Partiel M303 du 12 Novembre 2008

Eléments de réponse et barème

Exercice 1

1. (1 pt) $x \in \mathring{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.
2. (1 pt) Si $x \notin \mathring{A}$, alors pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \not\subset A$, càd: $B(x,r) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$.
3. (1 pt) Soit $x \in E$. Deux cas sont possibles: (i) $x \in \mathring{A}$; (ii) $x \notin \mathring{A}$. Or, (ii) $\Rightarrow B(x,r) \cap B \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$, ce qui permet de dire que, en tous cas, $B(x,r) \cap (\mathring{A} \cup B) \neq \emptyset$; d'où: $\mathring{A} \cup B$ est dense dans E.

Exercice 2

1. (1 pt par boule) $B((0,0),r)$ est l'intérieur du carré de sommets $(0, \pm r)$, $(\pm r, 0)$.

   $B((0,1),r)$ est le segment vertical ouvert centré en $(0,1)$ et de longueur $2r$.
2. (1,5 pt) Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $y_0 \neq 0$, on a $B(X_0,r) = \{x_0\} \times]y_0 - r, y_0 + r[$ pour tout $r \in]0, |y_0|[$; si $y_0 = 0$, $B(X_0, r)$ sera l'intérieur du carré de sommets $(x_0, \pm r)$, $(x_0 \pm r, 0)$. Pour que X_0 soit dans l'adhérence de $A =]1,2[\times]1,2[$, il faut et il suffit que $B(X_0,r) \cap A \neq \emptyset$ lorsque $r \to 0$; d'où $\bar{A} =]1,2[\times [1,2]$.

Exercice 3

1. (2 pt) Soient x, $y \in E$; avec les inégalités triangulaires on a:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |d(x, f(x)) - d(x, f(y))| + |d(x, f(y)) - d(y, f(y))|$$
$$\leq d(f(x), f(y)) + d(x,y)\,,$$

   ce qui implique que ϕ est 2-lipschitzienne, donc continue sur E.
2. (1 pt) E étant compact, toute application continue sur E atteint ses extrêma, donc son minimum.
3. (1 pt par question) Soit $x_0 \in E$ qui minimize ϕ. On a $f(x_0) = x_0$ car, sinon, $\phi(f(x_0)) < \phi(x_0)$.

   Si $x_1 \neq x_0$ mais $f(x_1) = x_1$, on aurait $d(f(x_1), f(x_0)) < d(x_1, x_0)$ ce qui contredit aux relations $f(x_i) = x_i$ pour $i = 0$, 1.

4. (1 pt) En écrivant

$$f(x) - f(y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}\,,$$

on obtient $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$, car

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} > |x| + |y| \geq |x + y|\,.$$

(1 pt) f n'a pas de point fixe. Donc, la compacité est indispensable pour avoir un point fixe depuis la propriété (1).

Exercice 4

1. (1 pt) TAF: $f(x) = f(0) + xf'(\xi)$ avec $\xi \in [0, x[$ ou $\xi \in]x, 0]$, ce qui permet d'aboutir à l'inégalité annoncée.

2. (0,5 pt) On a $\mathcal{N}_2(f) \leq \mathcal{N}_3(f)$ car $|f(0)| \leq \sup_{[-T,T]} |f(x)|$.

   (1 pt) D'après la question **1**, on a $\sup_{[-T,T]} |f(x)| \leq |f(0)| + T \sup_{[-T,T]} |f'(x)|$, ce qui suffit pour arriver à la seconde inégalité.

3. (2 pt) On a $\mathcal{N}_1(x^n) = T^n$, $\mathcal{N}_2(x^n) = n\,T^{n-1}$. On en déduit que, si $n \to +\infty$, alors

$$\frac{\mathcal{N}_2(x^n)}{\mathcal{N}_1(x^n)} = \frac{n}{T} \to +\infty\,,$$

   donc pas de constante $C > 0$ telle que $\mathcal{N}_2(f) < C\,\mathcal{N}_1(f)$ pour tout $f \in F$.

4. (2 pt) On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(\Phi(f)) &\leq \sup_{[-T,T]} |f'(x)| + 2 \sup_{[-T,T]} |f(x)| \\ &\leq \sup_{[-T,T]} |f'(x)| + 2\left(|f(0)| + T \sup_{[-T,T]} |f'(x)|\right) \\ &\leq \max(2, 2T+1)\,\mathcal{N}_2(f)\,. \end{aligned}$$

   Donc l'application linéaire Φ est continue.

5. (2 pt de bonus) Le dernier coefficient obtenu ci-dessus, $\max(2, 2T+1)$, est la plus petite constante. En effet, si $T \in]0, \frac{1}{2}]$, cette constante vaut 2 et est atteinte par n'importe quelle fonction constante non nulle; si $T \geq \frac{1}{2}$, la constante est atteinte par $f(x) = x$.