Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Probabilités : Modèles et Applications.

Exercices

A. Philippe & M.-Cl. Viano

Master 1 Professionnel

mention : Mathématiques et Modélisation

Année 2004-2005

Conditionnement

Ex 1. X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant les conditions suivantes:
- la loi de Y est une loi binomiale de paramètre (n, p) où $p \in]0, 1[$ et n est un entier strictement positif.
- X ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 et pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$P(X = 1|Y = k) = \frac{k}{n}$$

1) Quelle est la loi de X?

2) Calculer $\mathbb{E}(XY)$

3) Quelle est la loi de $Y - 1$ conditionnellement à l'événement $\{X = 1\}$?

Ex 2. *Chaînes de Markov : définition et propriétés élémentaires*

Soit E un ensemble dénombrable. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans E si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(j_0, \ldots, j_n) \in E^{n+1}$

$$\mathbf{P}(X_n = j_0|X_{n-1} = j_1, \ldots, X_0 = j_n) = \mathbf{P}(X_n = j_0|X_{n-1} = j_1) \stackrel{def}{=} p_n(j_1, j_0).$$

On dit que cette chaîne est homogène si p_n ne depend pas de n.

On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène.

1) Montrer que la loi de X_n est déterminée par la loi de X_0 et par la donnée des $\{p(i, j),\ (i, j) \in E^2\}$

$$p(i, j) = \mathbf{P}(X_1 = j|X_0 = i). \tag{1}$$

2) Etablir les relations suivantes :

$$\mathbf{P}(X_n = j_0|X_{n-1} = j_1, \ldots, X_{n-h} = j_h) = \mathbf{P}(X_n = j_0|X_{n-1} = j_1) \qquad \forall\, h > 0 \quad \forall (j_0, \ldots, j_h) \in E^{h+1},$$

$$\mathbf{P}(X_{n+h} = j_0|X_n = j_1, \ldots, X_0 = j_{n+1}) = \mathbf{P}(X_{n+h} = j_0|X_n = j_1) \qquad \forall\, h > 0 \quad \forall (j_0, \ldots, j_{n+1}) \in E^{n+2}.$$

3) Montrer que le passé et le futur sont indépendants *conditionnellement* au présent, c'est à dire, pour tout triplet (j, k, l) et quels que soient les entiers h_1, h_2 et n strictement positifs, on a

$$P(X_{n+h_1} = j, X_{n-h_2} = k|X_n = l) = P(X_{n+h_1} = j|X_n = l)\ P(X_{n-h_2} = k|X_n = l).$$

Ex 3. Soit X_n une chaîne de Markov. Montrer par un contre exemple que, si A_1 a plus d'un élément,

$$\mathbf{P}(X_n = j_0|X_{n-1} \in A_1, \ldots, X_0 \in A_n) \neq \mathbf{P}(X_n = j_0|X_{n-1} \in A_1).$$

Ex 4. On suppose que l'espace E est fini. Prenons par exemple $E = \{1, \dots, q\}$. On définit la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} p(1,1) & p(1,2) & \cdots & p(1,q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(q,1) & p(q,2) & \cdots & p(q,q) \end{pmatrix}.$$

où les $p(i,j)$ sont donnés par (1). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur π_k définitr la loi de X_k

$$\pi_k = (\pi_k(1), \dots, \pi_k(q)) \qquad \text{avec} \quad \pi_k(j) = \mathbf{P}(X_k = j), \quad j = 1, \dots, q.$$

1) Montrer que la loi π_1 de X_1 vérifie la relation

$$\pi_1 = \pi_0 Q.$$

et plus généralement la loi de X_n est donnée par $\pi_n = \pi_0 Q^n$

2) Comment peut on interpréter la matrice Q^n ?

Ex 5. Soient U_1, U_2 et U_3 trois variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans E_1, E_2 et E_3, espaces au plus dénombrables.

Montrer que si, pour tout $(u_1, u_2, u_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$, la probabilité $\mathbf{P}(U_1 = u_1 | U_2 = u_2, U_3 = u_3)$ ne dépend pas de u_3 alors c'est aussi la probabilité $\mathbf{P}(U_1 = u_1 | U_2 = u_2)$.

Ex 6. La construction des chaînes de Markov proposée dans cet exercice, est souvent très utile pour vérifier qu'une suite de variables aléatoires est une chaîne de Markov.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans un espace dénombrable. On construit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de Z_0 indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la relation

$$Z_{n+1} = f_n(Z_n, X_n) \tag{2}$$

où f_n est une fonction à valeurs dans E.

1) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est une chaîne de Markov (*utiliser le résultat de l'exercice 5*). Préciser la transition de cette chaîne.

2) On suppose que f_n ne dépend pas de n. Montrer que la chaîne de Markov est homogène.

