la distance discrète, $|\ |$ est la distance habituelle, d et D sont les distances définies par

$$d(x,y) = \min(|x-y|, 1), \quad D(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,.$$

Distance induite et distance produit

Proposition 1.1.7 *Soit A un sous-ensemble de l'espace métrique (E,d). La restriction de d sur $A \times A$ définit une distance sur A.*

Par conséquent, tout sous-ensmble d'un espace métrique constitue un espace métrique.

La distance ainsi obtenue sera notée d_A ou, simplement, d si aucune confusion est prête. C'est ce qu'on appelle *distance induite sur A par d*.

Proposition 1.1.8 *Soient (E_1,d_1), ..., (E_n,d_n) des espaces métriques. Soit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$; pour x, $y \in E$ avec $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$, on pose $d(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i,y_i)$. Alors d est une distance sur E.*

Exercice 1.1.9 Dans la proposition 1.1.8, si l'on pose

$$\delta(x,y) = \sum_{1\le i\le n} d_i(d_i, y_i), \quad D(x,y) = \big(\sum_{1\le i\le n} (d_i(x_i,y_i))^2\big)^{1/2},$$

alors ce sont deux distances sur E qui sont équivalentes à d.

Espaces vectoriels normés

C'est une classe importante d'espaces métriques, dont les espaces euclidiens font le modèle de base. En gros, un espace vectoriel normé est un espace vectoriel sur lequel il existe une métique compatible avec sa structure d'espace vectoriel, càd : avec l'addition interne et le produit par un scalaire. Soit donc E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1.10 (Rappel) *Une norme sur* E *est une application* $\|\ \| : E \to [0, +\infty[$ *avec trois conditions :*

(i) $\|x\| = 0$ *ssi* $x = \vec{0}$ *;*

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *pour tout* $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$ *;*

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *pour* $x,\ y \in E$.

Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.

Une norme est souvent notée $\mathcal{N}$, au lieu de $\|\ \|$.

Remarque 1.1.11 **(a)** *Dans (iii),* $x + y$ *peut être remplacé par* $x - y$.

(b) *La propriété (iii) s'appelle* inégalité triangulaire (Un dessin pour illustrer le cas de $\mathbb{R}^2$, avec la norme euclidienne correpondante)*.*

(c) *De (iii), on déduit :* $\|x + y\| \ge |\|x\| - \|y\||$.

Proposition 1.1.12 *Si l'on pose* $d(x, y) = \|x - y\|$, (E, d) *devient un espace métrique.*

Exemple 1.1.13 **(a)** $(\mathbb{R}, |\ |)$ *;* $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$, *avec* $\|\ \|$ *la norme euclidienne.*

(b) *Le plan complexe* $\mathbb{C}$.

(c) *Pour une suite numérique bornée (à valeurs réelles ou complexes)* $(u_n)_{n\ge 0}$ *:* $\|(u_n)_{n\ge0}\| = \sup_{n\ge 0} |u_n|$.

(d) *Sur* $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, *plusieurs normes sont possibles :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|; \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx; \quad \|f\|_2 = \big(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\big)^{1/2}.$$

Définition 1.1.14 (Rappel) *Deux normes* $\mathcal{N}_1$ *et* $\mathcal{N}_2$ *de* E *sont dites équivalentes s'il existe* $C_1,\ C_2 > 0$ *tels que, pour tout* $x \in E$ *:*

$$C_1\mathcal{N}_1(x) \le \mathcal{N}_2(x) \le C_2\mathcal{N}_1(x)\,.$$

Remarque 1.1.15 **(a)** *On sait que toutes les normes sur* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes (***Voir TD***).*

(b) *Dans l'exemple 1.1.13 (d), les normes ne sont pas équivalentes.*

(c) *Deux normes équivalentes induisent deux métriques équivalentes.*

1.2 Topologie définie par une distance

Rappelons qu'une fonction numérique est dite *continue* en un point sur la droite réelle si les points suffisamment voisins de celui-ci auront tous une image dans un intervalle donné d'avance. C'est exactement le critère $\epsilon - \delta$: on note $y_0 = f(x_0)$ et on demande à chaque $\epsilon > 0$ d'avoir un $\delta > 0$ avec :

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset f^{-1}(]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[).$$

C'est sous cette dernière forme que la notion de continuité va être généralisée à toute application entre deux espaces munis chacun d'une notion de proximité ou de voisinage, càd, entre deux espaces topologiques.

Voisinages

Soit (E, d) un espace métrique et soit $a \in E$.