3) *L'exemple des marches aléatoires.* On pose $Z_{n+1} = Z_n + X_n$. Montrer que (Z_n) est bien une chaîne de Markov homogène et

$$p(i,j) = \sum_{\{l : i+l=j\}} \mathbf{P}(X_0 = l) = \mathbf{P}(X_0 = j - i).$$

Ex 7. On jette un dé et pour tout $j \geq 1$ on note X_j le chiffre obtenu au coup j.

1) Montrer que la suite

$$Z_{n+1} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

est une chaîne de Markov. Quelle est sa matrice de transition Q?

2) En utilisant la structure de la suite (Z_n), trouver l'expression de Q^h?

Ex 8. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi, définie par

$$P(X_1 = -1) = 1 - P(X_1 = 1) = p,$$

où $p \in]0, 1[$ est un paramètre fixé. On définit la suite (Z_n) par $Z_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$,

$$Z_{n+1} = \prod_{j=1}^{n} X_j.$$

1) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov homogène et donner l'expression de la matrice de transition. Il existe une valeur de p pour laquelle les variables Z_n sont indépendantes. Laquelle?

2) Montrer que la suite (Z_n) admet une loi limite indépendante du paramètre p. Laquelle?

Ex 9. Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même loi. On note $P(X_1 = 1) = p$ et on suppose que $p \in]0, 1[$.

1) Quelle est la loi de $\sum_{j=1}^n X_j$ conditionnellement à la v.a. X_1?

2) Calculer de deux façons différentes $\mathbb{E}(\sum_{j=1}^n X_j | X_1)$.

3) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à la v.a. $\sum_{j=1}^n X_j$?

4) Calculer de deux façons différentes $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j)$.

Ex 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p).

1) Quelle est la loi de X conditionnellement à $X + Y$?

2) Calculer $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

Ex 11. Soient $X_1, \cdots, X_n$ n v.a. indépendantes. Leurs lois sont des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

1) Donner la loi de $\sum_{j=1}^n X_j$.

2) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à la somme $\sum_{j=1}^n X_j$?

3) Calculer $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j)$.

Ex 12. *Extrait de Décembre 2001*
Dans ce qui suit, $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$ sont deux paramètres fixés.
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On donne sur la loi de (X, Y) les informations suivantes:
• la loi de X est une loi de Poisson de paramètre λ,
• la loi de Y conditionnellement à X est une loi binômiale de paramètres $X + 1$ et p, autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k|X) = C_{X+1}^k p^k (1 - p)^{X+1-k} \mathbb{I}_{k\leq X+1}.$$

1) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

2) Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+1}\right)$.
3) Quelle est la loi de (X, Y)?
4) Quelle est la loi de Y?
5) Trouver la loi de X conditionnellement à $Y = 0$? Que reconnaissez vous?

Ex 13. *Un processus de branchement*
Soit $(X_{n,m})_{n\geq 1, m\geq 1}$ une suite doublement indexée de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi P. Cette loi est concentrée sur $\mathbb{N}$ et $0 < P(0) < 1$. On suppose en outre que la série $\sum kP(k)$ converge. Pour $t \in [0,1]$ on note $f(t) = \int t^x \, dP(x) = \mathbb{E}(t^{X_{1,1}})$ la transformée de Laplace de P (ici et dans la suite, on pose $0^0 = 1$).

1) Vérifier que f est bien définie sur $[0,1]$ et montrer qu'elle y est dérivable en tout point. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$. Quelles sont les solutions sur $[0,1]$ de l'équation $f(t) = t$.

On définit la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ par $Z_1 = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$Z_{n+1} = \mathbb{I}_{(Z_n \neq 0)} \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}.$$

(Par exemple $X_{n,i}$ peut représenter le nombre d'enfants de l'individu de la génération n qui porte le numéro i. Alors, Z_{n+1} est l'effectif de la génération $n+1$. On dira qu'il y a extinction de l'espèce si $Z_n = 0$ pour un certain n.)

2) Montrer que pour t dans $[0,1]$, $\mathbb{E}(t^{Z_n}) = f^{(n)}(t)$ où $f^{(n)}$ désigne le produit de n compositions de f par elle même.

3) En déduire que $P(Z_n = 0) = f^{(n)}(0)$

4) Montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1 si $\mathbb{E}(X_{1,1}) \leq 1$ et sinon c'est l'unique solution dans $]0,1[$ de l'équation $f(t) = t$.

5) Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène.

6) Montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_n) = Z_n \mathbb{E}(X_{1,1})$.

7) (Remarque terminale). On suppose que $\mathbb{E}(X_{1,1}) \leq 1$ et on considère la suite de variables aléatoires

$$M_n = \frac{Z_n}{(\mathbb{E}X_{1,1})^n}.$$

Comparer $\lim(\mathbb{E}M_n)$ et $\mathbb{E}(\lim M_n)$.

Ex 14. *Extrait de l'épreuve de novembre 1999*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et toutes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. La suite de variables Z_n est donnée par Z_0, variable aléatoire à valeurs entières et indépendante des $(X_n)_{n\geq 1}$, et par la relation

$$Z_n = Z_{n-1}^2 \quad \text{si} \quad X_n = 1 \,, \quad \textit{et} \quad Z_n = Z_{n-1} \quad \text{si} \quad X_n = 0.$$

1) Montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov homogène. Préciser l'espace des états de cette chaîne.

2) Quelle est la transition $P(Z_n = j | Z_{n-1} = k)$?

3) On suppose maintenant que $P(Z_0 \in \{0, 1\}) = 0$.
a- Montrer que, presque sûrement, l'inégalité $Z_n > Z_{n-1}$ a lieu pour une infinité d'indices. En déduire que $Z_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
b- On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Montrer que

$$Z_n = Z_0^{(2^{S_n})}.$$

En déduire que, lorsque $n \to +\infty$,

$$\lim \left(\frac{\ln Z_n}{\ln Z_0} \right)^{1/n} = 2^p$$

Ex 15. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi uniforme sur le domaine

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, \ y \geq 0, \ x + y \leq 1\}.$$

1) Quelle est la loi de X conditionnellement à Y?

2) Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$, puis $\mathbb{E}(XY|Y)$.

3) Que vaut $\mathbb{E}(XY|(X, Y))$?

4) Soit $a \in]0, 1[$ fixé. Comment reconstituer $\mathbb{E}(X|Y < a)$ à partir de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X|Y)$?

Ex 16. Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien d'espérance (μ_1, μ_2) et de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

Donner l'expression de $\mathbb{E}(X_1|X_2)$, puis de $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.

Ex 17. *Rendez vous et attente*
R. et J. ont rendez-vous sous la tour Eiffel. Leurs heures d'arrivée sont deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi. On suppose que cette loi est la loi uniforme sur le segment $[0, 10]$ (l'unité est la minute).

1) Que représente la variable aléatoire $W = |X - Y|$? Quelle est sa loi?

2) On suppose que R. et J. repartent lorsque leur temps d'attente atteint 5 minutes. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent? Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent sachant que J. arrive plus de 2 minutes après R.?

3) Quelle est la loi de W conditionnellement à Y?

Ex 18. Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et toutes de loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

1) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à $X_1 + X_2$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2)$. Comment obtenir ce même résultat sans aucun calcul?

2) On note $M = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$. Donner l'expression de la fonction de répartition de X_1 conditionnellement à M. Attention, le couple (X_1, M) n'est pas à densité (pourquoi?). Calculer $E(X_1|M)$.

Ex 19. *Extrait de l'épreuve de novembre 2003*
Soit h la fonction définie par

$$h(x) = \frac{1}{\Gamma(a+1)} e^{-x} x^{a-1}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Rappelons que pour tout réel strictement positif a, on a

$$\Gamma(a) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} x^{a-1} dx$$

et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$
On pose

$$f(x,y) = h(x)\, \mathbb{I}_D(x,y) = \qquad \text{avec } D = \{0 \leq y \leq x\}$$

et $\mathbb{I}_D$ représente la fonction indicatrice de D c'est à dire $\mathbb{I}_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1) Montrer que la fonction f définit une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires ayant pour distribution la loi de densité f.

2) Donner la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.

3) Donner la loi de Y conditionnellement à X.

4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Soit $\alpha \in]0,1[$ fixé. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que

$$P(U=0) = \alpha = 1 - P(U=1).$$

On suppose la variable aléatoire U est indépendante du couple (X,Y).

Soit Z une variable aléatoire définie par

$$Z = UX + (1-U)Y.$$

5) Calculer $\mathbb{E}(Z|U)$.

6) On souhaite maintenant déterminer la loi de Z conditionnellement à X.

6-a) Montrer que

$$P(Z \in A, X \in B) = \alpha \int_B P(Y \in A|X = x) dP_X(x) + (1-\alpha) P(X \in A \cap B)$$

pour tout couple de boréliens (A, B).

6-b) En déduire que pour tout borélien A et tout $x > 0$, on a

$$P(Z \in A|X = x) = \frac{\alpha}{x} \lambda(A \cap [0, x]) + (1-\alpha)\, \mathbb{I}_A(x)$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ex 20. *Extrait de l'épreuve de décembre 1998*
Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et Y une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. La loi du vecteur (X, Y) est donnée par

$$P(X = n, Y < t) = b \int_0^t e^{-(a+b)y} \frac{(ay)^n}{n!}\, dy \quad n \in \mathbb{N},\ t > 0,$$

où $a > 0$ et $b > 0$ sont deux paramètres fixés.