Définition 1.2.1 Un sous-ensemble V de E est appelé *voisinage de* a s'il contient tous les points (suffisamment) voisins de a : il existe un $\rho > 0$ tel que $d(x, a) < \rho \Rightarrow x \in V$. Dans ce cas, on notera $V \in \mathcal{V}_a$.
Autrement, un sous-ensemble est un voisinage de a si et seulement s'il contient une boule ouverte centrée en a.

Remarque 1.2.2 Le point a appartient à tous ses voisinages.

Exemple 1.2.3 Si $\epsilon > 0$, les intervalles $[a-\epsilon, a+\epsilon]$, $]a-\epsilon, a+\epsilon]$ et $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ sont voisinages de a sur la droite réelle.

Définition 1.2.4 On note $B(a; \rho) = \{x \in E : d(x, a) < \rho\}$ et cet ensemble est appelé *boule ouverte de centre a et de rayon* ρ.

Cela étant, on peut dire que les boules ouvertes de centre a constituent *un système foncdamental de voisinages de* a, noté $\mathcal{V}_a$, en ce sens qu'un ensemble est un voisinage de a contient une telle boule.

Théorème 1.2.5 (Propriétés fondamentales des voisinages) **(i)** *Stabilité pour la réunion : la réunion de voisnages de* a *reste un voisinage de* a.

(ii) *Stabilité pour l'intersection finie : l'intersection d'un nombre fini de voisinages de* a *est un voisinage de* a.

Définition 1.2.6 La topologie définie par une distance sur un ensemble est la donnée des voisinages de chacun de l'espace métrique ainsi formé.

Distances topologiquement équivalentes

Etant données deux distances d_1, d_2 sur E, si elles sont équivalentes, alors à chaque $\rho > 0$, il existe $r > 0$, $R > 0$ tels que, en tout point $a \in E$, $B_{d_1}(a, r) \subset B_{d_2}(a, \rho) \subset B_{d_2}(a, R)$. Il s'en suit qu'un système de voisinages pour l'une l'est également pour l'autre.

Définition 1.2.7 Deux distances sont dites *topologiquement équivalentes* si chaque voisinage d'un point par rapport à l'une des distances est aussi voisinage de ce point pour l'autre distance et vice versa.

On voit que l'équivalence topologique entre deux distances est une notion plus faible que l'équivalence proprement dite.

Exemple 1.2.8 Sur la droite réelle, les distances $(x,y) \mapsto |x-y|$ et $(x,y) \mapsto \min(1,|x-y|)$ sont topologiquement équivalentes mais ne sont pas équivalentes entre elles.

1.3 Ouverts, fermés d'un espace métrique

Définition 1.3.1 Soit $a \in E$.

(a) Un sous-ensemble U de E est appelée *ouvert* de E s'il est voisinage de tous ses éléments.

(b) Un sous-ensemble F de E est appelée *fermé* de E si $E \setminus F$ est un ouvert.

En d'autres termes, $U \subset E$ est un ouvert si, pour tout $a \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que $d(x,a) < \rho \Rightarrow x \in U$; F est un fermé si pour tout $a \notin F$, il existe $\rho > 0$ tel que $d(x,a) < \rho \Rightarrow x \notin F$.

Exemple 1.3.2 Tout intervalle ouvert (fermé) est un ouvert (fermé) de la droite réelle. Dans $\mathbb{R}^n$, le "pavé" $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ est un ouvert (fermé), où I_k est un intervalle ouvert (resp. fermé) de la droite réelle.

Proposition 1.3.3 *La boule ouverte $B(a;\rho)$ est un ouvert.*

Théorème 1.3.4 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *U est un ouvert.*

(ii) *Pour tout $a \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a;\rho) \subset U$.*

(iii) *U est réunion d'une famille de boules ouvertes.*

Considérons l'esnemble des ouverts de (E,d) : $\mathcal{O} := \{U : ouverts\}$.

Théorème 1.3.5 (Propriétés fondamentales des ouverts) *On a les propriétés suivantes.*

(i) *Stabilité pour la réunion : la réunion d'ouverts est un ouvert : $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ si $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$.*

(ii) *Stabilité pour l'intersection finie : l'intersection finie d'ouverts est un ouvert : $\cap_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$ si I est fini et que $U_i \in \mathcal{O}$ pour tout $i \in I$.*

En outre, $\emptyset$, $E \in \mathcal{O}$.

Remarque 1.3.6 L'intersection non finie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert : $[0,1] = \cap_{n\geq 1}]-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$.

Proposition 1.3.7 *Si on désigne $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de (E,d), alors :*

(i) *La réunion finie de fermés est un fermé.*

(ii) *L'intersection de fermés est un fermé.*

En outre, $\emptyset$, $E \in \mathcal{F}$.