1) Quelles sont respectivement les lois de X et de Y? (On rappelle que la fonction Gamma est donnée par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{s-1} du$, et qu'elle vérifie, pour n entier positif, $\Gamma(n+1) = n!$)

2) Quelle est la densité de la loi de Y conditionnellement à X?

3) Quelle est la loi de X conditionnellement à Y? Que reconnaissez vous?

Ex 21. *Extrait de l'épreuve de janvier 2003*
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire de dimension 3. On suppose que

- la loi de X_1 admet pour densité :

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{6} x^3 e^{-x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

- la loi conditionnelle de X_2 sachant X_1 admet pour densité :

$$f_{X_2|X_1}(y) = \mathbb{I}_{[0, X_1]}(y) \frac{3y^2}{X_1^3} \qquad \text{si} \quad X_1 \neq 0$$

  et

$$P(X_2 = 0|X_1 = 0) = 1$$

- la loi conditionnelle de X_3 sachant (X_1, X_2) admet pour densité :

$$f_{X_3|(X_1,X_2)}(z) = \mathbb{I}_{[0,X_2]}(z)\frac{2(X_2 - z)}{X_2^2} \qquad \text{si} \quad X_2 \neq 0$$

et

$$P(X_3 = 0|X_1 = x, X_2 = 0) = 1 \qquad \forall x \geq 0$$

1) Quelle est la loi du vecteur X.
2) Calculer la loi conditionnelle de (X_1, X_2) sachant X_3.
3) Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant X_3.

Ex 22. *Extrait de l'épreuve de janvier 2000*
Les deux variables aléatoires X et Y sont positives, et la loi du vecteur (X, Y) est donnée par

- Y a une loi de densité
$$f(t) = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$$
- La loi de X conditionnellement à Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$.

1) Quelle est la loi du vecteur (X, Y)?
2) Quelle est la loi de X?
3) Montrer que la loi de Y conditionnellement à X a comme densité

$$\lambda e^{-\lambda(t-X)}\mathbb{I}_{[X,+\infty[}(t)$$

4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}Y$.

5) On dispose de n vecteurs aléatoires indépendants, $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$, tous de même loi, celle que vous avez trouvée à la question 2. On ne connait pas le paramètre λ. Proposez un estimateur sans biais et convergent de $\lambda^{-1} = \eta$. On notera $\hat{\eta}_n$ cet estimateur.

6) On vous communique la valeur de X_{n+1}, mais on oublie de vous donner celle de Y_{n+1}. Quelqu'un vous conseille de la remplacer par

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\eta}_n + X_{n+1}.$$

Sur quels arguments est basé ce conseil? Le trouvez vous bon?

Vecteurs gaussiens

Ex 23. On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2) Soit une variable X de loi gaussienne standard. Trouver la limite, pour $a > 0$ fixé et lorsque $x \to +\infty$, de

$$P\left(X > x + \frac{a}{x} \mid X > x \right).$$

Même question pour $P(X > x + a|X > x)$. Commentez.

Ex 24. *Extrait de l'épreuve de septembre 1999*
Soit a un paramètre fixé dans $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

1) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi a pour densité

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 - a^2}} \exp\left(-\frac{2x^2 + y^2 - 2axy}{2\,(2 - a^2)} \right) \tag{3}$$

a- Que reconnaissez vous?

b- Quelle est la loi de X? Celle de Y? Que vaut $\mathrm{Cov}(X, Y)$?

c- Calculez $\mathbb{E}(X|Y \leq 0)$ et $\mathbb{E}(Y|X \leq 0)$.

2) Soit maintenant une suite de vecteurs aléatoires $((X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n), \cdots)$ mutuellement indépendants et tous de même loi de densité donnée en (3). On considère la suite

$$Q_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j \mathbb{I}_{\{Y_j \leq 0\}}}{\sum_{j=1}^{n} Y_j \mathbb{I}_{\{X_j \leq 0\}}}$$

On suppose que a n'est pas nul. Montrez, en indiquant soigneusement les résultats du cours que vous utilisez, que la suite Q_n a une limite au sens presque sûr. Quelle est cette limite?

Ex 25. Soit $\rho \in]-1,1[$ un paramètre et $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur aléatoire gaussien centré de $\mathbb{R}^3$, de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelle est la loi du vecteur (X_2, X_3)?

2) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à (X_2, X_3)? Montrer que c'est aussi la loi de X_1 conditionnellement à X_2.

3) Montrer que les variables $X_1 - \mathbb{E}(X_1|X_2)$ et $X_3 - \mathbb{E}(X_3|X_2)$ sont indépendantes.

4) Quelle est la loi de X_1 conditionnellement à $(X_2 + X_3)$?

Ex 26. *Extrait de l'épreuve de novembre 2002*

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ d'espérance $\mathbb{E}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Donner la densité du vecteur gaussien (X, Y, Z).

2) On définit la variable aléatoire $V = \dfrac{Y^2}{2} + \dfrac{Z^2}{3}$. Quelle est la loi de V ?

3) Quelle est la loi du couple $(X + Y, Y - Z)$? Ce couple admet-il une densité ?

4) Donner la loi conditionnelle de $X + Y$ sachant $Y - Z$.

Ex 27. *Extrait de l'épreuve de décembre 2000*
Soit $\rho \in]-1/2, 1/2[$ un paramètre fixé. On considère un vecteur (X_1, X_2, X_3, X_4) gaussien, centré, de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 1 & \rho & 0 \\ 0 & \rho & 1 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

1) Quelle est la loi du vecteur $(X_1 + X_2, X_1 - X_3)$?

2) Quelle est la loi de $X_1 + X_2$ conditionnellement à $X_1 - X_3$?

Ex 28. On rappelle la densité de la loi $\Gamma_{\lambda,r}$ où $\lambda > 0$ et $r > 0$:

$$f_{\lambda,r}(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x).$$

1) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives Γ_{λ,r_1} et Γ_{λ,r_2}. Montrer que $X_1 + X_2$ a une loi Γ_{λ,r_1+r_2}.

2) Montrer que le carré d'une variable gaussiennne standard a une loi $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$.

Etant données n variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ mutuellement indépendantes toutes de loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, 1)$,

3) Montrer que la variable aléatoire $\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2$ suit une loi $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}$. On appelle cette loi une loi de $\chi^2(n)$: ainsi, le carré d'une gaussienne standard est un $\chi^2(1)$.

4) On pose $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j$. Quelle est la loi de $\overline{X}_n$? Montrer que $\overline{X}_n$ est indépendante du vecteur $(X_1 - \overline{X}_n, \cdots, X_n - \overline{X}_n)$.

5) Quelle est la loi de $\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2$?

6) Trouver la densité de la variable

$$T_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}\left(\overline{X}_n - \mu\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2}}.$$

Cette loi est connue sous le nom de loi de Student de paramètre $n-1$ (ou encore à $n-1$ degrés de liberté). Elle est tabulée.

7) Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, cette loi converge vers une loi gaussienne standard.

Ex 29. *Extrait de l'épreuve de novembre 2003*
Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien. On suppose que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$$

et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) = 0.$$

1) Montrer que les variables aléatoires $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes.

2) En déduire que

$$\mathbb{E}(XY|X+Y) = \frac{1}{4}(X+Y)^2 - \frac{1}{2} \qquad \text{p.s..}$$

3) On cherche maintenant à évaluer l'espérance de Z conditionnellement au produit XY.

   3-a) Montrer l'égalité presque sûre suivante

$$\mathbb{E}(Z|X,Y) = \mathbb{E}(Z|X) + \mathbb{E}(Z|Y) - \mathbb{E}(Z).$$

   3-b) Montrer que les couples (X, XY) et $(-X, XY)$ ont même loi et en déduire que $E(X|XY) = 0$ presque sûrement.

   3-c) Comparer les tribus $\sigma(XY)$ et $\sigma(X, Y)$.

   3-d) Déduire des questions précédentes l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Z|XY)$.

Sommes de variables aléatoires indépendantes

Ex 30. On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ est gaussienne si pour tout k le vecteur $(X_1,\ldots,X_k)$ est gaussien. On dira qu'elle est centrée si pour tout n, $\mathbb{E}(X_n)=0$. On considère une suite gaussienne centrée telle que

$$\forall (n,m), \qquad \mathrm{Cov}(X_n,X_m)=\min\{m,n\}.$$

1) Soient m,n,p trois entiers dans cet ordre. Calculer $\mathbb{E}(X_n|X_m,X_p)$.

2) On pose $Y_n=X_{n+1}-X_n$. Montrer que la suite Y_n est une suite i.i.d gaussienne. En déduire que $n^{-1}X_n\to 0$ presque sûrement.

Ex 31. *Polynômes de Bernstein*
Soit f continue sur $[0,1]$. Pour tout n on définit sur $[0,1]$ le polynôme

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$

1) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, $B_n(x)$ est égal à

$$\mathbb{E}\Big(f(n^{-1}X_n)\Big)$$

avec X_n distribué suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$.

2) Montrer que, lorsque $n\to+\infty$, $\parallel f-B_n\parallel_\infty \longrightarrow 0$.
Indication: soit $\delta(\varepsilon)$ le module de continuité uniforme de f défini par:

$$\delta(\varepsilon)=\sup_{|x-y|\leq\varepsilon}\{|f(x)-f(y)|\}.$$

Montrer que

$$\parallel f-B_n\parallel_\infty \leq \delta(\varepsilon)+\frac{1}{2n\varepsilon^2}\parallel f\parallel_\infty.$$

3) Si f est de classe C^1, montrer que

$$\parallel f-B_n\parallel_\infty = O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Ex 32. *Le problème des signes aléatoires*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d de loi donnée par

$$P(X_1=1)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2}$$

et soit a_n une suite numérique.