Théorème 1.3.8 Voir TD *Sur la droite réelle, Un sous-ensemble A est un ouvert ssi $A = \emptyset$ ou A est la réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts mutuellement disjoints.*

Pour démontrer ce dernier théorème, nous pouvons nous servir du lemme qui suit :

Lemme 1.3.9 *Chaque intervalle ouvert non vide contient au moins un nombre rationnel.*

1.4 Intérieur, extérieur, frontière, adhérence

Il s'agit du positionnement d'un point par rapport à un sous-ensemble donné. Dans $\mathbb{R}^2$, on a une notion très intuitive pour chacun de ces termes. Leur généralisation en cas d'un espace métrique se fait de la façon suivante.

Définition 1.4.1 Soit A un sous-ensemble non vide de l'espace métrique (E, d). Soit $a \in E$.

(a) a est *un point intérieur à* A si $A \in \mathcal{V}_a$.

(b) a est *un point extérieur à* A si a est un point intérieur au complémentaire $E \setminus A$ de A.

(c) a est *un point frontière de* A si tout voisinage de a rencontre à la fois A et $E \setminus A$.

(d) a est *adhérent à* A si tout voisinage de a rencontre A.

Notations : $\mathring{A}$ =l'intérieur de A ; ext$A$ = l'extérieur de A ; ∂A= la frontière de A ; $\bar{A}$ = l'adhérence de A.

Remarque 1.4.2 En termes des boules ouvertes :

(a) $a \in \mathring{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

(b) $a \in \mathrm{ext}A$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A = \emptyset$.

(c) $a \in \partial A$ si $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$, $B(a, r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$.

(d) $a \in \bar{A}$ si $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$.

Proposition 1.4.3 *On a les propriétés suivantes.*

(a) *$\mathring{A}$ est un ensemble ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A.*

(b) $\mathrm{ext}A = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$.

(c) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\overbrace{E \setminus A}}$ *et ∂A est un ensemble fermé.*

(d) *$\bar{A} = E \setminus \mathrm{ext}A$, $\bar{A}$ est un ensemble fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.*

En outre, on a $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$ et $E = \mathrm{ext}A \cup \mathring{A} \cup \partial A$, les trois dernières composantes étant disjointes.

Corollaire 1.4.4 *A est un ouvert (resp. fermé) ssi $A = \mathring{A}$ (resp. $A = \bar{A}$).*

Exercice 1.4.5 Montrer qu'on a :

$$\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}\,, \quad \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}\,.$$

On rappelle enfin la définition suivante :

Définition 1.4.6 A est dit *dense dans* E si $\bar{A} = E$.

Par exemple, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1.5 Suites convergentes et valeurs d'adhérence d'une suite

La définition d'une suite convergente dans un espace métrique repose sur la définition d'une suite numérique convergente :

Définition 1.5.1 (x_n) est une suite convergente dans (E, d) s'il existe $\ell \in E$ tel que $d(x_n, \ell) \to 0$ pour $n \to \infty$.

En terme de la boule ouverte :
On a $x_n \to \ell$ ssi
pour tout $r > 0$, il existe $N > 0$ tel que $x_n \in B(\ell, r)$ dès que $n \geq N$.

Remarque 1.5.2 La limite d'une suite, quand elle existe, est unique.

Proposition 1.5.3 *La convergence d'une suite est indépendante du choix de la métrique parmi les métriques topologiquement équivalentes.*

Théorème 1.5.4 (Caractérisation d'un fermé et de l'adhérence) (i) *Un sous-ensemble A est un fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de A reste dans A.*

(ii) *On a $a \in \bar{A}$ ssi il existe une suite (x_n) d'élément de A qui converge vers a.*

Corollaire 1.5.5 *$a \in \partial A$ ssi a est limite commune de deux suites, l'une étant dans A et l'autre en dehors de A.*

Définition 1.5.6 a est appelé *valeur d'adhérence d'une suite* (x_n) lorsqu'il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ convergeant vers a.

Autrement dit, une valeur d'adhérence est une sous-limite.

Proposition 1.5.7 *a est une valeur d'adhérence de (x_n) ssi tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite : pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N > 0$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in B(a, \epsilon)$.*

Remarque 1.5.8 Si on pose $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, alors $a \in \bar{A}$ ssi soit a fait partie de la suite (x_n) soit a est une valeur d'adhérence de cette suite.