1) Montrer que si $\sum a_n^2<+\infty$ alors la série de terme général a_kX_k converge presque sûrement.

On veut maintenant prouver la réciproque. Dans ce qui suit, on suppose que la série de terme général a_kX_k converge presque sûrement.

2) Calculer la fonction caractéristique de $\sum_{k=1}^{n}a_kX_k$. On la note Φ_n.

3) Montrer qu'il existe un nombre positif M tel que si $\sum a_k^2=+\infty$, alors $\Phi_n(t)\to 0$ pour tout t tel que $0<|t|\leq M^{-1}$.

4) Conclure.

Ex 33. *Extrait de l'épreuve de novembre 2003*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour tout $k \geq 1$, X_k suit une loi exponentielle de paramètre $a_k = \sqrt{k}$. (c'est-à-dire de densité $a_k e^{-a_k x}\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)$). On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_k.

2) En déduire un équivalent de l'espérance et de la variance de S_n lorsque n tend vers l'infini.

   Rappelons que pour $\alpha \geq -1$, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^{\alpha}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^n x^{\alpha} dx$ sont équivalentes lorsque n tend vers l'infini.

3) Montrer que la suite $\dfrac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ converge dans L^2 vers 1 et que la suite $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 2.

4) Montrer que la suite $\dfrac{1}{n} S_{n^2}$ converge presque sûrement. Préciser la limite.

   (Indication : montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_{n^2} - \mathbb{E}(S_{n^2})| > \varepsilon n)$ converge)

5) En déduire que la suite $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge presque sûrement (pensez à un encadrement de n).

Ex 34. *Extrait de l'épreuve de décembre 1998*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de même loi, dans L^1, et mutuellement indépendantes. Soit A un borélien tel que $P(X_1 \in A) \neq 0$. On note N_n la variable aléatoire égale au nombre d'indices $j \leq n$ tels que $X_j \in A$.

1) Montrer que $\frac{N_n}{n}$ converge presque sûrement quand $n \to +\infty$. Quelle est sa limite?

2) On considère maintenant la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ définie par $Y_n = X_n \mathbb{I}_{(X_n \in A)}$. Montrer que la suite $N_n^{-1} \sum_{j=1}^{n} Y_j$ converge presque sûrement, quand $n \to +\infty$, vers une espérance conditionnelle. Laquelle?

3) Faites le calcul de cette limite lorsque la loi de X_1 a pour densité $e^{-x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ et que $A = [0, 1]$.

Ex 35. *Processus autorégressif*
On se donne un nombre $a \in]-1, 1[$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires i.i.d centrées et de variance 1.

1) Montrer que, pour tout n fixé la série $\sum_{j=1}^{+\infty} a^j \varepsilon_{n-j}$ converge à la fois au sens presque sûr et en moyenne quadratique (c'est à dire dans L^2). On note désormais

$$X_n = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{+\infty} a^j \varepsilon_{n-j}. \tag{4}$$

2) Calculer $\mathbb{E}X_n$ et $\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$. Que remarquez vous?

3) On note $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Calculer $\mathrm{Var}S_n$ et en déduire que $n^{-1}S_n$ tend vers zéro en moyenne quadratique.

4) Montrer que $n^{-1}S_n$ converge presque sûrement. Quelle est sa limite?

5) On suppose à partir de maintenant que les ε_n sont des v.a. gaussiennes standard. Montrer que la suite X_n est aussi gaussienne (pour cela poser, pour tout N,

$$X_n^{(N)} = \varepsilon_n + \sum_{j=1}^{N} a^j \varepsilon_{n-j},$$

et trouver, pour k fixé, la matrice de covariance et la fonction caractéristique du vecteur $(X_1^{(N)}, \cdots, X_k^{(N)})$. Puis trouver sa limite quand N tend vers l'infini).

6) Calculer $\mathbb{E}(X_n|(X_{n-1}, \cdots, X_0))$. Que remarquez vous?

7) On a observé les valeurs $(X_0(\omega), \cdots, X_{n-1}(\omega))$ et on désire prédire une valeur $\hat{X}_n(\omega)$ pour $X_n(\omega)$. Pour cela on minimise $\mathbb{E}(Z - X_n)^2$ parmi les fonctions mesurables et de carré intégrable des variables $(X_0, \cdots, X_{n-1})$. Que trouve-t-on? Quelle est la valeur de l'erreur quadratique de prévision $\mathbb{E}(\hat{X}_n - X_n)^2$?

Ex 36. *Extrait de l'épreuve de janvier 2000.* On se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et toutes de loi gaussienne standard et une variable aléatoire X_0 indépendante de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$. Puis on définit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par

$$X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n \quad \forall n \geq 1,$$

où $a \in]-1, 1[$ est un paramètre réel fixé.

1) Quelle est la loi de X_{n+1} conditionnellement à X_n? En déduire que X_n et X_{n+1} ne sont pas indépendantes.

2) Quelle est l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}\left(e^{itX_{n+1}}|X_n\right)$?

3) On veut montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable gaussienne.
a) Commencez par expliquer pourquoi vous ne pouvez appliquer ici les théorèmes du cours.
b) Exprimer S_n en fonction des $(\varepsilon_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ et de X_0. En déduire la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ et trouver la limite en loi de cette suite.

Ex 37. On rappelle que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est un processus de Markov si pour tout n la loi de X_n conditionnellement à $(X_{n-1}, \cdots, X_0)$ est aussi la loi de X_n conditionnellement à X_{n-1}.

1) Montrer qu'il en est ainsi si et seulement si pour tout n la loi de X_n conditionnellement à $(X_{n-1}, \cdots, X_0)$ ne dépend que de X_{n-1}.

2) Revenir à l'exercice précédent et montrer que le processus défini en (4) est un processus de Markov. Quelle est la loi de X_n conditionnellement à X_{n-1}? (Vous noterez P_ε la loi des v.a. ε_j). Quelle est cette loi lorsque P_ε est la gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$?

Ex 38. On considère une variable aléatoire réelle X telle que $\mathbb{E}X^+ = +\infty$ et $\mathbb{E}X^- < +\infty$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a indépendantes et de même loi que X. La loi des grands nombres s'applique t-elle?

1) Soit N entier positif fixé. Pour tout n on note $Y_{n,N} = X_n \mathbb{I}_{X_n \leq N}$. Que devient $Y_{n,N}$ lorsque N tend vers l'infini?

2) Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_{j,N}$ converge presque sûrement vers une limite V_N.

3) Que devient V_N lorsque $N \to +\infty$?

4) Des questions précédentes déduire que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ tend presque sûrement vers $+\infty$.

Ex 39. *Extrait de l'épreuve de rattrapage de janvier 2002.* Soient $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes ayant la même loi, de densité

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x).$$

1) Est-ce que la suite $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ converge presque sûrement?

2) On considère, dans cette question et les suivantes, les variables Z_j définies par

$$Z_j = 1 \quad \text{si } X_j < X_{j+1} \quad \text{et} \quad Z_j = 0 \quad \text{si } X_j \geq X_{j+1}, \quad \forall j \in \{1, \cdots, n-1\}$$

Quelle est la loi de Z_n? Les Z_n $(n = 1, \cdots)$ sont elles indépendantes?

3) Montrer que $\mathbb{E}(Z_j Z_{j+1}) = \frac{1}{3!}$. En déduire $\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n-1} Z_j)$.

4) Montrer que la suite $\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} Z_j$ converge en moyenne quadratique et presque sûrement. Quelle est sa limite?

Convergence en loi

Ex 40. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et soit f une fonction uniformément continue et bornée. Déduire du théorème de Glivenko Cantelli la convergence de $n^{-1}\sum_{j=1}^n f(X_j)$ vers $\mathbb{E}f(X_1)$ sur un ensemble Ω_0 de probabilité 1. Bref, qu'est ce que le théorème de Glivenko Cantelli apporte à la loi des grands nombres?

Ex 41. Soit $\alpha > 0$ un réel fixé. On considère n variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. de loi exponentielle de paramètre α. On pose $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ et on étudie la convergence, lorsque n tend vers l'infini, de la suite M_n.

1) Montrer que M_n n'a pas de limite en loi. Quelle explication donnez vous à ce résultat?

2) Par contre la suite $M_n - \frac{\log n}{\alpha}$ converge en loi. Vers quoi?

Ex 42. *Extrait de l'épreuve de septembre 2002.*
Les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes toutes de même loi, la loi uniforme sur $[0, \theta]$ $(\theta > 0)$. On note $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

1) Donner l'expression de la fonction de répartition de M_n.

2) En déduire que la suite $n(M_n - \theta)$ converge en loi quand n tend vers l'infini. Quelle est la loi limite?

Ex 43. Vous admettrez que la fonction caractéristique de la loi gamma $\Gamma_{\lambda,r}$ est $\Phi(t) = (1 - \frac{it}{\lambda})^{-r}$. Si la loi de X est $\Gamma_{\lambda,r}$, trouver la loi limite de $\frac{X-\mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{Var}X}}$ quand r tend vers l'infini. Application à la loi limite d'un $\chi^2(n)$ lorsque le degré de liberté n tend vers l'infini.