1.6 Espaces topologiques

Le fait d'avoir une métrique sur un ensemble permet de parler de la proximité entre deux points ainsi d'étudier la limite d'une suite et la continuité d'une application. Ce cadre s'étend à tout ensemble muni d'une notion de proximité ou celle de voisinage : c'est ce qu'on va voir dans le reste du chapitre.

Topologie sur un ensemble

Soit E un ensemble. On notera $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensmbles de X, càd : $\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}$.

Définition 1.6.1 Soit $a \in E$. On appelera *système de voisinage de a dans E* toute partie $\mathcal{U}_a$ non-vide de $\mathcal{P}(E)$, famille de sous-ensembles de E, qui possède les propriétés suivantes.

(i) $\mathcal{U}_a$ est stable par $\cup$: si $U_i \in \mathcal{U}_a$, $i \in I$, alors $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}_a$;

(ii) $\mathcal{U}_a$ est stable par $\cap$ finie : si $U_i \in \mathcal{U}_a$, $i \in I$ et que I est fini, alors $\cap_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}_a$;

(iii) en outre, $a \in U$ pour tout $U \in \mathcal{U}_a$;

(iv) enfin, pour tout $V \in \mathcal{U}_a$, il existe $W \in \mathcal{U}_a$ tel que $V \in \mathcal{U}_b$ pour tout $b \in W$.

Définition 1.6.2 On appelle *topologie sur E* la donnée d'un système de voisinages en chaque élément de E. Un *espace topologique* est un espace muni d'une topologie.

Si on note $\mathcal{U}$ la collection $\{\mathcal{U}_a\}_{a\in E}$, $(E,\mathcal{U})$ désignera l'espace topologique correspondant.

Définition 1.6.3 Un sous-ensemble A de E est appelé *voisinage de a* par rapport à la topologie $\mathcal{U}$ s'il existe $U \in \mathcal{U}_a$ tel que $a \in U \subset A$.

Exemple 1.6.4 **(a)** Chaque métrique donnne lieu à une structure d'espace topologique, les boules ouvertes (ou fermées) formant des systèmes de voisinages.

(b) Topologie discrète $\mathcal{U}_a = \{A : a \in A \subset E\}$ et topologie grossière $\mathcal{U}_a = \{\emptyset, X\}$ pour tout $a \in E$.

Définition 1.6.5 Une topologie $\mathcal{U}$ est dite *séparée* (au sens de Hausdorff) si deux points distincts possèdent des voisinages disjoints : si $x \neq y$, il existe $U_x \in \mathcal{U}_x$ et $U_y \in \mathcal{U}_y$ tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Remarque 1.6.6 **(i)** La topologie définie par une métrique est séparée.

(ii) La topologie grossière n'est pas séparée.

Définition 1.6.7 Deux topologies $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ sont dites *équivalentes* si les deux conditions sont satisfaites :

(a) $\mathcal{U}$ est plus fine que $\mathcal{U}'$: pour tout $a \in E$ et tout $U' \in \mathcal{U}'_a$, il existe $U \in \mathcal{U}_a$ tel que $a \in U \subset U'$.

(b) $\mathcal{U}'$ est plus fine que $\mathcal{U}$: pour tout $a \in E$ et tout $U \in \mathcal{U}_a$, il existe $U' \in \mathcal{U}'_a$ tel que $a \in U' \subset U$.

Remarque 1.6.8 **(a)** Deux distances topologiquement équivalentes définissent deux topolgies équivalentes (jeu de mots !!!).

(b) La topologite discrète est la plus finie topologique sur E tandis que la topologique grossière est la moins fine.

Ouverts, fermés

On reprend la définition 1.3.1 de la façon suivante.

Définition 1.6.9 Soit $(E,\mathcal{U})$ un espace topologique. Soit $A \subset E$.

(a) A est un *ouvert* si, pour tout $a \in A$, A est un voisinage de a : il existe $U \in \mathcal{U}_a$ tel que $a \in U \subset A$.

(b) A est un *fermé* si $E \setminus A$ est un ouvert.

Par convention, $\emptyset$ est déclaré comme un ouvert.

Théorème 1.6.10 (Propriétés fondamentales des ouverts) *Si on note $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $(E,\mathcal{U})$, alors $\mathcal{O}$ vérifie les axioms (i), (ii) du théorème 1.3.5.*

Parallèlement, pour les fermés d'un espace topologique on continue à avoir les propriés (i), (ii) de la proposition 1.3.7.