Ex 44. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées. Montrer que X_n converge en loi vers zéro si et seulement si elle converge en moyenne quadratique vers zéro.

Ex 45. On joue à pile-face n fois. La probabilité de pile est $p \in]0, 1[$. On note S_n le nombre de pile obtenus et $\hat{p}_n = \frac{S_n}{n}$ l'estimateur "naïf" de p.

1) Montrer que la suite de v.a. $\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)$ converge presque sûrement vers $p(1 - p)$ et trouver la loi limite de

$$\sqrt{n}\Big(\hat{p}_n\big(1 - \hat{p}_n\big) - p(1 - p)\Big).$$

2) Quelle est la loi limite de la suite

$$\sqrt{n}\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}}.$$

Ex 46. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. Soit p un nombre entier. On suppose que $\mathbb{E}X_1^{2p} < +\infty$.

1) Montrer les convergences presque sûres suivantes

- $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} X_j^k$ vers $\mathbb{E}\left(X_1^k\right)$, pour tout $k \in \{1,\dots,2p\}$ fixé.
- $n^{-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X}_n)^p$ vers $\mathbb{E}\big(X_1-\mathbb{E}(X_1)\big)^p$.

2) Trouver les limite en loi des suites suivantes

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j^k-\mathbb{E}(X_1^k)\right) \quad \text{pour tout} \quad k\in\{1,\dots,p\}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\Big((X_j-\overline{X}_n)^p-\mathbb{E}\big(X_1-\mathbb{E}(X_1)\big)^p\Big).$$

Indication: pour la deuxième suite il est utile de considérer le vecteur

$$V=\begin{pmatrix} V_1\\ \vdots \\ V_p\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad V_k=n^{-1}\sum_{j=1}^{n}X_j^k, \quad k\in\{1,\cdots,p\},$$

et étudier d'abord sa loi limite. Pour obtenir un résultat plus simple, prendre $\mathbb{E}(X_1)=0$. Faire $p=2$ et comparer le résultat avec la question 1) de l'exercice précédent.

Ex 47. *Extrait de l'épreuve de septembre 2003*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n admet pour loi de probabilité :

$$\mathbf{P}(X_n=\frac{1}{2^n})=\mathbf{P}(X_n=-\frac{1}{2^n})=\frac{1}{2}.$$

On pose

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j \qquad \forall n\geq 1$$

1) Calculer la fonction caractéristique de X_n
2) Montrer que la fonction caractéristique de S_n est égale à

$$\phi_{S_n}(t)=\frac{1}{2^n}\frac{\sin(t)}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

3) Calculer la fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[-1,1]$.
4) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser la loi de la limite.

Ex 48. *Extrait de l'épreuve de décembre 1998. Théorème central limite pour des sommes d'un nombre aléatoire de variables i.i.d.*
On se donne deux suites de variables aléatoires, X_n et ν_n. La première, X_n est une suite de variables réelles, indépendantes et de même loi, telle que $\mathbb{E}X_1 = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. La deuxième, ν_n, est une suite de v. a. entières, indépendante de la première et strictement croissante.

On suppose de plus que $\nu_1 \geq 1$. On considère maintenant la suite définie par

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{\nu_n}} \sum_{j=1}^{\nu_n} X_j.$$

1) On note G_n la fonction de répartition de la variable $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j$. Exprimer la fonction de répartition de T_n en fonction des G_k et des probabilités $P(\nu_n = k)$.

2) Quelle est la limite de $G_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$ (citez exactement le théorème que vous utilisez et ses conditions de validité).

3) Déduire des deux questions précédentes que, lorsque $n \to +\infty$, la fonction de répartition de T_n converge en tout point vers celle de la loi gaussienne standard

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$$

Ex 49. *Extrait de l'épreuve de novembre 2002.*
Les 3 parties sont indépendantes.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Poisson de paramètre $\theta = 1$.
On rappelle que la loi de Poisson de paramètre θ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ définie par

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{k!} e^{-\theta} \theta^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Les 3 parties suivantes sont indépendantes.
Partie 1 On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 1}$ par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \forall n \geq 1.$$

1) Calculer la loi de S_n.

2) Montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 1.

3) Montrer que $\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{S_n}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser la limite.

Partie 2 On définit la suite de variables aléatoires $(P_n)_{n\geq 1}$ par

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} (1 + X_i), \qquad \forall n \geq 1.$$

4) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\log(P_n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Donner la limite sous la forme d'une série convergente.

Partie 3 On définit la suite de variables aléatoires $(Q_n)_{n\geq 1}$ par

$$Q_n = \prod_{i=1}^{n} X_i, \qquad \forall n \geq 1.$$

5) Montrer que la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers zéro.
6) Montrer que la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Préciser la limite.
7) Montrer que la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ n'admet pas de limite au sens de la convergence L^1.