Théorème 1.6.11 *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ les collections des ouverts par rapport aux topologiques $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ respectivement. Alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont équivalentes si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) *La collection $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$: pour tout $O' \in \mathcal{O}'$ et $a \in O'$, il existe $O \in \mathcal{O}$ avec $a \in O \subset O'$.*

(ii) *La collection $\mathcal{O}'$ est plus fine que $\mathcal{O}$: pour tout $O \in \mathcal{O}$ et $a \in O$, il existe $O' \in \mathcal{O}'$ avec $a \in O' \subset O$.*

Par conséquent, on peut définir la topologie à partir des ouverts, au lieu des voisinages : dans ce cas, on dira *voisinage d'un point* tout sous-ensemble incluant un ouvert contant ce point. C'est une démarche assez fréquemment entreprise.

Intérieur, extérieur, frontière, adhérence [1]

On peut copier la définition 1.4.1.

Définition 1.6.12 Soit $(E,\mathcal{U})$ un espace topologique et soit $a \in E$, $A \subset E$.

(a) a est *intérieur à* A si A est un voisinage de a : il existe $U \in \mathcal{U}_a$ avec $A \supset U$.

(b) a est *extérieur à* A si a est ntérieur à $E \setminus A$.

(c) a est un *point frontier de* A si tout élément de $\mathcal{U}_a$ rencontre à la fois A et son complémentaire $E \setminus A$: pour tout $U \in \mathcal{U}_a$, on a $A \cap U \neq \emptyset$, $(E \setminus A) \cap U \neq \emptyset$.

(d) a est *adhérent à* A si A rencontre tout voisinage de a.

1. Ceci ne sera pas présenté dans le cours.

On continue d'utiliser les notations $\mathring{A}$, ext$A$, ∂A et $\bar{A}$. L'ancienne proposition 1.4.3 fonctionne dans le cadre actuel.

Proposition 1.6.13 *Dans un espace topologique, on a les propriétés suivantes.*

(a) *$\mathring{A}$ est un ensemble ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A.*

(b) $\mathrm{ext}A = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$.

(c) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{\overbrace{E \setminus A}}$ *et ∂A est un ensemble fermé.*

(d) $\bar{A} = E \setminus \mathrm{ext}A$, *$\bar{A}$ est un ensemble fermé et c'est le plus petit fermé contenant A.*

Théorème 1.6.14 (Caractérisation d'un ouvert et d'un ermé) *A est un ouvert (resp. fermé) ssi $A = \mathring{A}$ (resp. $A = \bar{A}$).*

Topologie induite[2]

Soit $(E,\mathcal{U})$ un espace topologique et soit X une partie non vide de E. Pour tout $a \in X$, on pose

$$\mathcal{U}_a^X = \{X \cap U : U \in \mathcal{U}_a\}.$$

Proposition 1.6.15 *La collection $\mathcal{U}_a^X$ vérifie les axioms (a), (b), (c) de la définition 1.6.1, càd, elle constitue un système de voisinage de a dans X.*

Définition 1.6.16 On appelle *topologie induite par $\mathcal{U}$ sur X* la topologie définie par les systèmes de voisinage $\mathcal{U}^X = \{\mathcal{U}_a^X\}_{a \in X}$ introduits en haut sur X.

Théorème 1.6.17 (Caractérisation d'une topologie induite) *Tout ouvert A de $(X,\mathcal{U}^X)$ peut s'écrire de la façon suivante : $A = X \cap B$, où B est un ouvert de E.*

Corollaire 1.6.18 *Si X est un ouvert de $(E,\mathcal{U})$, alors tout ouvert de $(X,\mathcal{U}^X)$ est aussi un ouvert de E.*

Proposition 1.6.19 *Si $\mathcal{U}$ est définie par une métrique d, alors $\mathcal{U}^X$ correspond à la métrique induite sur X par d.*

Proposition 1.6.20 *Si $\mathcal{U}$ est séparée, il en est de même pour toute topologie induite.*

Suites dans un espace topologique

Soit $(E,\mathcal{U})$ un espace topologique séparée.

Définition 1.6.21 Une suite (x_n) d'éléments de E est dite *convergente* s'il existe $\ell \in E$ tel que, pour tout $U \in \mathcal{U}_\ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ avec ceci : $n \geq N \Rightarrow x_n \in U$.

2. Ceci ne sera pas détaillé dans le cours.

Cette définition réjoint à la définition habituelle d'une suite convergente si la topologie est induite par une métrique.

Remarque 1.6.22 La limite ℓ est unique car $\mathcal{U}$ est supposée séparée. Sans cette hypothèse de séparation, l'unicité ne serait pas toujours assurée, comme le montre la topologie grossière.

Définition 1.6.23 a est une *valeur d'adhérence* de (x_n) si tout voisinage de a contient une infinité de termes de cette suite.